АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1855—2671

*

№ 3 1956

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, В. И. Дикушин, А. П. Лебедев, В. Ю. Ломоносов, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), В. В. Покашшевский, Л. П. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 3
Основания математики и математическая логика 6
Теория чисел 12
Алгебра 20
Многочлены и линейная алгебра 20
Группы 23
Поля, кольца и структуры 27
Топология 33
Теория функций действительного переменного 41
Теория множеств 45
Приближение функций полиномами и их обобщениями 46
Теория функций комплексного переменного 53
Дифференциальные уравнения 65
Обыкновенные дифференциальные уравнения 65
Уравнения в частных производных 75
Приложения к физике, технике и естественным наукам 84
Интегральные уравнения 88
Приложения интегральных уравнений . . —
Вариационное исчисление 92
Анализ (другие вопросы) 92
Числовые ряды 96
Специальные функции 97
Интегральные преобразования и операционное исчисление 101
Приложения общих методов математического анализа 103
Функциональный анализ 104
Теория вероятностей . . . . . —
Математическая статистика . . . . . —
Теория игр . . . . . —
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . . —
Геометрия 108
Приложения геометрии . . . . . —
Проективная и начертательная геометрия 111
Алгебраическая геометрия 112
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 117
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 121
Метрические методы в геометрии 126
Геометрия выпуклых многообразий . . . 127
Численные и графические методы 128
Таблицы . . . . . —
Математическая теория электрических цепей . 136
Вычислительные машины и математические приборы 137
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 157
Авторский указатель . . . . . I—IV

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, И. С. Новиков, Д. Ю. Панов, М. М. Постников, С. П. Фиников*

Рефераты 1855—2671 **№ 3** **Март 1956 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1855. Отчетный доклад Центрального Комитета Коммунистической партии Советского Союза XX съезду партии 4 февр. 1956 г. Хрущев Н. С., газ. «Правда», 1956, 15 февр., № 46, стр. 1—11

1856. Директивы XX съезда по шестому пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1956—1960 годы. Доклад [на XX съезде КПСС, 21 февр. 1956 г.]. Булганин Н. А., газ. «Правда», 1956, 22 февр., № 53, стр. 1—6

1857. Речь [на XX съезде КПСС, 17 февр. 1956 г.] (Прения по отчетным докладам: ЦК КПСС — товарища Н. С. Хрущева и Центральной Ревизионной комиссии КПСС — товарища П. Г. Москатова). Несмеянов А. Н., газ. «Правда», 1956, 19 февр., № 50, стр. 3—4

1858. Тематический план работ Польской Академии наук на 1955 год. (Plan problemowy badań naukowych Polskiej Akademii Nauk na rok 1955), Sprawozd. czynności i prac, 1955, **3**, № 3, 104—158 (польск.)

1859. Реорганизация научных работ и дальнейшее развитие Института наук. Папаристо (Mbi riorganizimin e punës shkencore dhe zhvillimin e mëtejshëm të Institutit të Shkencave. Paparisto Kol), Bul. shkenc. natyr., 1955, **2**, 8—22 (алб.; резюме франц.)

1860. Заседания Московского математического общества. Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 181—192

Сообщается о докладах, прочитанных на заседаниях Московского математического общества:

19 апреля 1955 г. В. М. Золотарев, А. В. Скороход, О некоторых аналитических свойствах устойчивых законов распределений. О. Б. Лупанов, О возможностях синтеза схем из разнообразных элементов.

26 апреля 1955 г. А. И. Ширшов, О специальных J-кольцах. С. В. Яблонский, И. А. Чегис, О тестах для электрических схем.

3 мая 1955 г. И. М. Гельфанд, Обобщенные функции и их применение.

17 мая 1955 г. Н. И. Симонов, О первом периоде исследований Л. Эйлера в области обыкновенных дифференциальных уравнений. К. И. Гринцевичюс, О гиперкомплексе прямых в четырехмерном проективном пространстве. М. М. Вайнберг, К вариационной теории нелинейных операторных уравнений.

24 мая 1955 г. Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным.

31 мая 1955 г. Ф. И. Карпелевич, Эрмитовы и билинейные инварианты подалгебр алгебры матриц. В. А. Якубович, Структура областей неустойчивости, критерии устойчивости и неустойчивости системы дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами.

1861. Заседания Ленинградского общегородского математического семинара, Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 197—210

14 сентября 1954 г. Н. А. Лебедев, Обзор экстремальных задач теории функций комплексного переменного.

28 сентября 1954 г. С. Б. Стечкин, Абсолютная сходимость рядов Фурье и коэффициенты Фурье непрерывных функций. С. М. Лозинский, Нелокальные теоремы существования обратных и неявных функций.

12 октября 1954 г. Б. З. Вулих, Полуупорядоченные пространства и некоторые их применения к теории операторов.

26 октября 1954 г. Н. П. Еругин, К теории неявных функций. Ю. Г. Решетняк, Новые способы исследования линейных неравенств.

9 ноября 1954 г. О. А. Ладыженская, Применение функционального анализа для доказательства существования решений краевых задач для уравнений с частными производными трех основных типов. Д. М. Эйдус, О собственных функциях уравнения Гельмгольца.

27 ноября 1954 г. Г. Ю. Джанелидзе, Общая задача о динамической устойчивости упругих систем. А. В. Малышев, Предельный случай теоремы Минковского о линейных формах.

14 декабря 1954 г. Б. А. Рымаренко, О некоторых экстремальных задачах теории монотонных полиномов. Г. Ш. Рубинштейн. Задача о крайней точке пересечения оси с многогранниками и некоторые ее приложения.

28 декабря 1954 г. Г. С. Цейтин, О теореме Коши в конструктивном анализе. И. Д. Заславский, Опровержение некоторых теорем классического анализа в конструктивном анализе.

1862. Научное годичное собрание Общества прикладной математики и механики в Берлине 31 мая — 4 июня 1955 г. Хейнхольд (Wissenschaftliche Jahrestagung der GAMM in Berlin vom 31.5. bis 4. 6. 1955. Heinhold J.), Phys. Bl. 1955, **11**, № 9, 417—419 (нем.)

1863. Апрельское собрание в Бруклине (The April meeting in Brooklyn), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, № 4, 277—309 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 512-му собранию Американского математического общества 14—16 апреля 1955 г.

1864. Апрельское собрание в Чикаго (The April meeting in Chicago), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, 61, № 4, 310—324 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 513-му собранию Американского математического общества 22—23 апреля 1955 г.

1865. Апрельское собрание в Станфорде (The April meeting in Stanford), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, 61, № 4, 325—330 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 514-му собранию Американского математического общества 30 апреля 1955 г.

1866. Наука в современном мире. Морс (Science in the modern world. Morse Marston), Math. Mag., 1955, 28, № 4, 209—211 (англ.)

Отмечаются некоторые черты науки, наиболее характерное проявление которых автор усматривает в математике. Указывается на внезапность перехода у современных математиков от исследований основ математики к работе в сугубо прикладных областях. Однако наиболее сильными и типичными для своей науки считаются такие математики, которые возводят здание математики, долго не задерживаются на обосновании и не спешат перейти к приложениям.

В статье, написанной в афористической манере, затрагиваются различные вопросы. Приводится анекдот относительно немой сцены, ход которой каждый из участников трактует по-своему, для подтверждения отсутствия действительного конфликта между наукой и религией. Причину вражды между ними автор усматривает в недоговоренности; между тем было бы логичнее ссылку на недосказанность и немую речь использовать с той целью, чтобы отметить причину, мешающую выявлению действительно существующего антагонизма между религией и наукой.

Л. П. Гокиели

1867. Математические олимпиады как средство воспитания интереса учащихся к математике. Ланков А. В., Уч. зап. Молотовск. гос. пед. ин-та, 1954, вып. 13, 39—46

1868. Приоритет русской методики математики в основных вопросах преподавания математики (Недооценка русской методики математики). Ланков А. В., Уч. зап. Молотовск. гос. пед. ин-та, 1954, вып. 13, 3—17

1869. О преподавании предметов высшей математики в педагогическом институте. Потоцкий М. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, 21, 139—160

Высказываются соображения в пользу более тесной связи преподавания высшей математики в педагогических институтах с элементарной математикой. Предлагается схема построения курсов высшей математики. Каждый курс должен состоять из трех частей: 1) введение, содержащее постановку основных задач курса, мотивировку всех последующих действий, план дальнейшего изложения; 2) систематическое изложение материала (то, к чему, по мнению автора, в настоящее время обычно сводится всякий курс); 3) заключение, содержащее оправдание курса, в котором показывается, как в результате овладения методами данной дисциплины решаются основные задачи, поставленные во введении. Автор полагает (не приводя подробных аргументов), что поставленные им требования к преподаванию высшей математики в педагогических институтах в настоящее время выполняются совершенно в недостаточной степени.

Е. С. Ляпин

1870. Исследования в области математического образования за 1953 год. Браун (Research in mathematics education — 1953. Brown Kenneth E.), Math. Teacher, 1955, 48, № 1, 21—25 (англ.)

Краткий анализ 43 методических работ по вопросам преподавания математики, опубликованных в США за 1953 (частично за 1952) год.

В. И. Левин

1871. Проблема оценки знаний учащихся по математике в старших классах средней школы. Рив (The evaluation problem in secondary mathematics. Reeve William David), School Sci. and Math., 1955, 55, № 2, 123—140; № 3, 216—228 (англ.)

Обстоятельный анализ применяемой в США методики проведения «тестов» и экзаменов. В зависимости от цели испытания экзамены подразделяются на прогностические, диагностические и проверочные. Наиболее важными автору представляются диагностические тесты, позволяющие в процессе обучения выяснить причины неуспеваемости учащегося и соответствующим изменением методики устранить их. Приводятся методические разработки экзаменационных вопросов по различным разделам элементарной математики.

В. И. Левин

1872. Математика для аспирантов и докторантов по техническим специальностям. Селл (Mathematics for graduate work in engineering. Cell John W.), J. Engng. Educ., 1955, 45, № 5, 423—427 (англ.)

Приводятся программы трех лет обучения математике после окончания высшего технического учебного заведения, включающие теорию функций комплексного переменного, операционное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, определители и матрицы, векторный анализ, тензорный анализ, вариационное исчисление, интегральные уравнения, теорию конечных разностей, теорию возмущений и краевые задачи, численные методы анализа, нелинейные проблемы. Этот объем знаний требуется для докторской степени, половина—для степени кандидата.

В. И. Левин

1873. Об организации изучения математики в американских университетах. Рибейру (Notas sobre a organizacâo dos estudos matemáticos em universidades americanas. Ribeiro Hugo), Ciência (Lisboa), 1954, 4, № 9—10, 76—80 (порт.)

1874. К вопросу о преподавании раздела «Действительные числа» в курсе математического анализа педагогических институтов. Аникина Т. С., Уч. зап. Томского гос. пед. ин-та, 1954, 11, 239—245

1875. Упражнения по курсу теоретической арифметики в педагогическом институте. Кругликовский Н. Н., Уч. зап. Томского гос. пед. ин-та, 1954, 11, 223—238

1876. Преподавание математики слепым. Уитчер (The teaching of mathematics to the blind. Witcher C. M.), Math. Teacher, 1955, 48, № 5, 314—321 (англ.)

1877. Общий указатель. Тт. 51—60, 1945—1954 (General index. Volumes 51—60, 1945—1954), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, part 2, 60 pp. (англ.)

Список статей, опубликованных в томах 51—60 журнала «Bull. Amer. Math. Soc.» за 1945—1954 гг.

1878. Рассуждение и интуиция в математике (Razionalità ed intuizione nella matematica), Archimede, 1954, 6, № 3, 109—112 (итал.)

1879. Статьи по математике в Большой Советской Энциклопедии (Matematika. A Nagy Szovjet Encik-

lopedia cikke), Magyar tud. akad. mat és fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 2, 211—262 (венг.)

1880 К. Прогресс к рациональному единству. Размышления, внушенные сочинениями Декарта и Ампера. Глава VI. Методическая космология. Феррье (Progrès vers l'unité rationnelle. Réflexions proposées d'après les oeuvres de Descartes et d'Ampère. Chapitre VI. La cosmologie méthodique. Ferrier Raoul), Et. Ulman. dép., 12, Paris, 1954, p. 267—305 (франц.)

Работа состоит из следующих разделов: Картезианская наука; Методическая концепция космологии; Проблема единства. Автор пытается использовать декартовский рационализм при рассмотрении, на фоне современной проблематики математики, физики и т. д., вопроса о построении некоторой методической космологии. Отмечается, что Декарт не учел значения количественного числа для установления связи между идеальностью протяженности и характером материальной действительности. В процессе регрессивного упрощения, связанного с уступкой в отношении экспериментально неохватываемого материала, ослабляется относительная неопределенность, заключающаяся в теориях. Обеспечение детерминистского подхода связывается со способностью аппарата математики гарантировать соответствующую однозначность решений; в связи с этим вопрос рассматривается в некотором математическом аспекте. Рассматривается связь методической космологии с аксиоматическими теориями.

Примечание референта. Суждения автора представляются несколько расплывчатыми, что затрудняет усмотрение достаточной определенности в развиваемой им точке зрения. Автор стоит перед логической трудностью, вообще непреодолимой для гносеологического подхода, приводящего к отрыву друг от друга рациональной и эмпирической сторон познания: для согласования рациональной теории с фактами придется вставить некоторую промежуточную теорию, которая из-за своей поневоле рациональной формы потребует новой промежуточной инстанции и т. д. Критерием ценности теории как теории не может быть опять теория. Действительное единство рационального и эмпирического может быть понято лишь в связи с учетом определяющего значения практики для теории, неразрывности логического и исторического. Л. П. Гокиели

1881 К. Очерки по общей методике математики. Репьев В. В. Горький, Книгоиздат, 1955, 216 стр. с черт., 4 р. 35 к.

1882 Д. Изложение в средней школе вопросов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. Дроздова Н. А. Автореф. дисс. канд. пед. н., Н.-и. ин-т методов обучения Акад. пед. наук РСФСР, М., 1955

1883 Д. К методике решения геометрических задач на построение в средней школе. Ибрагимов А. Ю. Автореф. дисс. канд. пед. н., Азерб. пед. ин-т, Баку, 1955

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

1884. Математические идеи. Мейер (Mathematical ideas. Mayer Joseph), School Sci. and Math., 1955, 55, № 1, 5—23 (англ.)

Краткий популярный исторический очерк развития математики. Автор исходит из того, что наиболее важной особенностью математики является ее обобщающий характер. История математики, в зависимости от достигнутой степени обобщения, делится на 5 периодов: греческий, средневековый индо-арабский, XVI—XVII вв., XVIII в., XIX в. Значение математических суждений и процесс развития расцениваются с позиций субъективно-идеалистического принципа «экономии мышления». К. А. Рыбников

1885. Открытие несоизмеримости согласно диалогу «Менон». Фрайезе (Lascoperta dell'incommensurabile nel dialogo «Menone». Frajese Attilio), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 74—80 (итал.)

Мало вероятно, чтобы иррациональность $\sqrt{2}$ была открыта по методу приведения к нелепости или на основе алгоритма отыскания общего наибольшего делителя (оба доказательства были известны древним грекам). Автор усматривает следы первоначального приема открытия несоизмеримости диагонали и стороны квадрата в рассуждениях, содержащихся в диалоге Платона «Менон». Здесь с помощью целочисленных проб устанавливается, что нет такого квадратного числа, которое было бы вдвое больше другого квадратного числа, и вместе с тем дается простое геометрическое построение квадрата, вдвое большего, чем данный (это построение автор связывает с наблюдением над покрытием пола квадратными плитками, различно окрашенными по обе стороны диагонали). Отмечается также, что вся эта часть «Менона» плохо служит поставленной Платоном цели подтвердить его теорию познания как процесса воспоминания. А. П. Юшкевич

1886. Король Альфред и «Начала» Евклида. Кладжетт (King Alfred and the Elements of Euclid. Clagett Marshall), Isis, 1954, 45, 269—277 (англ.)

1887. Заметка об Омаре Хайяме (1050—1122) и современных открытиях. Арчибалд (Notes on Omar Khayyām (1050—1122) and recent discoveries. Archibald R. C.), Pi Mu Epsilon J., 1953, 1, 350—358 (англ.)

1888. Осязательная арифметика. I: палочки Непира и Женейя. Джонс (Tangible arithmetic. I: Napier's and Genaille's rods. Jones Philip S.), Math. Teacher, 1954, 47, № 7, 482—487 (англ.)

Содержанием посмертной книги Непира Rabdologia (1617 г.) обычно считается способ умножения на палочках. Автор указывает, что на самом деле содержание книги значительно шире и включает извлечение квадратного и кубического корней и некоторые тригонометрические и астрономические вычисления. Книга Непира уже в XVII в. переводилась на многие языки до китайского включительно. Многие авторы (Каспар Шотт, 1668 г.; Лейпольд, 1727 г.; Женей и Люка, 1885 г.) усовершенствовали первоначальный прибор Непира. В статье даются снимки из разных стадий развития метода и отмечается, что практического значения в настоящее время он уже не имеет. Исторический интерес книги Непира заключается в том, что он здесь впервые ввел новое написание десятичных дробей, в частности с точкой или запятой для отделения дробной части числа вместо менее удобных прежних знаков для указания разрядов числа. Способ фиксаций произведений на палочках Непира, именно десятков в верхнем треугольнике, единиц в нижнем, встречается уже у индийского математика Бхаскара (1150 г.), первые зачатки умножения на палочках — у арабского математика Алкалсади. И. Я. Депман

1889. Осязательная арифметика. II: пропорциональный циркуль (Исторический очерк). Вуд (Tangible arithmetic. II: the sector compasses. Wood Florence), Math. Teacher, 1954, 47, № 8, 535—542 (англ.)

Большая часть статьи посвящена элементарным применениям пропорционального циркуля и лишь последние страницы — истории. Изобретателем пропорционального циркуля является Галилей, который в 1606 г. опубликовал описание его на итальянском языке. В 1607 г. Бальдассаре Капра сделал попытку присвоить себе изобретение, но по жалобе Галилея суд заставил изъять книгу Капры из обращения. Этот инцидент в весьма драматической форме вошел в биографию Галилея, написанную Харшаньи (Zolt de Harsanyi, The Star Gazer, New York, 1939). Исследования Фаваро показывают, что изобретение пропорционального циркуля в окончательном виде явилось результатом усовершенствования более примитивного прибора Фабрицио Морденте (1567) и Джордано Бруно (1586). Прибор имел большое распространение в XVII в. Джон Робертсон (Robertson J., A treatise of such mathematical instruments as are usually put into a portable case, London, 1767) насчитывает 35 книг о пропорциональном циркуле, изданных до 1700 г. Ламберт (1768) указал на применение пропорционального циркуля при перспективном черчении.

И. Я. Депман

1890. Осязательная арифметика. III: пропорциональные делители. Джонс (Tangible arithmetic. III: the proportional dividers. Jones Phillip S.), Math. Teacher, 1955, 48, № 2, 91—95 (англ.)

Рассматривается четырехконечный циркуль (пропорциональный делитель), длины ножек которого можно менять посредством передвижения шарнирного скрепления. Опровергается мнение некоторых авторов, предполагавших знакомство Евклида с этим прибором. О пропорциональном делителе упоминает Юстус Бюрги в 1592 г., но чертежи подобного прибора имеются уже в эскизных тетрадях Леонардо да Винчи без указания, принадлежит ли идея прибора самому Леонардо или он фиксирует виденные где-то циркули.

В книге Робертсона (Robertson J., A treatise of such mathematical instruments as are usually put into a portable case, London, 1747), содержащей исторические сведения о ранних математических инструментах, сообщается, что в «Военной архитектуре» Д. Спекля (Speckle D., Military architecture, Strasburg, 1589) также говорится о пропорциональном делителе.

И. Я. Депман

1891. Осязательная арифметика. IV: счет на пальцах и на приборах. Джонс (Tangible arithmetic IV: finger reckoning and other devices. Jones Phillip S.), Math. Teacher, 1955, 48, № 3, 153—157 (англ.)

Счет на пальцах, вызванный торговлей между лицами, не знающими общего языка, известен в Китае с VI в., в Греции с V в. до н. э.

Перечисляются счетные приспособления: узловой счет (квипу) перуанцев, бирки, абак, счет на линиях, родоначальник логарифмической линейки — круговая шкала Гантера (1624 г.) и прямая шкала (1633 г.).

Статья иллюстрирована рисунками из одного из ранних учебников арифметики (Каландри), первое печатное издание которого вышло еще в XV в.

И. Я. Депман

1892. Осязательная арифметика. I: исправление и добавление. Райт (Tangible arithmetic. I: a correction and an addition. Wright Robert R.), Math. Teacher, 1955, 48, № 4, 250 (англ.)

Дополнение и исправление к работе автора (см. реф. 1888), в которой чертеж-схема палочек Женейя передан неправильно.

И. Я. Депман

1893. Профессор Краковской академии Ян Брожек (1585—1652)— поборник научной правды. Савицкий (Profesor Akademii Krakowskiej Jan Brożek (1585—1652) — krzewiciel prawdy naukowej. Sawicki Kazimierz), Horyzonty techn., 1954, 7, № 11, 552—556 (польск.)

Краткий очерк жизни и научной деятельности Яна Брожека, известного профессора Краковской академии, жившего в конце XVI в. и первой половине XVII в., написавшего ряд трудов в области математики, особенно геометрии, и занимавшегося также геодезией, медициной и историей культуры. Иезуиты-ксендзы чинили ему как сыну крестьянина всяческие препятствия в получении образования, но благодаря способностям и упорному труду, он добился окончания Академии и научной степени баккалавра, а вскоре и магистра свободных наук и затем доктора философии и профессора. Занимая кафедру астрологии, Брожек читал лекции по математике и астрономии. Будучи последователем Коперника, он вел упорную борьбу с иезуитами. Брожек, имея также медицинское образование, получил степень доктора медицины. В последний год своей жизни он был избран ректором Краковской академии. Среди трудов Брожека следует отметить «Арифметику целых чисел», «Problema geometricum», «Апология Аристотеля и Евклида» и др. Интересны его исследования, относящиеся к различным многоугольникам, в частности, найденный им способ построения правильных многоугольников с наперед заданным нечетным числом вершин, новый способ преобразования данного многоугольника в другой с равным периметром, а также созданная им теория звездчатых многоугольников, которая была использована и расширена почти двести лет спустя.

Брожек, кроме теоретической геодезии, занимался также практическими работами в этой области. Известны измерения, произведенные им в соляных шахтах в Бохне и Величке.

Борясь с иезуитами, Брожек всячески содействовал расширению просвещения среди польского народа. На собственные средства он оборудовал Кужелувскую школу, где в детстве он получил начальное образование.

Брожек был в Польше пионером математической науки, которая после него в течение почти ста лет не имела возможности развиваться и возродилась в Польше лишь в конце XVIII в. усилиями передовых ученых периода Просвещения.

См. также РЖМат, 1955, 571.

И. З. Штокало

1894. Комплексные числа: пример тем, возвращающихся в развитии математики. I. Джонс (Complex numbers: an example of recurring themes in the development of mathematics. I. Jones Phillip S.), Math. Teacher, 1954, 47, № 2, 106—114 (англ.)

Первая из популярных статей, которые автор намерен посвятить истории учения о комплексных числах и их приложений. Пока изложение доведено до конца XVII в. На примере истории комплексных чисел автор желает показать относительное значение практических потребностей и интеллектуального любопытства в работе математиков, пользу чистой математики, международный характер математического развития и т. д. Статья богато иллюстрирована репродукциями из старинных книг.

Примечание референта. В рассуждениях автора вызывают сомнение его узкая трактовка «практических потребностей», «интеллектуального любопытства» и его понимание связей между ними.

А. П. Юшкевич

1895. О непосредственном развитии методов Порта квадратуры плоских фигур, ограниченных кривыми линиями. Гофман (Über das unmittelbare Nachwirken der Portaschen Quadratur krummlinig begrenzter ebener Figuren. Hofmann Jos. E.),

Arch. internat. histoire sci., 1954, **7**, № 26, 16—34 (нем.)

Рассматриваются работы, авторы которых непосредственно базируются на методах Пóрта, а именно: Паоло Ауринетто (1637 г.), Артус де Лионе (1654 г.), Винцент Леотауд (1654 г.) (работа Лионе представляет первую часть книги Леотауда). В этих работах речь идет о квадратурах круговых луночек и соотношениях между элементами этих луночек. Сообщаются биографические и библиографические сведения.

Именной указатель — 68 фамилий. Н. М. Бескин

1896. Первые русские математические журналы — носители прогрессивных методических идей. Симонов Р. А., Матем. в школе, 1955, № 3, 13—20

Изложение содержания некоторых статей из: «Учебного математического журнала» (1833—1834 гг.), «Вестника математических наук» (1861—1862 гг.) и из второго отдела «Математического сборника» (отдел существовал с 1867 по 1882 гг.). Ни систематического обзора содержания этих журналов, ни характеристики прогрессивных методических идей статья на содержит.

К. А. Рыбников

1897. Яков Бернулли. Синта-Бадильо (Jacobo Bernoulli. Cinta Badillo de la), Gac. mat., 1953, 5, ser. 1, 103—105 (исп.)

1898. Значение научных трудов проф. д-ра Тадеуша Банахевича для развития геодезии. Одляницкий-Почобутт (Znaczenie prac naukowych prof. dra Tadeusza Banachiewieza dla rozwoju geodezji. Odlanicki-Poczobutt M.), Geod. i kartogr., 1954, **3**, № 3, 111—116 (польск.)

Краткий обзор научных трудов известного польского ученого Тадеуша Банахевича по случаю 50-летия его научной деятельности. Результаты исследований Банахевича в области астрономии, вычислительной математики, теоретической и практической геодезии вошли большим вкладом в развитие науки в Польской Народной Республике. Указываются различные методы вычислений, созданные Банахевичем и нашедшие успешное применение в геодезической вычислительной практике. Известны также его работы в области гравиметрии и применения результатов астрономических наблюдений для геодезических исследований. Под руководством Банахевича сконструирован целый ряд инструментов и научных приборов для астрономов и геодезистов. Он известен также своей педагогической деятельностью, сначала в Варшавском университете по кафедре астрономии и высшей геодезии, а затем в Политехникуме в Варшаве и Кракове. Отмечается и его научно-организационная и редакционная деятельность, в частности издание 10 томов «Acta astronomica», а также его общественная деятельность. В конце статьи приводится ряд основных научных трудов Банахевича из 230 его теоретических и практических исследований. См. также РЖМат, 1955, 4812.

И. З. Штокало

1899. В. Я. Буняковский — профессор Петербургского университета (К 150-летию со дня рождения). Отрадных Ф. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 5, 49—54

См. также РЖМат, 1955, 2060.

1900. Жизнь и математическая деятельность Г. Грюнвальда. Туран (Grünwald Géza élete és matematikai munkássága. Turán Pál), Mat. lapok, 1955, **6**, № 1, 6-26 (венг.; резюме русс., англ.)

Краткие сведения о жизни и работах венгерского математика Г. Грюнвальда (1910—1942 гг.)

1901. Н. М. Крылов. Вестн. АН СССР, 1955, № 6, 11 мая 1955 г. на 76-м году жизни умер известный советский математик академик Николай Митрофанович Крылов.

1902. Анри Пуанкаре (1854—1912). Салтыков (Анри Поенкаре (1854—1912). Салтиков Н.), Зб. радова Српска АН, 1955, **43**, 1—13 (серб.; резюме франц.)

1903. А. М. Размадзе. Ломджария (ანდრია რაზმაძე. ლომჯარია ნ ი კ ო), საქ. პოლიტექ. ინ-ტის შრომები. Тр. Груз. политехн. ин-та, 1955, № 2, 1—26 (груз.)

См. также РЖМат, 1955, 3567.

1904. Математические труды А. М. Размадзе. Рухадзе (ანდრია რაზმაძის მათემატიკური შრომები. რუხაძე ა.), საქ. პოლიტექ. ინ-ტის შრომები. Тр. Груз. политехн. ин-та, 1955, № 2, 27—38 (груз.)

1905. Некролог. Густав Херглоц. Титце (Nachruf: Gustav Herglotz. Tietze Heinrich), Bayer Akad. Wiss. Jahrb., 1953, 188—194 (нем.)

1906. Из бесед с Густавом Херглоцом. Титце (Aus Gesprächen mit Gustav Herglotz. Tietze Heinrich), Sitzungsber. Math. naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953 (1954), 163—167 (нем.)

1907. Александр Яковлевич Хинчин (К шестидесятилетию со дня рождения). Гнеденко Б. В., Успехи матем. наук., 1955, **10**, № 3, 197—212

Краткие биографические сведения и обзор научно-педагогической и общественной деятельности профессора Московского университета, чл.-корр. АН СССР и действительного члена Академии педагогических наук РСФСР А. Я. Хинчина. Приложен список печатных работ юбиляра.

1908 К. Краткая история математики. Стройк (A concise history of mathematics. Struik Dirk J., London, G. Bell and Sons LTD, 1954, XIX + 299 p.) (англ.)

Структура книги: Введение; гл. I. Начальный период; гл. II. Древний Восток; гл. III. Греция; гл. IV. Восток после падения греческого общества; гл. V. Начальный период развития математики в Западной Европе; гл. VI. Семнадцатый век; гл. VII. Восемнадцатый век; гл. VIII. Девятнадцатый век. Книга заканчивается именным указателем.

В книге содержится 47 портретов и иллюстраций.

Автор отмечает, что, создавая столь краткую книгу по истории математики, он включил в нее только важнейший материал. Для облегчения дальнейшей работы автор снабдил введение и каждую главу библиографической справкой.

В главах, посвященных так называемой восточной математике, подчеркивается непрерывность развития и родство восточных цивилизаций, отсутствует механическое деление на египетскую, вавилонскую, китайскую, индийскую и арабскую культуру.

В книге история математики рассматривается как часть общего процесса материально-производственного, социального и культурного развития человеческого общества. Впрочем, автор отмечает, что при написании очерка истории математики в XIX в. он останавливался лишь на научных школах и их представителях и что он не брал на себя задачу характеристики развития математики в XX в. К. А. Рыбников

1909 К. Геометрия греков от Фалеса до Евклида. С вводной частью о предгреческой геометрии. Хаузер (Geometrie der Griechen von Thales zu bis Euklid. Mit einem einleitenden Abschnitt über die vorgriechische Geometrie. Hauser Gaston, Luzern, E. Haag, 1955, 8 + 176 s., fig., 9. 90 fr.), Schweiz. Buch., 1955, **A55**, № 5, 124 (нем.)

См. также: 1860, 1884, 2367, 2383 Д

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

1910. Верхняя полуструктура степеней рекурсивной неразрешимости. Клини, Пост (The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability. Kleene S. C., Post Emil L.), Ann. Math., 1954, 59, № 3, 379—407 (англ.)

Верхней полуструктурой авторы называют частично упорядоченное множество, любые два элемента x и y которого имеют наименьшую верхнюю грань $x \cup y$. Операция $\cup$ ассоциативна, поэтому имеет смысл запись $x_1 \cup \ldots \cup x_n$. Верхняя полуструктура называется полной (ω-полной), если всякое множество (всякое счетное множество) ее элементов имеет наименьшую верхнюю грань.

Работа содержит 4 параграфа. В § 1 вводится понятие степени неразрешимости и устанавливаются его простейшие свойства. Каждому предикату $P(a_1, \ldots, a_n)$, аргументы которого суть натуральные числа (теоретико-числовому (т.-ч.) предикату), поставим в соответствие его представляющую функцию (т. е. такую функцию $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$, что $P(a_1, \ldots, a_n) \equiv \varphi(a_1, \ldots, a_n) = 0$ и $\bar{P}(a_1, \ldots, a_n) \equiv \varphi(a_1, \ldots, a_n) = 1$). Каждому множеству S натуральных чисел (т.-ч. множеству) поставим в соответствие представляющую функцию предиката $a \in S$. Каждой функции, аргументы и значения которой суть натуральные числа (т.-ч. функции) поставим в соответствие ее самое. Т.-ч. предикаты, множества и функции будем для краткости именовать т.-ч. объектами. Пусть $A, B_1, \ldots, B_l$ — т.-ч. объекты; по определению, «A рекурсивен относительно $B_1, \ldots, B_l$», если функция, поставленная в соответствие A, общерекурсивна относительно функций, поставленных в соответствие $B_1, \ldots, B_l$ (см. Kleene S. C., Introduction to metamathematics, New York, Amsterdam, Groningen, 1952 (сокращенно IM), 275). По определению, т.-ч. объекты $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geqslant 1$) рекурсивно независимы, если при всяком k, $1 \leqslant k \leqslant n$, A_k не рекурсивен относительно $A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n$. Отношение «$A$ рекурсивен относительно B, и B рекурсивен относительно A» есть отношение эквивалентности. Оно разбивает совокупность всех т.-ч. объектов на непересекающиеся классы. По определению, объекты, принадлежащие к одному и тому же классу, имеют одну и ту же степень неразрешимости. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — степени неразрешимости; по определению, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$, если какой-либо (а значит, и всякий) объект, имеющий степень неразрешимости $\mathbf{a}$, рекурсивен относительно какого-либо (а значит, и всякого) объекта, имеющего степень неразрешимости $\mathbf{b}$. Отношение $\leqslant$ превращает множество степеней неразрешимости в частично упорядоченное множество; доказывается, что оно является верхней полуструктурой.

Среди степеней неразрешимости имеется наименьшая степень $\mathbf{0}$ (эту степень имеют рекурсивные т.-ч. объекты); наибольшей степени не существует. Различных степеней неразрешимости $2^{\aleph_0}$; каждой степени предшествует не более $\aleph_0$ степеней (отсюда следует, что рассматриваемая верхняя полуструктура не полна). Пусть $\mathbf{a}_i$ — степень неразрешимости A_i; легко видеть, что $\mathbf{a}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{a}_n$ есть степень произвольного объекта D такого, что каждый A_i рекурсивен относительно D, а D рекурсивен относительно $A_1, \ldots, A_n$; для всякого такого D употребляется обозначение $A_1 \cup \ldots \cup A_n$. По определению, степени $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ независимы, если какие-либо (а значит, и всякие) т.-ч. объекты $A_1, \ldots, A_n$, имеющие соответственно степени $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, рекурсивно независимы. Независимость степеней $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ равносильна тому, что ни при каком k не выполняется неравенство $\mathbf{a}_k \leqslant \mathbf{a}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{a}_{k-1} \cup \mathbf{a}_{k+1} \cup \ldots \cup \mathbf{a}_n$. Независимость влечет попарную несравнимость (при $n > 1$), но (при $n > 2$) обратное неверно.

Всякий предикат $(Ex) R^A(a, x)$, где $R^A(a, x)$ рекурсивен относительно A, называется A-порождаемым. Среди A-порождаемых предикатов существует такой предикат $C^A(a)$, что всякий A-порождаемый предикат рекурсивен относительно $C^A(a)$ (см. IM, §§ 57, 58, теоремы IV, X). Степень неразрешимости $C^A(a)$, зависящая, как доказывается, только от степени $\mathbf{a}$ предиката A, обозначается $\mathbf{a}'$; для любого объекта степени $\mathbf{a}'$ употребляется обозначение A'. Имеют место соотношения $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \to \mathbf{a}' \leqslant \mathbf{b}'$; $\mathbf{a} < \mathbf{a}'$. Степени $\mathbf{0}, \mathbf{0}', \mathbf{0}'', \ldots$ в других терминах были изучены Клини и Мостовским (Kleene S. C., Trans Math. Soc., 1943, 53, 41—73; Mostowski A., Fundam. math., 1947, 34, 81—112). Так называемая «проблема сводимости» может быть сформулирована следующим образом: существует ли между $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ степень неразрешимости, принадлежащая рекурсивно перечислимому множеству?

В § 2 для любого натурального n строится n различных степеней между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Для любых т.-ч. объектов $A_1, \ldots, A_m$ ($m \geqslant 0$) и любого $n \geqslant 1$ можно построить такие т.-ч. объекты $B_1, \ldots, B_n$, что: (A) каждый B_k рекурсивен относительно $(A_1 \cup \ldots \cup A_m)'$. (B) каждый B_k не рекурсивен относительно $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_{k-1}, B_{k+1}, \ldots, B_n$. (C). Если для каких-либо $j, k_1, \ldots, k_p$ ($p \geqslant 0$) объект A_j не рекурсивен относительно $A_{k_1}, \ldots, A_{k_p}$, то A_j не рекурсивен относительно $A_{k_1}, \ldots, A_{k_p}, B_1, \ldots, B_n$.

Доказательство этой теоремы, проводимое для частного случая ($m = n = 2$, A_1 — нерекурсивный объект, но рекурсивен относительно A_2, и A_2 не рекурсивен относительно A_1), занимает 5 страниц. Из теоремы 1 выводятся следующие следствия:

Следствие 1. (a) Для всякой степени $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и всякого $n \geqslant 1$ существуют такие степени $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$, что $\mathbf{b}_k < \mathbf{a}'$ ($k = 1, \ldots, n$) и $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ независимы. (в) Отсюда: для каждой степени $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ существует бесконечное множество степеней, меньших, чем $\mathbf{a}'$ и несравнимых с $\mathbf{a}$.

Следствие 2. (a) Для всякой степени $\mathbf{a}$ и всякого $n \geqslant 1$ существуют такие независимые степени $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$, что $\mathbf{a} < \mathbf{c}_k < \mathbf{a}'$ ($k = 1, \ldots, n$); (b) Отсюда: для каждой степени $\mathbf{a}$ существует бесконечное множество степеней между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$.

Следствие 3. Для всякой степени $\mathbf{a}$ и всякого $n \geqslant 1$ существуют такие степени $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n$, что $\mathbf{a} < \mathbf{d}_1 < \mathbf{d}_2 < \ldots < \mathbf{d}_n < \mathbf{a}'$.

Следствие 4. Для всяких трех степеней $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, удовлетворяющих неравенствам $\mathbf{a}_1 < \mathbf{a}_2 \leqslant \mathbf{a}_3$ и всякого $n \geqslant 1$ существуют такие степени $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$, что $\mathbf{a}_1 < \mathbf{c}_k < \mathbf{a}_3'$ ($k = 1, \ldots, n$) и для любой степени $\mathbf{c}$, такой что $\mathbf{a}_2 \leqslant \mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}_3$, степени $\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ независимы.

В § 3 некоторые предыдущие понятия и результаты переносятся на бесконечный случай. Двуместный предикат $A(a, k) = A_k(a)$ называется рекурсивным объединением одноместных предикатов $A_0(a), A_1(a),$

$A_2(a), \ldots$ (в данном порядке) и записывается как $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Степень неразрешимости $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ не определяется однозначно степенями $A_0, A_1, A_2, \ldots$ и, являясь верхней гранью множества степеней $A_0, A_1, A_2, \ldots$, не является, вообще говоря, наименьшей верхней гранью этого множества (для каждой степени **a** строятся такие предикаты $A_0, A_1, A_2, \ldots$ степени 0 каждый, что степень $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ есть **a**). Говорят, что A_k рекурсивен относительно B рекурсивно по k, если существует общерекурсивная функция $\varepsilon(k)$, дающая для каждого k гёделевский номер A_k относительно B (см. IM, § 58). Доказывается, что степень неразрешимости $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ есть наименьшая из степеней таких B, относительно которых A_k рекурсивен рекурсивно по k (в этом смысле рассматриваемая верхняя полуструктура «рекурсивно ω-полна»). Говорят, что $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (в данном порядке) рекурсивно независимы, если при всяком k предикат A_k не рекурсивен относительно $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_{k+1} \cup \ldots$. Из рекурсивной независимости $A_0, A_1, A_2, \ldots$ вытекает рекурсивная независимость любого конечного подмножества этих предикатов, но не обратно.

Теорема 2 (обобщение теоремы 1). Для любых одноместных предикатов $A_1, \ldots, A_m$ $(m \geqslant 0)$ можно построить такой двуместный предикат $B = B(a, k) = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots$, что: (A) B рекурсивен относительно $(A_1, \ldots, A_m)$; (B) каждый B_k не рекурсивен относительно $A_1, \ldots, A_m, B_0 \cup \ldots \cup B_{k-1} \cup B_{k+1} \cup \ldots$; (C) если для каких-либо $j, k_1, \ldots, k_p$ $(p \geqslant 0)$ предикат A_j не рекурсивен относительно $A_{k_1}, \ldots, A_{k_p}$, то A_j не рекурсивен относительно $A_{k_1}, \ldots, A_{k_p}, B$.

Указывается, что можно установить следствия 1—4 теоремы 2, аналогичные следствиям 1—4 теоремы 1, заменяя n на $\aleph_0$ (при этом в следствиях 1, 2, 4 надо теперь говорить не о зависимости степеней неразрешимости, а о рекурсивной независимости соответствующих предикатов). Дальнейшие следствия теоремы 2 связаны с обобщениями понятия конструктивного действительного числа и конструктивного порядкового числа. Пусть $r_0 = m_0/n_0$, $r_1 = m_1/n_1$, $r_2 = m_2/n_2, \ldots$ — нумерация без повторений рациональных чисел интервала (0,1), причем такая, что m_i и n_i суть общерекурсивные функции от i. Множество рациональных чисел называется **a**-перечислимым, если множество номеров его элементов может быть занумеровано функцией, степень неразрешимости которой $\leqslant$ **a**. Действительное число называется **a**-порождаемым снизу, если нижний класс определяющего его дедекиндова сечения **a**-перечислим. Всякое рациональное число **a**-порождаемо снизу (при любом **a**). В системе S_3 обозначений порядковых чисел (Kleene S. C., J. Symbolic. Logic, 1938, **3**, 150—155) эти обозначения образуют класс O натуральных чисел, частично упорядоченный отношением $<_O$. Если всюду в определении O и $<_O$ заменить слово «рекурсивный» на «рекурсивный относительно A», получим класс O^A, частично упорядоченный отношением $<_O^A$. Устанавливаются еще 4 следствия теоремы 2.

Следствие 5 (7). Для всякой степени **a** множество степеней, заключенных между **a** и **a′**, содержит подмножество, частично упорядоченное подобно множеству всех **a**-порождаемых снизу действительных чисел (соответственно множеству O^A, где A имеет степень **a**). (Из следствия 5 вытекает, что верхняя полуструктура степеней неразрешимости не является ω-полной.)

Следствие 6 (8). Для всяких трех степеней $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, удовлетворяющих неравенствам $\mathbf{a}_1 < \mathbf{a}_2 \leqslant \mathbf{a}_3$, множество степеней, заключенных между $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_3'$, содержит подмножество, частично упорядоченное подобно множеству всех $\mathbf{a}_1$-порождаемых снизу действительных чисел (соответственно, множеству O^{A_1}, где A_1 имеет степень $\mathbf{a}_1$), элементы которого несравнимы со всякой степенью **c**, такой что $\mathbf{a}_2 \leqslant \mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}_3$.

В § 4 рассматривается степень $\mathbf{a}^{(\omega)}$, превосходящая все степени **a**, **a′**, **a″**, ... Пусть $A(a)$ — предикат степени **a**. Степень рекурсивного объединения $L^A = L_0^A \cup L_1^A \cup L_2^A \cup \ldots$, где L_j^A имеет степень $\mathbf{a}^{(j)}$, не определяется, вообще говоря, степенью **a**; однако, если мы будем выбирать L_j^A некоторым специальным образом, например

$$\begin{cases} L_0^A(a) \equiv A(a) \\ L_{k+1}^A(a) \equiv (Ex)\, T_1^{L_k^A}(a, a, x) \text{ (см. IM, § 58),} \end{cases}$$

то степень L^A будет зависеть только от **a**; обозначим ее $\mathbf{a}^{(\omega)}$. Очевидно, $\mathbf{a} < \mathbf{a}' < \mathbf{a}'' < \ldots < \mathbf{a}^{(\omega)}$.

Теорема 3. Для любого множества A можно построить такие множества B_1 и B_2, что: (A) B_1 и B_2 рекурсивны относительно L^A; (B) каждый L_j^A рекурсивен относительно B_1 и относительно B_2; (C) для каждого множества D, рекурсивного относительно B_1 и относительно B_2, существует множество C, рекурсивное относительно B_1 и относительно B_2, но не относительно D.

Из теоремы 3 (C) вытекает, что степени неразрешимости не образуют структуры.

Следствие 1. Для всякой степени **a** существуют степени $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$, не имеющие наибольшей нижней грани и такие, что $\mathbf{a}^{(j)} < \mathbf{b}_i < \mathbf{a}^{(\omega)}$ $(i = 1, 2; j = 0, 1, 2, \ldots)$.

Теорема 4. Для любого одноместного предиката A можно построить такой двуместный предикат $B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots$, что (A) B рекурсивен относительно L^A; (B) каждый L_j^A рекурсивен относительно каждого B_k; (C) $B_0, B_1, B_2, \ldots$ рекурсивно независимы.

Следствие 1 (2). Для всякой степени **a** множество степеней, заключенных между всеми $\mathbf{a}^{(j)}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\mathbf{a}^{(\omega)}$, содержит подмножество, частично упорядоченное подобно множеству всех **a**-порождаемых снизу действительных чисел (соответственно, множеству O^A, где A имеет степень **a**).

По ходу изложения ставится целый ряд нерешенных проблем. Приведем некоторые из них:

1) Степень **b** называется полной, если существует такая степень **a**, что $\mathbf{a}' = \mathbf{b}$. Как распределены полные степени среди всех степеней? В частности, имеется ли полная степень между **a** и **a′**? (Известно лишь, что между **0** и **0′** полной степени не существует).

2) Существует ли для всяких степеней **a** и **b**, удовлетворяющих неравенству $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, такая степень **c**, что $\mathbf{a} < \mathbf{c} < \mathbf{b}$?

3) Имеет ли множество **a**, **a′**, **a″**, ... наименьшую верхнюю грань?

4) Назовем степень **a** арифметической, если для некоторого j имеет место $\mathbf{a} < \mathbf{0}^{(j)}$. Образуют ли арифметические степени структуру?

Указывается, что на некоторые из этих вопросов дан ответ Спектором, публикация результатов которого ожидается. В. А. Успенский

1911. О полуструктуре, образованной степенями рекурсивной неразрешимости. Лакомб (Sur le semi-

réseau constitué par les degrés d'indécidabilité récursive. Lacombe Daniel), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 18, 1108—1109 (франц.)

Автор придерживается терминологии и обозначений статьи Клина и Поста (см. реф. 1910) и уточняет некоторые ее результаты.

Теорема 1. Пусть $S = u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ — строго возрастающая последовательность степеней неразрешимости, удовлетворяющая одному из следующих условий: (A) Существует степень a такая, что при любом i, $u_i = a^{(i)}$ (т. е. u_i равняется результату итерации i раз операции, переводящей a в a'). (B) Существует степень b такая, что для каждого i $b < u_i < b'$. Пусть далее U — множество всех степеней x таких, что $x \in U \equiv (\mathrm{Ei})(x \leqslant u_i)$ и c — степень, не принадлежащая U.

При этих условиях можно определить пару степеней d_1 и d_2, удовлетворяющих требованиям:

1) для всякой степени x: $x \leqslant d_1 \,\&\, x \leqslant d_2 \equiv x \in U$;

2) не имеет места ни одно из соотношений: $c \leqslant d_1$, $c \leqslant d_2$.

Эта теорема показывает, что S не имеет точной верхней границы и пара d_1, d_2 не имеет точной нижней границы.

Определение. Функция $\varphi(i, x)$ пересчитывает последовательность степеней $S = u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, если для каждого i функция одного переменного n $\varphi(i, n)$ имеет степень u_i.

Теорема 2. Если в теореме 1 (гипотеза B) b является арифметической степенью и S представляется арифметической функцией, то d_1, d_2 также являются арифметическими степенями. Б. А. Трахтенброт

1912. О некоторых логических проблемах арифметики. Шанин Н. А., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, **43**, 1—112

Работа состоит из введения и 3 глав и излагает и развивает предыдущие результаты автора (РЖМат, 1955, 1605, 1606, там же см. обозначения и терминологию реферата).

В вводной главе 1 излагается точка зрения «конструктивного направления в математике», дается полное и систематическое конструктивное построение классического и конструктивного логико-арифметических исчислений Σ^+ и Σ и реализуемости арифметических формул по Клину.

В главе 2 доказывается, что операция θ_2, определяемая схемами:

$$\theta_2(T = S) \to (T = S),\ \theta_2(P \,\&\, Q) \to (\theta_2 P \,\&\, \theta_2 Q),$$
$$\theta_2(P \vee Q) \to \neg\neg(\theta_2 P \vee \theta_2 Q),\ \theta_2(P \supset Q) \to (\theta_2 P \supset \theta_2 Q),$$
$$\theta_2 \neg P \to \neg\theta_2 P,\ \theta_2 \forall x P \to \forall x \theta_2 P,\ \theta_2 \exists x P \to \neg\exists x \theta_2 P,$$

является погружающей (п. о.), а операции θ_0, θ_1, θ_3—θ_3— ее видоизменениями. Операция θ_0 принадлежит А. Н. Колмогорову, θ_3 — К. Гёделю, θ_4 — А. А Маркову. П. о. θ_6 дает возможность «во многих случаях вносить существенно меньшие изменения в формулы, чем операция θ_2».

В главе 3 дается определение правильной погружающей операции (п. п. о.) (п. о. α есть п. п. о., если для любой формулы R формула $R \supset \alpha R$ реализуема) и показывается, что п. о. $\theta_0 - \theta_6$ не являются п. п. о; а так же строятся операции Δ_0, ∇_0, α_0, Δ_1, ∇_1, α_1, α_2 и др. и рассматриваются их свойства и взаимоотношения.

Операции α_1 и Δ_1 задаются одновременно схемами:

$$\alpha_1(T = S) \to (T = S), \qquad \Delta_1(T = S) \to (T = S)$$
$$\alpha_1(P \,\&\, Q) \to (\alpha_1 P \,\&\, \alpha_1 Q), \qquad \Delta_1(P \& Q) \to (\Delta_1 P \,\&\, \Delta_1 Q)$$
$$\alpha_1(P \vee Q) \to \neg\neg(\alpha_1 P \vee \alpha_1 Q), \qquad \Delta_1(P \vee Q) \to (\Delta_1 P \vee \Delta_1 Q)$$
$$\alpha_1(P \supset Q) \to (\Delta_1 P \supset \alpha_1 Q). \qquad \Delta_1(P \supset Q) \to (\alpha_1 P \supset \Delta_1 Q)$$
$$\alpha_1 \neg P \to \neg\Delta_1 P, \qquad \Delta_1 \neg P \to \neg\alpha_1 P$$
$$\alpha_1 \forall x P \to \forall x \alpha_1 P, \qquad \Delta_1 \forall x P \to \forall x \Delta_1 P$$
$$\alpha_1 \exists x P \to \neg\neg\exists x \alpha_1 P, \qquad \Delta_1 \exists x P \to \exists x \Delta_1 P$$

α_0, α_1 и α_2 являются п. п. о. Если «операция α_0, вообще говоря, радикально перестраивает формулы, к которым она применяется», то формула $\alpha_1 R$ может быть получена только вставкой двух смежных знаков отрицания в определенные места формулы R. Операция α_2 является видоизменением операции α_1. Соотношение между операциями α_1 и α_2 аналогично соотношению между операциями θ_2 и θ_6.

Основные доказываемые в главе 3 результаты сформулированы в РЖМат, 1955, реф. 1605 и 1606. Библ. 25 назв. Б. Я. Фалевич

1913. Относительно экспоненциальная, логарифмическая и круговые функции в рекурсивной теории функций. Гудстейн (The relatively exponential, logarithmic and circular functions in recursive function theory. Goodstein R. L.), Acta math., 1954, № 92, 171—190 (англ.)

Определяются конструктивные аналоги понятий «сходимость», «непрерывность», «интеграл», «производная» и с их помощью исследуются конструктивные аналоги некоторых элементарных функций: $\exp(x)$, $\log x$, $\sin x$ и другие. Для этого рекурсивная (р.) арифметика натуральных чисел расширяется естественным образом до р. арифметики рациональных (рац.) чисел (см., например, Петер Р., Рекурсивные функции, М., Изд-во ин. лит., 1954, § 24). Обозначения: m, n, k, ... — натуральные числа; x, y, z, ... — рац. числа; $f(n, x)$, $g(n, x)$, ... — функции, принимающие рац. значения.

Основные определения (в них рассматриваются лишь р. функции):

1.01. Отношение $R(n, x_1, \ldots, x_k)$ имеет место при мажоранте n: $\equiv_{\mathrm{Df}}$ существует р. функция $N(x_1, \ldots, x_k)$ такая, что R имеет место при всех $x_1, \ldots, x_k$ и $n \geqslant N(x_1, \ldots)$

1.1. Эквивалентность: $f(n, x)$ эквивалентна $g(n, x)$ (или $f(n, x) = g(n, x)$ отн. n) $\equiv_{\mathrm{Df}} |f(n, x) - g(n, x)| < \frac{1}{10} k$ при мажоранте n.

1.2. Рекурсивная сходимость: $f(n, x)$ р. сходится по n для $a \leqslant x \leqslant b$: $\equiv_{\mathrm{Df}}$ существует $N(k, x)$ такая, что $N(k+1, x) \geqslant N(k, x) \geqslant k$ и

$$(n_1 \geqslant n_2 \geqslant N(k, x) \,\&\, a \leqslant x \leqslant b) \to |f(n, x) - g(n, x)| < 10^{-k}.$$

Если $N(k, x)$ не зависит от x, то сходимость равномерная.

1.4. Относительная непрерывность: $f(n, x)$ непрерывно на $[a, b]$ отн. n: $\equiv_{\mathrm{Df}}$: 1) $f(n, x)$ р. сходится на $[a, b]$ и 2) существует строго возрастающая $c(k)$ такая, что:

$$[x_1, x_2 \in [a, b] \,\&\, |x_1 - x_2| < 10^{-c(k)}] \to$$
$$\to [|f(n, x_1) - f(n, x_2)| < 10^{-k}$$

при мажоранте n.

1.5. Относительная дифференцируемость: $f'(n, x)$ является относительной производной для $f(n, x)$ на $[a, b]$: $\equiv_{\mathrm{Df}}$: 1) f и f' р. сходятся на $[a, b]$ и 2) существует строго возрастающая р. функция $d(k)$ такая, что:

$$[a \leqslant x < x^* \leqslant b \,\&\, |x - x^*| < 10^{-d(k)}] \to$$
$$\to \{|(f(n, x^*) - f(n, x))/(x^* - x) - f'(n, x)| < 10^{-k}\}$$

при мажоранте n. Доказывается, что относительные непрерывность и дифференцируемость — инварианты отношения эквивалентности, и устанавливаются аналоги теорем о дифференцировании обратной и сложной функции.

Интегрирование. Определение 1.7. $f(n, x)$ является р. ступенчатой (ruled functions) на $[a, b]$: $=_{\text{Df}}$: 1) f равномерно р. сходится на $[a, b]$ и 2) существуют р. функции $a_r^n, v_r^n, b(n), t(m, n, r)$ такие, что: $a_0^n = a$, $a_{b(n)}^n = b$, $a_{r+1}^n > a_r^n$ и $a_r^n = a_{t(m,n,r)}^m$ при $m > n$ и 3) $f(n, x) = v_r^n$ при $a_r^n < x < a_{r+1}^n$, $0 \leqslant r \leqslant b(n) - 1$

Определенный интеграл р. ступенчатой $f(n, x)$, обозначаемый через $I_f(n, a, b)$, определяется так:

$$I_f(n, a, b) =_{\text{Df}} \sum_{r=0}^{b(n)-1} v_r^n (a_{r+1}^n - a_r^n) \text{ при } a < b;$$

$$I_f(n, a, a) = 0,\ I_f(n, a, b) = -I_f(n, b, a) \text{ при } a > b.$$

Устанавливается, что $I_f(n, a, b)$ р. сходится (n — переменная).

5.1. Интегралы эквивалентных р. ступенчатых функций эквивалентны. Если р. функция $f(n, x)$ эквивалентна р. ступенчатой $f^*(n, x)$ на $[a, b]$, то, по определению: $I_f(n, a, b) = I_{f^*}(n, a, b)$. Всякая относительно непрерывная $f(n, x)$ эквивалентна некоторой р. ступенчатой, следовательно она интегрируема.

Доказываются аналоги обычных теорем интегрального исчисления и, в частности:

Теорема 18. Если $f(n, x)$ имеет относительную производную $f'(n, x)$ на $[a, b]$, то $I_{f'}(n, a, b) = f(n, b) - f(n, a)$ относительно n.

Элементарные функции. Относительно экспоненциальная функция $E(n, x)$ определяется уравнениями: $E(0, x) = 1$; $E(n+1, x) = E(n, x) + x^{n+1}/(n+1)!$

Свойства: 1) равномерно р. сходится на любом интервале $[-N, N]$; 2) относительно дифференцируема на любом интервале $[-N, N]$, причем: $E'(n, x) = E(n, x)$ относительно n; 3) $E(n, x)\,E(n, a) = E(n, x+a)$ относительно n.

Относительно логарифмическая функция $\log(n, x)$. Определение: $\log(n, x) = I_{\text{rec}}(n, 1, x)$, $x > 0$, где $\text{rec}(n, x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Свойства: 1) $\log(n, E(m, x)) = x$ относительно n, и при $1 \leqslant t \leqslant E(m, x)$ для мажоранты m: $E(m, \log(n, t)) = t$ относительно m, n, т. е. $E(n, x)$ и $\log(n, x)$ — взаимно обратные функции; 2) относительные непрерывность и дифференцируемость; 3) $\log(n, ab) = \log(n, a) + \log(n, b)$ относительно n.

Относительно круговые функции.

$$\sin(0, x) = 0;\ \sin(n+1, x) = \sin(n, x) + (-1)^n \cdot x^{2n+1}/(2n+1)!$$

$$\cos(0, x) = 0;\ \cos(n+1, x) = \cos(n, x) + (-1)^n \cdot x^{2n}/(2n+1)!$$

Свойства: 1) относительные непрерывность и дифференцируемость: $\sin'(n, x) = \cos(n, x)$; $\cos'(n, x) = -\sin(n, x)$ относительно n; 2) аналоги обычных тригонометрических тождеств.

Указывается, что аналогично можно определять и исследовать аналоги функции $\operatorname{tg} x$ и обратных тригонометрических функций. Б. А. Трахтенброт

1914. О неизоморфных рекурсивно-перечислимых множествах. М е д в е д е в Ю. Т., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 2, 211—214

Множества натуральных чисел E' и E'' называются изоморфными, если существует взаимно однозначное и общерекурсивное (о. р.) отображение натурального ряда N на себя, переводящее E' в E''. В статье исследуется вопрос: сколь богатым может быть класс попарно неизоморфных рекурсивно-перечислимых (р. п.) множеств, не являющихся рекурсивными (р.)? Через $E(n)$ обозначается число точек множества $E \subseteq N$ на отрезке $[1, n]$.

Определение 1. Множество $E'' \subseteq N$ не менее густо, чем множество $E' \subseteq N$ (записывается: $E' \preceq E''$), если существует о. р. функция θ такая, что $E''(\theta(n)) \geqslant E'(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. E'' гуще E' (записывается: $E' \supset E''$), если $E' \preceq E''$ верно и $E'' \preceq E'$ неверно.

Доказываются теоремы:

1. Для того чтобы р. п. множество H с бесконечным дополнением $\overline{H}$ было гиперпростым (г. п.), необходимо и достаточно, чтобы не существовало такой о. р. функции φ, что $\overline{H}(\varphi(n)) \geqslant n$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

2. Если проблема разрешимости множества E' однозначно сводима к проблеме разрешимости множества E'', то $E' \preceq E''$.

3. Пусть: 1) $E'' \subseteq N$ а E' — дополнение к р. п. г. п. множеству, 2) существует о. р. функция θ, для которой $E''(\theta(n)) \supset E'(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Тогда $E' \prec E''$.

4. Для любого конструктивного трансфинита α существует последовательность типа α все более густых г. п. дополнений.

В частности, для трансфинита ω можно получить эффективно последовательность указанного типа, взяв произвольное г. п. множество H_0 и последовательно удаляя по одной точке.

Проблемы:

1) Можно ли получить предложение, аналогичное 4, но для последовательности все менее густых г. п. множеств?

2) Существует ли для всякой пары дополнений к г. п., из которых одно гуще другого, некоторое третье, промежуточное по густоте? Б. А. Трахтенброт

1915. Системы трансфинитных типов, содержащие λ-свертывания. Л ' А б б э (Systems of transfinite types involving λ-conversion. L'Abbé Maurice), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 3, 209—224 (англ.)

Строятся формальные системы Σ_α, содержащие трансфинитные типы. Детально описывается система Σ_0, являющаяся слегка измененной системой Чёрча (Church A., J. Symbolic Logic, 1940, 5, 56—68), и система Σ_2, в которой содержатся все примитивно-рекурсивные функции, определенные на натуральном ряду и принимающие значения в области D_α, где x входит в K^3; D_x и K^α означают следующее: K^ν для любого порядкового числа (меньшего некоторой границы, например ω^ω) есть наименьший класс символов, содержащий все символы порядковых чисел $\mu \leqslant \nu$ и замкнутый относительно образования символа $(\alpha\beta)$ из символов α и β. Область D_0 состоит из двух значений истинности T и F, D_1 — натуральный ряд, а $D_{(\alpha\beta)}$ — множество всех функций, определенных на D_β и принимающих значения в D_α; для любого порядкового числа $\lambda > 1$ D_λ есть объединение всех областей D_γ таких, что все порядковые числа, встречающиеся в γ меньше, чем λ.

Доказывается, что непротиворечивость системы Цермело — Френкеля влечет непротиворечивость Σ_2; в Σ_2 строится доказательство непротиворечивости системы Σ_0. А. С. Есенин-Вольпин

1916. Критерии конструктивности для действительных чисел. Майхилл (Criteria of constructibility for real numbers. Myhill John), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 1, 7—10 (англ.)

Работа примыкает к более ранней статье автора (J. Symbolic Logic, 1950, **15**, 185—198), где была построена некоторая формальная теория K действительных чисел. Вводится следующая классификация действительных чисел: действительное число x входит в класс K — , если нижний класс дедекиндова сечения, порождающего x, рекурсивно перечислим; действительное число x входит в класс $K\pm$, если оба класса этого сечения рекурсивно-перечислимы; наконец, x входит в $K+$, если верхний класс указанного сечения рекурсивно-перечислим. (Автор говорит не о рекурсивной перечислимости, а об «определимости в K», что сводится к тому же в силу теорем IV — VI; кроме того, в его терминологии элементами классов $K-$ и $K+$ служат классы дедекиндовых сечений, а не сами действительные числа, а элементами $K\pm$ — отношения между нижним и верхним классами дедекиндова сечения; но это отличие его терминологии от принятой в настоящем реферате несущественно).

Доказываются некоторые простые свойства классов $K-$, $K\pm$ и $K+$. Показывается также, что если в определениях классов Шпеккера R_1, R_2 и R_3 (Specker Ernst, J. Symbolic Logic, 1949, **14**, 145—158) заменить всюду примитивную рекурсивность на общую, то каждое из этих определений станет эквивалентным определению класса $K\pm$. Доказательство по существу такого же результата намечено также в реферате Робинсона книги Петер «Rekursive Funktionen» (Robinson R. M., J. Symbolic Logic, 1951, **16**, 280—282); автор отмечает, что реферируемая статья получена до появления этого реферата Робинсона.

А. С. Есенин-Вольпин

1917. Систематическая мощность. Кемень, Оппенгейм (Systematic power. Kemeny John G., Oppenheim Paul), Philos. Sci., 1955, **22**, № 1, 27—33 (англ.)

Понятие систематической мощности, уточняющее интуитивное представление о «мере способности некоторой теории объяснить факты», было впервые определено в работе Хемпела и Оппенгейма (Hempel C., Oppenheim P., Philos. Sci., 1948, **15**, 135—175). В реферируемой работе определяется другой вариант этого понятия и обсуждаются его преимущества по сравнению с предыдущим вариантом. Авторы придерживаются следующей терминологии и обозначений:

Атом — n-местный предикат, примененный к n индивидуальным объектам. Сингулярная формула — результат применения операций алгебры логики (без кванторов) к атомам. Мерa строгости формулы W (РЖМат, 1955, 586) обозначается через $\mathfrak{s}(W)$.

Пусть даны сингулярные формулы T и D, из которых первая изображает «теорию», а вторая — «фактические данные». Рассматриваются всевозможные пары сингулярных формул D_1 и D_2, удовлетворяющих требованиям: 1) D_1 и D_2 состоят из атомов, содержащихся в D; 2) D_1 и D_2 не содержат общих атомов; 3) из D следует как D_1, так и D_2 (в смысле рассматриваемого исчисления); 4) из $T \,\&\, D_1$ следует D_2. Содержательный смысл этих требований таков: на основании фактов, изображенных формулой D_1 (часть фактов, изображенных формулой D), посредством теории T можно объяснить факты D_2 (часть фактов D).

По определению, $\mathrm{sp}(T, D) = \max[\mathfrak{s}(D_2)/\mathfrak{s}(D)]$ (по всевозможным таким парам D_1 и D_2) и принимается за систематическую мощность теории T (в применении к фактам D).

В случае, когда T и D являются формулами более общего вида, чем сингулярные, то при каждом натуральном n им можно сопоставить сингулярные формулы, получаемые из T и D заменой кванторов конъюнкциями и дизъюнкциями по предметной области из n предметов. Это позволяет отнести формулам T и D в качестве систематической мощности функцию от натурального аргумента n. Б. А. Трахтенброт

1918. Расширенная разрешающая процедура для исчисления предикатов. Стэнли (An extended procedure in quantificational logic. Stanley Robert), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 2, 97—104 (англ.)

Описывается процесс, посредством которого можно установить тождественную истинность широкого класса тождественных формул исчисления предикатов.

А. С. Есенин-Вольпин

1919. О непротиворечивости одной аксиомы счетности. Бенеш (On the consistency of an axiom of enumerability. Beneš Václav Edvard), J. Symbolic Logic, 1955, **20**, № 1, 29—30 (англ.)

Если S — непротиворечивая система аксиом для теории множества, то непротиворечива система S', являющаяся непредикативным расширением S и содержащая аксиому о возможности вполне упорядочить универсальный класс таким образом, что каждый элемент, кроме первого, имеет непосредственно предшественника.

Намечено доказательство, которое основывается на теореме Сколема — Лёвенгейма.

А. С. Есенин-Вольпин

1920. Теорема Гёделя для бесконечнозначного расширенного исчисления высказываний. Роз (A Gödel theorem for an infinite-valued Erweiterter Aussagenkalkül. Rose Alan), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 406—407 (англ.)

Рассматривается бесконечнозначное расширенное исчисление высказываний, построенное на базе следующих примитивных: C_{pq}, G_{pqr} и $\Pi p_i \Phi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Значениями истинности являются действительные числа сегмента [0, 1], причем 1 являются выделенным значением. Здесь, когда $p, q, r, p_1, p_2, \ldots, p_n, \Phi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ принимают соответственно значения истинности $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тогда C_{pq}, G_{pqr} и $\Pi p_i \Phi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ принимают соответственно значения $c(x, y)$, $g(x, y, z)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, где $c(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$, $\psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \min_{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(1, 1, 2^{-w}) = 1$ ($w = 0, 1, \ldots$), $g(1, 0, z) = 1$ ($z \neq 1$), $g(2^{-v}, 2^{-w}, 2^{-u_{vw}}) = 1$ ($v = 1, 2, \ldots$; $w = 0, 1, \ldots$), λ_v, v пересчитывает все конечные последовательности целых неотрицательных чисел $u_{v_1}, u_{v_1}, \ldots, u_{v\lambda_v}$) и $g(x, y, z) = 0$ в остальных случаях.

Методом, аналогичным тому, который был употреблен Гёделем, доказывается, что не существует правдоподобной и полной формализации указанного исчисления. С. В. Яблонский

1921. Об эквивалентности таблиц истинности многозначной логики. Калицкий (On equivalent truth-tables of many-valued logics. Kalicki J.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, **10**, № 2, 56—61 (англ.)

Обычное исчисление характеризуется множеством формул Ω и разбиением множества Ω на теоремы и не теоремы. Указанное подразделение формул, как пра-

вило, получают путем задания таблиц истинности базисных формул, а также указанием выделенных значений (Формула является теоремой, если соответствующая функция принимает только выделенные значения, в противном случае — не теорема). Известны случаи, когда задание различных систем таблиц истинности приводит к одному и тому же исчислению. Этот случай и изучается автором.

В работе рассматриваются формулы, построенные исключительно на базе $\rightarrow$. Автор указывает, что общий метод для решения вопроса, дают ли две данные таблицы истинности для $\rightarrow$ одно и то же множество теорем (т. е. «эквивалентны» или нет), не найден. В работе предлагается метод, который в некоторых случаях позволяет установить эквивалентность двух таблиц истинности для $\rightarrow$. Указанный метод поясняется на частных примерах.

В заключение выясняется особенность таблиц истинности, рассмотренных в примерах. Именно, в соответствующих исчислениях формула либо принимает только выделенные значения, либо принимает все невыделенные значения. С. В. Яблонский

1922. Многозначные и неаристотелевы логики. Ваккарино (Le logiche polivalenti e non aristoteliche. Vaccarino Giuseppe), Archimede, 1953, 5, № 6, 226—231 (итал.)

Беглый, не претендующий на полноту обзор ряда работ по многозначному исчислению высказываний и его связи с интуиционистским исчислением высказываний. Опечатки: на стр. 227, строка 15 снизу, 4-й столбец таблицы, и стр. 228, строка 11 сверху, следует читать $\bar{p}$ и «p» вместо p и «p», соответственно; на стр. 228, строка 17 снизу, — вместо $\bar{\bar{p}} \equiv \bar{\bar{\bar{p}}}$ следует читать $\bar{\bar{p}} \equiv p$; на стр. 227, строка 10 снизу, — в 6-м и 7-м столбцах следует пользоваться разными знаками, а не одним $p \rightarrow q$; аналогично в строках 18—19 на стр. 228. На стр. 229 в аксиоме 11 надо одно из двух выражений p заменить на $\sim p$.
А. С. Есенин-Вольпин

1923. О непротиворечивости математики. Кёте (Sobre a não contradiçao da matemática. Köthe Gottfried), Gaz. mat., 1954, 15, № 58, 1—5 (порт.)

Популярный обзор основных достижений в области исследований по основаниям математики, начиная с конца прошлого столетия (Кантор, Бурали — Форти) до последнего времени. А. С. Есенин-Вольпин

1924. О связи теоремы Эрбрана с новейшими результатами Шютте и Стениуса. Бернейс (Über den Zusammenhang des Herbrand'schen Satzes mit den neueren Ergebnissen von Schütte und Stenius. Bernays Paul), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 397 (нем.)

Высказываются соображения о возможности упростить доказательство теоремы Эрбрана с помощью результатов Шютте об устранимости сечений и Стениуса об устранимости связанных переменных.
А. С. Есенин-Вольпин

1925. Г-полнота. Хенкин (Γ-completeness. Henkin Leon), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 403—404 (англ.)

Вводится понятие Г-полноты, аналогичное введенному автором понятию Г-непротиворечивости (РЖМат, 1955, 1073). Именно, формальная система $\S$, основанная на исчислении предикатов первой ступени и содержащая непустое множество Г индивидуальных констант, называется Г-полной, если из доказуемости в $\S$ каждой $B(\alpha)$, где $\alpha \in \Gamma$, следует доказуемость в $\S$ формулы $(x)\,B(x)$.

Приводится очевидное достаточное условие Г-полноты системы $\S$: каждая формула γ, истинная для всех моделей, Г-выполняющих γ (РЖМат, 1955, 1073), доказуема в $\S$. Без доказательства утверждается, что если Г счетно, то это условие является также необходимым.
А. С. Есенин-Вольпин

1926. Обобщения теоремы дедукции. Керри (Generalizations of the deduction theorem. Curry Haskell B.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 399—400 (англ.)

Пусть S — алгебра предложений с единственным правилом вывода modus ponens. $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ означает, что B получено по modus ponens из A и аксиом S. Если $m = 0$, B называется S-теоремой.

Схема, включающая A, B, C, называется S-схемой, если она является S-теоремой для любых A, B, C.

Теорема дедукции утверждает, что если имеет место $A_1, \ldots, A_m \vdash B$, то формула $A_1 \supset .\, A_2 \supset . \ldots \supset . A_m \supset B$ является S-теоремой. Достаточные условия для выполнения теоремы дедукции состоят в том, что следующие формулы являются S-схемами:

(PB) $B \supset C . \supset : A \supset B . \supset . A \supset C$

(PC) $A \supset . B \supset C : \supset : B \supset . A \supset C$

(PW) $A \supset . A \supset B : \supset . A \supset B$

(PK) $A \supset . B \supset A$

Чёрч (Church) построил слабое позитивное импликационное пропозициональное исчисление с правилами вывода modus ponens и подстановкой, аксиомами (PB), (PC), (PW) и аксиомой (PI) $A \supset A$ вместо аксиомы (PK). Для этой системы Чёрч обосновал слабую теорему дедукции: Если $A_1, \ldots, A_m \vdash B$, то $\vdash A_1 \supset . \ldots \ldots \supset . A_m \supset B$, где некоторые, и даже все, A_i могут отсутствовать (J. Symbolic Logic, 1951, 16, № 3, 238).

Керри дает дальнейшее обобщение теоремы дедукции. Формулы (PB) и (PI) являются S-схемами, правило вывода — modus ponens. Тогда теорема о дедукции формулируется следующим образом: Если имеет место $A_1, \ldots, A_m \vdash B$, то могут быть найдены такие $C_1, \ldots, C_n$, каждое из которых является одним из A_i или S-теоремой, и такие, что $C_1 \supset . C_2 \supset . \ldots . \supset . C_n \supset B$ — является S-теоремой.

Теорема имеет место, если (PI) заменяется любой схемой $C_1 \supset . C_2 \supset . \ldots \supset . C_n \supset B$, в которой некоторые C_j суть B.

Построен пример исчисления с обобщенной теоремой о дедукции. Т. Л. Майстрова

1927. Логическая природа арифметики. Сколем (The logical nature of arithmetic. Skolem Th.), Synthese, 1954, 9, № 6, 375—384 (англ.)

Популярная обзорная статья о вопросах обоснования арифметики натуральных чисел. Коротко излагаются точки зрения Дедекинда, Пуанкаре и Фреше, которые автор называет аналитической, синтетической априори и синтетической апостериори соответственно. Потом подробнее рассматриваются обоснование арифметики в рамках формальных (символических) систем.
Б. А. Трахтенброт

1928 К. Основание математики. Барту, Осборн (Foundation mathematics. Bartoo Grover Cleveland, Osborn J. O. Webster, 1954, 252 pp. 1. 28 doll.), Cumul. Book Index, 1954, 57, № 9, 8 (англ.)

См. также: 1861, 2042, 2491

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1929. О некоторых новых теоремах аддитивной теории чисел. Виноградов А. И., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 5, 875—876

Формулируются теоремы (условные и безусловные) о сложении двух простых чисел с «редкими» последовательностями, обобщается результат Ю. В. Линника (РЖМат, 1954, 26) на случай, когда вместо степеней 2 взяты степени любого простого p.

Формулируется лемма: Пусть $M \leqslant R$, $p^M = Q$, $T(\alpha) = \sum_{n=1}^{M} \exp\{-\varepsilon_n p^n / N\} \exp\{-2\pi i \alpha \varepsilon_n p^n\}$, где ε_i, $1 \leqslant i \leqslant M$, — произвольный набор чисел с условием $\varepsilon_i = +1$, либо -1. В таком случае мера ε_η тех значений α, для которых не выполняется условие $|T(\alpha)| \leqslant (1-\eta) M$, имеет оценку: $\operatorname{mes} \varepsilon_\eta < Q^{13\sqrt{\eta}-1}$.

Утверждается, что лемма позволяет снизить константу в вышеуказанной работе Ю. В. Линника: если в этой работе требовалось k_0 степеней двойки, то с помощью леммы можно получить $\ln k_0$ этих степеней. Доказательства не приведены. В. М. Архангельская

1930. О проблеме из аддитивной теории чисел. Лоренц (On a problem of additive number theory. Lorentz G. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 838—841 (англ.)

Пусть A и B — множества натуральных чисел; $A(n) = \sum_{a \leqslant n,\, a \in A} 1$. A и B называются дополнительными, если $A + B$ содержит все достаточно большие натуральные числа.

Эрдеш высказал гипотезу, что для каждого бесконечного множества A существует дополнительное множество B, асимптотическая плотность которого равна нулю. Справедливость гипотезы Эрдеша следует из теоремы: Для каждого бесконечного множества A существует дополнительное множество B, для которого

$$B(n) \leqslant c \sum_{k=1}^{n} \log A(k) / A(k) \qquad (1)$$

(c — абсолютная константа; слагаемые с $A(k) = 0$ заменяются единицей).

Доказательство теоремы основано на нетривиальной оценке сверху количества чисел $b \in [m, 2n')$, где $m < n'$, для которых суммы $a + b$ заполняют весь полуинтервал $(n', 2n']$.

Эта же оценка позволяет доказать теорему: Если $a_1, \ldots, a_l$ — множество несравнимых вычетов по $\bmod n$, то существует множество вычетов $b_1, \ldots, b_k$ с $k \leqslant cn \log l / l$ такое, что каждый вычет по $\bmod n$ выражается суммой вида $a_i + b_j$.

Из (1) при $A(n) \geqslant \alpha n$ ($\alpha > 0$) следует, что $B(n) \leqslant c \log^3 n$. Б. М. Бредихин

1931. Некоторые результаты из аддитивной теории чисел. Эрдёш (Some results on additive number theory. Erdös Paul), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 847—853. (англ.)

Доказывается теорема о плотности суммы двух последовательностей. Обозначим через $N(b_i, n)$ количество членов последовательности $\{b_i\}$, не превосходящих n.

Теорема. Существует последовательность $\{b_i\}$, удовлетворяющая условию $N(b_i, n) < c_1 (\ln n)^2$, такая, что все достаточно большие целые числа представимы в виде $p + b_i$, где p — простое и c_1 — положительная абсолютная константа.

Возьмем две последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ с условием, что каждое достаточно большое целое число представимо в форме $a_i + b_j$. Как показал Лоренц (реф. 1930), верна оценка

$$N(b_j, n) < c_2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln N(a_i, k)}{N(a_i, k)}$$

Во второй теореме показано, что существуют последовательности $\{a_i\}$ с условием: $N(a_i, n) > \alpha n$, где α — положительная абсолютная константа, — для которых оценку Лоренца улучшить нельзя. Вторая часть работы посвящена обобщению результатов Л. Г. Шнирельмана о плотности суммы двух последовательностей. Доказательства проведены методом комбинаторики.

А. И. Виноградов

1932. Решенные и нерешенные вопросы о базисах натурального ряда чисел. I. Шт ё р (Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. I. Stöhr Alfred), J. reine und angew. Math., 1955, **194**, № 1—4, 40—65 (нем.)

Обзор результатов по теории базисов натурального ряда, возникшей, как известно, в связи с исследованиями Л. Г. Шнирельмана по аддитивной теории чисел. Доказываются некоторые новые результаты и формулируется ряд задач, решение которых, по мнению автора, представляет интерес для дальнейшего развития теории.

Пусть h — натуральное число, $\mathfrak{B}$ — множество целых неотрицательных чисел, $B(n)$ — число положительных чисел из $\mathfrak{B}$, не превосходящих n. $\mathfrak{B}$ называется базисом (соответственно базисом в большом), если все (соответственно все достаточно большие) целые неотрицательные числа представимы в виде суммы h слагаемых из $\mathfrak{B}$. Для всякого базиса h-го порядка обозначим через β_1, β_2, β_3, β_4 соответственно $\inf$, $\varliminf$, $\varlimsup$, $\sup$ по всем $n = 1, 2, \ldots$ выражения $B(n) \Big/ \sqrt[h]{n}$; пусть $\nu_i(h) = \inf \beta_i$ ($i = 1, \ldots, 4$) по всем базисам h-го порядка. Вычисляется $\nu_1(h) = 1 \Big/ \sqrt[h]{h}$ и даются оценки для $\nu_i(h)$ ($i = 2, 3, 4$) сверху и снизу.

Задача получения точных оценок для $\nu_i(h)$ сверху приводит к построению базисов или последовательностей базисов, для которых функция $B(n)$ в некотором смысле мала. Приводятся 8 определений минимальных базисов, рассматриваются вопросы их существования. Строится класс некоторых специальных (рекуррентных) базисов.

Доказываются 8 теорем, указывающих достаточные условия, при которых данное множество целых неотрицательных чисел не образует базиса конечного порядка в большом, основанные на наличии больших пробелов в этом множестве. Для любого h строится простой пример множества, не являющегося базисом h-го порядка в большом, однако представляющего почти все натуральные числа в виде суммы h слагаемых.

И. П. Кубилюс

1933. Решенные и нерешенные вопросы о базисах натурального ряда чисел. II. Шт ё р (Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. II. Stöhr Alfred), J. reine und angew. Math., 1955, **194**, № 1—4, 111—140 (нем.)

Продолжение статьи автора (реф. 1932). Множество $\mathfrak{B}$ целых неотрицательных чисел называется S-базисом, если существуют два таких натуральных числа c и m, что каждое делящееся на c натуральное число представимо в виде суммы не более чем m слагаемых из $\mathfrak{B}$. Исследуется связь между S-базисами и базисами в большом. Даются различные необходимые и доста-

точные условия, при которых данное множество целых неотрицательных чисел является S-базисом.

Вводятся некоторые бинарные операции над множествами целых неотрицательных чисел, называемые автором умножением, проектированием, уплотнением. Изучаются свойства S-базисов, базисов и базисов в большом в терминах этих операций. Дается краткий обзор специальных базисов, употребляемых в классических задачах аддитивной теории чисел. Изучаются плотностные свойства векторной суммы двух базисов, а также базиса и других множеств. В частности, строится пример базиса второго порядка, векторная сумма которого с самим собой имеет нулевую шнирельмановскую плотность.

Рассматривается представление целых неотрицательных чисел в виде $b_1+\ldots+b_k-b_{k+1}-\ldots-b_l$ с ограниченным и неограниченным числом слагаемых, причем b_j принадлежат заданным множествам, а также в виде $b_1+\ldots+b_k$ с ограниченным и неограниченным числом слагаемых при условии, что каждое число имеет единственное представление.

В заключение рассматривается понятие базиса для групп и полугрупп, в частности, для множеств вещественных чисел. Библ. 68 назв. П. П. Кубилюс

1934. Обобщённые асимптотические плотности. Рорбах, Фолькман (Verallgemeinerte asymptotische Dichten. Rohrbach Hans, Volkmann Bodo), J. reine und angew. Math., 1955, **194**, № 1—4, 195—209 (нем.)

Шнирельманом была высказана гипотеза: $\delta(A+B)\geqslant\delta(A)+\delta(B)$, если $\delta(A)+\delta(B)\leqslant 1$, где $\delta(F)$ — плотность последовательности F. Эта гипотеза для случая $\delta(A)=\delta(B)$ была доказана А. Я. Хинчиным (Матем. сб., 1932, **39**, № 3, 26—34), а для общего случая Г. Манном (Хинчин А. Я., Три жемчужины теории чисел, ОГИЗ, 1947, где доказательство Манна дано в форме, переработанной Артином и Шерком). В случае, когда обычная плотность заменена асимптотической $\left(\text{когда вместо } \inf_x \frac{1}{x}\sum_{n_i\leqslant x}1=\delta(F) \text{ рассматривается } \lim_{x\to\infty}\inf\frac{1}{x}\sum_{n_i\leqslant x}1=D(F)\right)$, аналогичный вопрос решается теоремой Кнёзера (РЖМат, 1954, 2849): Если $S=A_1+A_2+\cdots+A_n$, $\sum_{k=1}^n D(A_k)\leqslant 1$, то тогда либо $D(S)\geqslant\sum_{k=1}^n D(A_k)$, либо существует целое число g такое, что $S\sim S^g=\sum_{k=1}^n A_k^g$, и тогда $D(S)\geqslant\sum_{k=1}^n D(A_k)-n/g$, где A^g получено из A путем присоединения к A всех чисел, сравнимых с числами A по модулю g; $A\sim B$ означает, что A и B отличаются друг от друга не более чем на конечное множество.

Реферируемая работа посвящена обобщению результата Кнёзера на случай, когда асимптотические плотности заменены взвешенными асимптотическими плотностями по формуле

$$\lim_{x\to\infty}\inf\frac{1}{\Phi(x)}\sum_{n_i\leqslant x}\varphi(n_i),$$

где $\Phi(x)=\sum_{n_i\leqslant x}\varphi(n_i)$, n_i — члены последовательности F. Доказывается, что при наличии соответствующих ограничений для весовой функций $\varphi(x)$ справедлива теорема, аналогичная теореме Кнёзера. Н. П. Романов

1935. Существенные компоненты и асимптотическая плотность. Клётер, Штёр (Wesentliche Komponenten und asymptotische Dichte. Klöter Hubert, Stöhr Alfred), J. reine und angew. Math., 1955, **194**, № 1—4, 210—217 (нем.)

Пусть A и B — множества неотрицательных целых чисел, $A(n)=\sum_{0<a\leqslant n,\ a\in A}1$. Плотностью A называется $\delta(A)=\alpha=\inf_{n=1,2,\ldots}A(n)/n$; $\delta^*(A)=\alpha^*=\lim_{n\to\infty}A(n)/n$ — асимптотическая плотность A. $A+B$ обозначает множество всех чисел вида $a+b$, где $a\in A$, $b\in B$; mB обозначает сумму $B+B+\cdots+B$ с m одинаковыми слагаемыми. Если натуральное число $n\in mB$, то существует наименьшее $l=l(n)$, для которого $n\in lB$. Если $l(n)$ существует для всех $n\geqslant 1$, то $h=\sup_{n=1,2,\ldots}l(n)$ называется порядком B; $\lambda=\sup_{n=1,2,\ldots}n^{-1}\sum_{m=1}^n l(m)$ — средний порядок B. Если $l(n)$ существует для всех $n\geqslant n_0\geqslant 1$, то $h^*=\overline{\lim}_{n\to\infty}l(n)$ называется асимптотическим порядком B; $\lambda^*=\overline{\lim}_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{m=n_0+1}^n l(m)$ — асимптотический средний порядок B. Если h^* и λ^* конечны и $0\in B$, то $\lambda^*=h^*$ тогда и только тогда, когда $\delta^*((h^*-1)B)=0$ (аналогичное утверждение справедливо для λ и h).

Существенной компонентой называется такое множество B, для которого при любом A с $0<\alpha<1$

$$\delta(A+B)=\gamma\geqslant\alpha+\varphi(\alpha),$$

где $\varphi(\alpha)$ — положительная величина, зависящая только от α. Понятие существенной компоненты введено А. Я. Хинчиным (Матем. сб., 1933, **40**, 180—189), доказавшим, что последовательность квадратов натуральных чисел есть существенная компонента. Его результат был усилен А. А. Бухштабом (см. цитированный журнал). П. Эрдеш (Успехи матем. наук, 1940, **7**, 87—89) в 1935 г. показал, что каждое множество B с $0\in B$ и с конечным h, т. е. каждый базис натурального ряда, есть существенная компонента. Ю. В. Линник (Матем. сб., 1942, **10**, 67—78) доказал необратимость теоремы Эрдеша, построив пример существенной компоненты, не являющейся базисом. Одна из лучших оценок $\varphi(\alpha)$ принадлежит А. Брауэру (Brauer A., Math. Z., 1939, **44**, 212—232): $\varphi(\alpha)=\alpha(1-\sqrt{\alpha})/\lambda$. Оценку Брауэра автор переносит на асимптотические плотности.

Основной результат: Пусть $0\in B$ и λ^* — конечное. Тогда $\gamma^*\geqslant\alpha^*+\varphi(\alpha^*)$, где $\varphi(\alpha^*)=\alpha^*(1-\sqrt{\alpha^*})/\lambda^*$. Б. М. Бредихин

1936. О простых числах в начале арифметической прогрессии. Фогелс Э. К., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 3, 455—456

Даются ясные указания, как из теорем о плотности нулей L-рядов Дирихле, взятых из работы К. А. Родосского (РЖМат, 1955, 37), получить такие теоремы о распределении простых чисел в прогрессии: 1) Для любого $\varepsilon>0$ есть постоянная $A=A(\varepsilon)>24/\varepsilon$ такая, что в промежутке $(D^A, D^{A(1+\varepsilon)})$ находится по меньшей мере одно простое число прогрессии $Du+l$, $(D, l)=1$. 2) Для любого $\varepsilon>0$ и для всех $A>A_0(\varepsilon)>30/\varepsilon$ $\pi(D^A, D, l)>D^{A(1-\varepsilon)}$. А. Г. Постников

1937. О проблеме делителя. Дун Гуан-чан (除數問題.董光昌), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **2**, № 4, 258—266 (кит.)

Пусть $d_k(n)$ означает число представлений n в виде произведения k множителей и $D_k(x)=\sum_{n\leqslant x}d_k(n)$. Известно, что $D_k(x)=(a_{k,0}+a_{k,1}\log x+\cdots+a_{k,k-1}\log^{k-1}x)x+\Delta_k(x)$, где $\Delta_k(x)/x\to 0(x\to\infty)$. Определяются

$$\alpha_k=\overline{\lim}_{x\to\infty}\log|\Delta_k(x)|/\log x,$$

$$\beta_k=\overline{\lim}_{x\to\infty}\log\sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x\Delta_k^2(y)\,dy}/\log x.$$

Доказано, что $\alpha_k\leqslant(k-1)/(k+2)$ $(k\geqslant 4)$ (Hardy G. H., Littlewood I. E., Proc. London Math. Soc.,

1922, **21**, № 2, 39—74) и $\beta_4 \leqslant {}^3/_7$ (Titchmarsh E. C., Quart. J. Math., 1938, **9**, 216—220):

В статье доказывается, что при

$$k = 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \ldots,$$
$$\alpha_k \leqslant \frac{1}{2} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{71}{107} \quad \frac{21}{59} \quad \frac{31}{43} \quad \frac{26}{35} \quad \frac{19}{25} \ldots$$
$$\beta_k \leqslant \frac{23}{54} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{35}{62} \quad \frac{11}{18} \quad \frac{149}{230} \ldots$$

(первые три результата для α_k принадлежат Харди и Литлвуду). Из резюме автора.

1938. Аналог теоремы А. Н. Колмогорова о марковских процессах в теории простых чисел. К у б и л ю с И. П., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 3, 361—363

Кратко намечено доказательство теоремы, иллюстрирующей глубокий параллелизм между свойствами простых чисел и независимых случайных величин. Теорема представляет аналог известной теоремы А. Н. Колмогорова о последовательных суммах независимых случайных величин и связанных с ними марковских процессах (Изв. АН СССР, сер. физ.-матем., 1931, № 7, 372; 1933, № 3, 363) и гласит: Пусть $f(p)$ — вещественная функция, определенная на множестве всех натуральных чисел и обладающая свойствами:

$$B_u^2 = \sum_{p \leqslant u} f^2(p)\, p^{-1} \to \infty;$$
$$\Lambda_u = \sup_{p \leqslant u} |f(p)| = o(B_u) \text{ при } u \to \infty;$$
$$f_p(m) = \sum_{p \setminus m, p \leqslant u} f(p); \quad A_u = \sum_{p \leqslant u} f(p)\, p^{-1};$$

$a(t)$ и $b(t)$, $t \in [0, 1]$ — две вещественные функции с непрерывными первыми производными, и под условием $a(t) < 0 < b(t)$. Тогда число натуральных $m \leqslant n$, удовлетворяющих системе неравенств

$$a\left(\frac{B_p}{B_n}\right) < \frac{f_p(m) - A_p}{B_n} < b\left(\frac{B_p}{B_n}\right) (p = 2, 3, 5, 7, \ldots; p \leqslant n),$$

а также число натуральных $m \leqslant n$, для которых

$$a(B_p / B_n) < [f_p(m) - f_p(m+1)] / \sqrt{2}\, B_n < b(B_p / B_n)$$

при $n \to \infty$, равно $nv(0, 0) + o(n)$, где $v(x, t)$ есть решение уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, которое при $t = 1$, $a(1) < x < b(1)$ принимает значение 1, а при $0 \leqslant t < 1$, $x = a(t)$ или $x = b(t)$ принимает значение 0.

Примечание референта. На стр. 361 пропущен номер уравнения: (3). Ю. В. Линник

1939. «Согласие» и дзета-функция Римана. Г а й н а н д (Concordance and the Riemann zeta-function. G u i n a n d A n d r e w P a u l), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 115—116 (англ.)

Краткое изложение соображений о связи между простыми числами и нулями ζ-функции, на основе теории преобразований Фурье. Ю. В. Л.

1940. Проблема замкнутости, связанная с гипотезой Римана о дзета-функции. Б е й р л и н г (A closure problem related to the Riemann zeta-function. B e u r l i n g A r n e), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 5, 312—314 (англ.)

Через C обозначается линейное многообразие функций

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \rho(\theta_\nu / x),\ 0 < \theta_\nu \leqslant 1,\ \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \theta_\nu = 0,$$

$\rho(\alpha)$ означает дробную часть числа α. Доказывается, что дзета-функция Римана не имеет нулей в полуполосе $\sigma > 1/p$, $\infty > p > 1$ тогда и только тогда, когда C плотно в пространстве $L^p(0, 1)$. А. Г. Постников

1941. Об одном новом представлении дзета-функции Римана. Р о м а н о в Н. П., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 212—213

Обобщается представление $\zeta(s + s_1)$, введенное А. Сельбергом, через интеграл

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \omega(x, y)\, (x - s - 1)\, (y - s_1)\, dx\, dy,$$

где $\omega(x, y) = \min[\{x\}(1 - \{y\}), \{y\}(1 - \{x\})]$, $\{z\}$ — дробная часть z. А. И. Виноградов

1942. Функциональное уравнение для ζ-функции в простой алгебре. Л е п т и н (Die Funktionalgleichung der Zeta-Funktion einer einfachen Algebra. L e p t i n H o r s t), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **19**, № 3/4, 198—220 (нем.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — простая алгебра ранга n над полем P рациональных чисел, $\mathfrak{o}$ — максимальный порядок в $\mathfrak{A}$; этой же буквой $\mathfrak{o}$ обозначим вектор, компоненты которого образуют базис $\mathfrak{o}$ над кольцом Γ целых рациональных чисел. $\mathfrak{A}_\infty = \mathfrak{A} \times P_\infty$ — кронекеровское прямое произведение $\mathfrak{A}$ и поля P_∞ действительных чисел, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ — базис $\mathfrak{A}_\infty$ над P_∞ Матрица H порядка n над полем P_∞ такова, что $\mathfrak{o} = H\varepsilon$, $d = \pm (\det H)^2$. Тогда известно, что $\mathfrak{A}_\infty$ равно прямой сумме колец матриц

$$\mathfrak{A}_\infty = \sum_{i=1}^{r} P_\infty^{(m_i)} + \sum_{i=1}^{r'} K_\infty^{(m_i')} + \sum_{i=1}^{r''} Q_\infty^{(m_i'')},$$

где соответственно $P_\infty^{(m_i)}$ — матрица порядка m_i над полем P_∞ действительных чисел, $K_\infty^{(m_i')}$ — матрица порядка m_i' над полем K_∞ комплексных чисел, $Q_\infty^{(m_i'')}$ — матрица порядка m_i'' над телом Q_∞ кватернионов. Суммирование распространяется на все системы натуральных (m_i, m_i', m_i'') таких, что

$$n = \sum_{i=1}^{r} m_i^2 + 2\sum_{i=1}^{r'} m_i'^2 + 4\sum_{i=1}^{r''} m_i''^2,$$

где r, r' и r'' определяются однозначно заданной алгеброй $\mathfrak{A}$.

Полагаем

$$\Gamma_{\mathfrak{A}}(s) = g^{\frac{1-s}{2}} \prod_{i=1}^{r} \prod_{k=0}^{m_i - 1} \Gamma\left(\frac{m_i s - k}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{m_i - k}{2}\right) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{r'} \prod_{k=0}^{m_i' - 1} \Gamma(m_i' s - k)\, \Gamma^{-1}(m_i' - k)$$
$$\prod_{i=1}^{r''} \prod_{k=0}^{m_i'' - 1} \times \Gamma(2(m_i'' s - k))\, \Gamma^{-1}(2(m_i'' - k)),$$

где

$$g = \pi^n \prod_{i=1}^{r} m_i^{m_i^2} \prod_{i=1}^{r'} (2m_i')^{2m_i'^2} \prod_{i=1}^{r''} (4m_i'')^{4m_i''^2};$$
$$\zeta_{\mathfrak{A}}(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N\mathfrak{a}^{-s},$$

где $\mathfrak{a}$ пробегает все правые идеалы кольца $\mathfrak{o}$. $N\mathfrak{a}$ — число классов вычетов кольца $\mathfrak{a}$ по модулю $\mathfrak{a}$. В работе доказывается, что функция $\zeta_{\mathfrak{A}}(s)$ удовлетворяет римановому уравнению

$$|d|^{s/2}\, \Gamma_{\mathfrak{A}}(s)\, \zeta_{\mathfrak{A}}(s) = |d|^{(1-s)/2}\, \Gamma_{\mathfrak{A}}(1 - s)\, \zeta_{\mathfrak{A}}(1 - s)$$

для всех $s \neq 1$. Н. Г. Чудаков

1943. О неправильности в распределении. Рот (On irregularities of distribution. Roth K. F.), Mathematika, 1954, **1**, № 2, 73—79 (англ.)

Ван Аарденн-Эренфест доказала (Van Aardenne-Ehrenfest T., Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1949, **A52**, 734 — 739) теорему: Пусть N — большое натуральное число и пусть $s_1, s_2, \ldots, s_N$ — произвольная последовательность вещественных чисел, лежащих на интервале $[0, 1)$, далее для $1 \leqslant n \leqslant N$ и $0 < \alpha < 1$, $D_n(\alpha)$ обозначает число $s_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$, таких, что $0 \leqslant s_\nu < \alpha$. Существуют n и α такие, что $|D_n(\alpha) - n\alpha| > c_1 \log\log N / \log\log\log N$ (c_1 — положительная абсолютная постоянная). В реферируемой работе доказывается следующая теорема, из которой в качестве следствия получается усиление этой оценки до $(\log N)^{1/2}$: Пусть $N > 1$ и пусть $P_1, P_2, \ldots, P_N$ — последовательность (не обязательно различных) точек в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, пусть через $S(x_0, y_0)$ обозначается число этих точек в прямоугольнике $0 \leqslant x < x_0$, $0 \leqslant y < y_0$, тогда $\int_0^1 \int_0^1 (S(x, y) - Nxy)^2\, dx\, dy > c \log N$, где c — положительная абсолютная константа. Строится пример последовательности точек $P_1, \ldots, P_N, \ldots$ такой, что для любого большого N, $|S(x, y) - Nxy| < c \log N$, т. е. пример, показывающий, в каких границах можно пытаться усиливать эти результаты. А. Г. Постников

1944. Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского. I, II, III. Линник Ю. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 2, 3—23; № 5, 3—32; № 8, 15—27

Автор переносит свои результаты об асимптотической равномерности распределения целых точек на сфере (РЖМат, 1955, 1611) на случай распределения целых точек на гиперболоиде $ac - b^2 = D$ при неограниченно возрастающем D и получает результаты о распределении приведенных положительных бинарных квадратичных форм.

Доказана (основная в статье) теорема 1: Пусть заданы некоторое нечетное простое число p и сколь угодно большая постоянная $K_1 \geqslant 1$; пусть D — целое положительное нечетное число, простое с p, с условием $(-D/p) = 1$. Рассмотрим область приведения

$$|2b| \leqslant a \leqslant c, \quad ac - b^2 = D$$

положительных бинарных квадратичных форм $(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ определителя $D = ac - b^2$; она является гиперболическим треугольником в трехмерном пространстве $\{a, b, c\}$. Пусть в четырехугольной части этого треугольника, отсекаемой плоскостью $c - K_1 a = 0$, задана выпуклая фигура Σ, ограниченная кусочно-гладкой кривой. Тогда имеет место следующее асимптотическое соотношение:

$$H\left(\sum\right) = \frac{9}{2\pi} h(-D)\, \Lambda\left(\sum\nolimits_0\right)(1 + \eta(p, K_1, D)), \qquad (1)$$

где $H(\Sigma)$ — количество целых точек (a, b, c), лежащих внутри области Σ; $h(-D)$ — количество приведенных целочисленных собственно примитивных (чисто коренных) положительных бинарных квадратичных форм определителя D; $\Lambda(\Sigma_0)$ — объем (по Жордану) той части конуса в пространстве $\{a, b, c\}$ с вершиной в точке $O = (0, 0, 0)$ и сечением Σ, которая лежит под единичным гиперболоидом $ac - b^2 = 1$ ($\Lambda(\Sigma_0)$ может быть истолкована как площадь Лобачевского центральной проекции Σ_0 области Σ на $ac - b^2 = 1$ с константой Лобачевского $k = \sqrt{2/3}$); $\eta(p, K_1, D) \to 0$ при $D \to \infty$ и фиксированных p и K_1. Иначе говоря, при указанных условиях число целых точек в данной области на гиперболоиде $ac - b^2 = D$ асимптотически пропорционально ее площади Лобачевского (точки — основные).

Из равенства (1) путем простых подсчетов может быть выведена теорема 2: Пусть $h(-D, \alpha\sqrt{D})$ — количество приведенных целочисленных собственно примитивных форм (a, b, c) с условием $a \leqslant \alpha\sqrt{D}$. Тогда

$$h(-D, \alpha\sqrt{D}) = \begin{cases} \dfrac{3\alpha}{\pi} h(-D)(1 + \eta(p, \alpha, D)), & \alpha \leqslant 1, \\ f(\alpha) h(-D)(1 + \eta(p, D)), & 1 \leqslant \alpha \leqslant \sqrt[4]{3}, \\ h(-D), & \alpha \geqslant \sqrt[4]{3}; \end{cases} \qquad (2)$$

здесь $\eta(p, \alpha, D) \to 0$, $\eta(p, D) \to 0$ при $D \to \infty$ и α, D фиксированных,

$$f(\alpha) = \frac{6}{\pi} \arcsin\sqrt{1 - 1/\alpha^2} + \frac{3\alpha}{\pi}(1 - 2\sqrt{1 - 1/\alpha^2}).$$

Часть теоремы 2 можно формулировать в терминах рядов Дирихле (теорема 2′): Рассмотрим характер $\chi(n) = (-D/n)$ и ряд Дирихле

$$\zeta(s) L(s, \chi) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad (s > 1).$$

Тогда для любого малого $\varepsilon > 0$

$$\sum\nolimits_{n \leqslant \varepsilon\sqrt{D}} a_n = \varepsilon\sqrt{D}\, L(1, \chi)(1 + \eta(p, \varepsilon, D)), \qquad (3)$$

где $\eta(p, \varepsilon, D) \to 0$ при $D \to \infty$ и фиксированных p и ε. Теорема 2′ равносильна теореме 2″:

$$\left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| < L(1, \chi) D^{1/6} \eta(p, t_0, D), \quad |t| \leqslant t_0, \qquad (4)$$

где $\eta(p, t_0, D) \to 0$ при $D \to \infty$ и фиксированных p и t_0.

Отмечается, что оценки (3) и (4) следуют из гипотезы Римана для $L(s, \chi)$, в то время как теорема 1 из гипотезы Римана непосредственно не выводится. Для доказательства теоремы 1 автор использует ранее созданный им метод (Изв. АН СССР, 1940, 4, 363—402), существенно видоизменяя его. Бинарной форме $(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ сопоставляется матрица

$$L = \begin{pmatrix} b & -a \\ c & -b \end{pmatrix}$$

с нулевым следом. В статье подробно развивается арифметика таких матриц.

Помимо формулированных теорем, ряд промежуточных результатов имеет самостоятельный интерес. Из них отметим два: 1) Лемма 12: Пусть $h_1(-D, p^k)$ — количество приведенных целочисленных собственно примитивных форм (a, b, c), $|2b| \leqslant a \leqslant c$ с условием $p^k \nmid a$; $p \geqslant 3$ — простое. Тогда

$$h_1(-D, p^k) \sim 2h(-D)/p^{k-1}(p + 1).$$

при $D \to \infty$ и фиксированных p и k. 2) Лемма 15: Пусть в пространстве унимодулярных матриц $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ задана область с кусочно-гладкой границей и с условием $\max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|\} \leqslant K$. Обозначим через $f(\Omega, N)$ количество целочисленных бинарных примитивных матриц Y определителя N с условием $\frac{1}{\sqrt{N}} Y \in \Omega$. Тогда при $N \to \infty$

$$f(\Omega, N) \sim \Psi(N)\, \mathrm{mes}(\Omega),$$

где $\mathrm{mes}(\Omega)$ — инвариантная мера на группе унимодулярных матриц,

$$\Psi(N)=\frac{6}{\pi^2}V_0(N),\ V_0(N)=\sum_{r^2\leqslant N}\mu(r)V_1(N/r^2),$$

$$V_1(N)=\sum_{n\leqslant N}N/n,$$

$$n\leqslant(\ln N)^{50}$$

Примечания референта. 1) В теореме 1 легко освободиться от предположения о том, что граница области Σ кусочно-гладкая, ибо сама область предполагается выпуклой.

2) Статья содержит много опечаток, в частности на стр. 5, 7, 10, 14, 18, 20, 22 (часть I); 3, 13, 14, 18, 27, 29 (часть II); 21, 25, 26 (часть III). А. В. Малышев

1945. Минимальные точки положительно определенной квадратичной формы. Давенпорт, Уотсон (The minimal points of a positive definite quadratic form. Davenport H., Watson G. L.), Mathematika, 1954, **1**, № 1, 14—17 (англ.)

Пусть $q(x_1,\ldots,x_n)$ — положительно определенная квадратичная форма с действительными коэффициентами. Рассматриваются последовательные минимумы формы

$$s_1\leqslant s_2\leqslant\ldots\leqslant s_n.$$

s_1 — наименьшее значение, принимаемое формой для целых $x_1,\ldots,x_n$, не равных нулю одновременно. Если s_1 достигается в точке $x^{(1)}=(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, то s_2 — наименьшее значение, принимаемое q в целых точках, не кратных $x^{(1)}$.

Пусть s_2 достигается в точке $x^{(2)}$, тогда s_3 — наименьшее значение, принимаемое q в целых точках линейно-независимых от $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ и т. д. Детерминант N, составленный из координат точек $x^{(1)}, x^{(2)},\ldots, x^{(n)}$, есть целое число $\neq 0$. Пусть $N(q)$ — наименьшее значение этого числа для всех возможных выборов n минимальных точек.

Доказывается теорема: Если n велико, то существует форма q от n переменных, для которой

$$N(q)>\pi^{-n/2}\Gamma(1+n/2).$$

Высказывается мнение, что теорема справедлива для всех n. Э. Е. Симакова

1946. Асимметричные минимумы квадратичных форм и асимметричное диофантово приближение. Торнхейм (Asymmetric minima of quadratic forms and asymmetric diophantin approximation. Tornheim Leonard), Duke Math. J., 1955, **22**, № 2, 287—294 (англ.)

Рассматривается неопределенная бинарная квадратичная форма

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2,$$

$\det f=b^2-4ac=1$, не имеющая рациональных корней.

Пусть P — множество всех положительных значений $f(x,y)$ для целых x, y; N — множество отрицательных значений. $1/p=\inf P$, $-1/n=\sup N$, $A=\max(p,kn)$, $B=A^2$. k — данное положительное целое число.

Одновременно с исследованием значений B рассматривается вопрос асимметричного приближения иррационального числа θ рациональным числом a/b. Пусть V — множество всех $a/b>\theta$, W — множество всех $a/b<\theta$. $|\theta-a/b|=1/(cb)^2$.

$$p'=\liminf\text{ всех }c\,c\,a/b\in V,$$
$$-n'=\limsup\text{ всех }c\,c\,a/b\in W,$$
$$A'=\max(p',kn'),\ B'=(A')^2.$$

Доказывается теорема: Наименьшее значение B и B' равно k^2+4k, следующее наименьшее значение есть точка сгущения и равно $B_2=A_2^2$, где

$$A_2=\frac{k^2+k+(3k-1)(k^3+4k)^{1/2}}{2(2k-1)},\quad k\geqslant 2.$$

Э. Е. Симакова

1947. Одновременное диофантово приближение. Давенпорт (Simultaneous diophantine approximation. Davenport H.), Mathematika, 1954, **1**, № 1, 51—72 (англ.)

Известно, что для любой пары вещественных чисел $\{\theta,\Phi\}$ система неравенств

$$|\theta-p/r|<r^{-3/2},\ |\Phi-q/r|<r^{-3/2}$$

имеет бесконечно много решений в целых $p, q, r>0$. Из одной работы Перрона (Perron O., Math. Ann., 1921, **83**, 77—84) следует существование такой пары иррациональных чисел $\{\theta,\Phi\}$, что для всех пар рациональных чисел $\{p/r, q/r\}$ и некоторой постоянной $c>0$

$$\text{или }|\theta-p/r|>cr^{-3/2},\ \text{или }|\Phi-q/r|>cr^{-3/2}.\quad(1)$$

Доказывается, что существует такая постоянная $c_1>0$ и множество, имеющее мощность континуума, пар иррациональных чисел $\{\theta,\Phi\}$ таких, что для всех пар рациональных чисел $\{p/r, q/r\}$ имеет место (1). В силу известного принципа переноса достаточно доказать существование постоянной $c_2>0$ и множества пар $\{\theta,\Phi\}$ мощности континуума таких, что для всех целых p, q, r, $p^2+q^2>0$,

$$(p^2+q^2)\,|\theta p+\Phi q+r|>c_2.$$

Автор показывает, что в качестве c_2 можно взять $1/200$. И. П. Кубилюс

1948. Об аппроксимации линейных форм. Обрешков (Върху апроксимацията на линейните форми. Обрешков Н.), Изв. на Матем. ин-т Българ. АН, 1954, **1**, № 2,35—46 (болг.; резюме русс., франц.)

Пусть $\omega_0, \omega_1,\ldots,\omega_k$ — произвольные реальные числа, $k\geqslant 1$ и n — произвольное натуральное число. Тогда существуют $k+1$ целых чисел $x_0, x_1,\ldots, x_k$, где $\Sigma_{i=0}^{k}|x_i|>0$, которые удовлетворяют неравенству

$$|\omega_0x_0+\omega_1x_1+\cdots+\omega_kx_k|\leqslant\frac{n}{(n+1)^{k+1}-1}\sum_{i=0}^{k}|\omega_i|,\quad(1)$$

$$|x_s|\leqslant n,\ s=0,1,\ldots,k.$$

Знак равенства в (1) имеет место только тогда, когда форма $\omega_0x_0+\omega_1x_1+\cdots+\omega_kx_k$ равна форме

$$\lambda[x_0\pm(n+1)x_1\pm(n+1)^2x_2\pm\ldots\pm(n+1)^kx_k],\ \lambda\neq 0,\quad(2)$$

или форме, получающейся из (2) перестановкой переменных. В. А. Голубев

1949. Теорема Минковского — Главка. Роджерс (The Minkowski—Hlawka theorem. Rogers C. A.), Mathematika, 1954, **1**, № 2, 111—124 (англ.)

Дано обобщение теоремы Минковского — Главка (Hlawka E., Math. Z., 1943, **49**, 285—312) на дискретные множества точек, не образующих решетки. Подобное обобщение основной теоремы Минковского было уже дано Блихфельдом (Blichfeldt H. F., Trans. Amer. Math. Soc., 1914, **15**, 227—235).

Пусть Λ — дискретное множество точек в n-мерном евклидовом пространстве, $\Sigma(r)$ — любой шар радиуса r; $\delta(\Sigma(r))$ — частное от деления числа точек множества

$\Lambda \cap \Sigma(r)$ на объем шара; определим верхнюю плотность множества Λ как

$$\delta_+(\Lambda) = \lim_{r\to\infty} \sup \sup_{\Sigma(r)} \delta\left(\sum(r)\right).$$

Пусть далее $\mathbf{u}$ — единичный вектор, C — конус с вершиной в начале, осью, направленной вдоль $\mathbf{u}$, и углом раствора 2θ; верхнюю и нижнюю плотности множества Λ в данном направлении $\mathbf{u}$ определим как

$$\delta_+(\mathbf{u}) = \lim_{\theta\to 0} \lim_{r\to\infty} \sup \sup_{\Sigma(r)\subset C} \delta\left(\sum(r)\right),$$

$$\delta_-(\mathbf{u}) = \lim_{\theta\to 0} \lim_{r\to\infty} \inf \inf_{\Sigma(r)\subset C} \delta\left(\sum(r)\right).$$

Если $\delta_+(\mathbf{u}) = \delta_-(\mathbf{u}) = \delta(\mathbf{u})$, то $\delta(\mathbf{u})$ назовем плотностью Λ в направлении $\mathbf{u}$.

Получена следующая теорема A: Пусть Λ — любое дискретное множество точек, не содержащее начала. Пусть S — множество точек с внешним жордановым объемом $V(S)$. Тогда, если $V(S)\,\delta_+(\Lambda) < 1$, то найдется линейное преобразование с вещественными коэффициентами и единичным определителем, преобразующее Λ в множество, не имеющее общих точек с S.

Фактически доказана более точная теорема 1: Пусть $\mathbf{u}$ — любой единичный вектор, и $\delta_+(\mathbf{u})$ и $\delta_+(-\mathbf{u})$ конечны. Пусть $\rho(\mathbf{x})$ — любая неотрицательная функция, интегрируемая по Риману по всему пространству (а потому ограниченная и равная нулю вне ограниченного множества). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется линейное преобразование α определителя 1, для которого

$$\sum_{x\in\Lambda} \rho(\alpha x) < \delta_+(\mathbf{u}) \int_{x_n\geqslant 0} \rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \delta_+(-\mathbf{u}) \int_{x_n<0} \rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \varepsilon. \qquad (1)$$

Из теоремы 1, помимо теоремы A, выводится также теорема 2: Пусть в некотором направлении $\mathbf{u}$ множество Λ (не содержащее начала) имеет плотность 1. Пусть точки Λ, лежащие на любом луче из начала, образуют одномерную решетку. Пусть S — симметричное относительно начала ограниченное лучевое тело с объемом, меньшим $2\zeta(n)$. Тогда имеется такое линейное преобразование α определителя 1, что ни одна точка $\alpha\Lambda$ не лежит в S.

В конце статьи обсуждается вопрос о возможных обобщениях полученных результатов, в частности о замене в неравенстве (1) суммы слева на интеграл Стилтьеса. А. В. Малышев

1950. Об элементарном доказательстве теоремы Дирихле. Гельфонд А. О., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 203

С помощью элементарных средств доказывается соотношение

$$\varepsilon(\chi_0) = 1,$$

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(n)\,\Lambda(n)/n = \varepsilon(\chi)\ln x + o(1),$$

$$\varepsilon(\chi) = 0,\ \chi \neq \chi_0,$$

откуда и следует теорема Дирихле. А. И. Виноградов

1951. Элементарные доказательства некоторых предельных теорем теории чисел. Романов Н. П., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 54, 23—27

Вводятся операторы

$$\zeta f(x) = \sum_{n\leqslant x} f(x/n) \text{ и } \zeta^{-1} f(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu(n)\, f(x/n).$$

С их помощью получены некоторые известные асимптотические формулы теории чисел и их обобщения.

Примечание референта. На стр. 25 есть неточность: $\Lambda_k(n) = \sum_{d/n} \mu(d) \ln^k(n/d)$ $(k>1)$ отлично от нуля тогда, когда число различных простых делителей n не превосходит k, а не просто делителей. А. И. Виноградов

1952. Доказательство последней теоремы Ферма для всех четных показателей. Беккер (Proof of F. L. T. for all even powers. Becker H. W.), Math. Mag., 1955, **28**, № 5, 297—298 (англ.)

Заглавие работы не соответствует ее содержанию. П. Н. Реморов

1953. О последней теореме Ферма. Стоун (On Fermat's last theorem. Stone D. E.), Math. Mag., 1955, **28**, № 5, 295—296 (англ.)

Если n — простое > 2, $(a, b, c) = 1$, $n \mid a$, $a^n + b^n + c^n = 0$, то

$$b^n + (Bn^{nq-1} - b)^n + (An^q - Bn^{nq-1})^n = 0,$$

где $(AB, n) = 1$, $q > 1$.

Примечание референта. Полученные автором результаты известны. П. Н. Реморов

1954. Исследования о разбиении чисел на слагаемые. I, II, III. Паньи (Studio sulle partizioni numeriche. I. II, III. Pagni P.), Period. mat., 1954, **32**, № 3, 172—183; № 4, 199—211; № 5, 294—301 (итал.)

В ч. I рассматривается вопрос о числе разбиений данного натурального числа n на k неотрицательных слагаемых. Автор насчитывает восемь аспектов этой задачи, соответственно решению, принимаемому в каждой из последующих трех альтернатив: 1) считать ли одинаковыми или различными два разбиения, отличающихся друг от друга только порядком слагаемых; 2) допускать ли нуль в качестве слагаемого; 3) требовать ли, чтобы все слагаемые были различны между собою или допускать и одинаковые слагаемые. Во всех восьми случаях для числа соответствующих разбиений выводятся рекуррентные формулы. Автор подчеркивает, что все выводы проводятся элементарно, на базе интуитивно ясных комбинаторных соображений, без привлечения какого-либо аналитического аппарата (например, производящих функций).

Ч. II содержит примерные таблицы для различных типов разбиений, построенные на основе рекуррентных формул, выведенных в ч. I. В одном направлении откладывается подлежащее разбиению число n, в другом — число слагаемых k. В заключение автор останавливается на взаимной связи между некоторыми из рассмотренных восьми задач.

Ч. III посвящена изучению числа разбиений целого числа на не более чем k целых положительных слагаемых с повторениями. Отыскание удобного для вычислений выражения такого числа $P_{n,k}$ неоднократно привлекало к себе усилия крупных ученых, в особенности в середине прошлого столетия (Гершель, Сильвестер, Кейли). После детального исторического очерка автор, исходя из полученных им рекуррентных формул, приходит к выводам, позволяющим, по его мнению, несложно вычислять $P_{n,k}$ при сравнительно небольших значениях аргументов и облегчающих составление таблиц этих величин. А. Я. Хинчин

1955. Об одной рекуррентной формуле в теории разбиений. Остман (Über eine Rekursionsformel in der Theorie der Partitionen. Ostmann Hans-Heinrich), Math. Nachr., 1955, **13**, № 3—4, 157—160 (нем.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное (конечное или бесконечное) множество положительных целых чисел; $p(n, \mathfrak{A})$ — число всех представлений n (n — целое $\geqslant 0$) в виде

$$n = \sum_{i=1}^{s} a_i \quad (a_i \in \mathfrak{A};\ s = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

где не принимается во внимание последовательность

слагаемых; $p_v(n, \mathfrak{A})$ — число всех представлений n в виде (1) с попарно различными слагаемыми из $\mathfrak{A}$.

Доказываются рекуррентные формулы

$$p(n, \mathfrak{A}) = n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \sigma(\nu, \mathfrak{A})\, p(n-\nu, \mathfrak{A}) \qquad (2)$$

$$(n>0,\ \sigma(\nu, \mathfrak{A}) = \sum_{d \mid \nu,\ d \in \mathfrak{A}} d),$$

$$p_v(n, \mathfrak{A}) = n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \sigma^*(\nu, \mathfrak{A})\, p_v(n-\nu, \mathfrak{A}) \qquad (3)$$

$$(n>0,\ \sigma^*(\nu, \mathfrak{A}) = \sum_{\substack{d \mid \nu \\ d \in \mathfrak{A} \\ \nu/d \equiv 1 (2)}} d - \sum_{\substack{d \mid \nu \\ d \in \mathfrak{A} \\ \nu/d \equiv 0 (2)}} d).$$

Формула (2), в частном случае, когда $\mathfrak{A}$ представляет множество всех натуральных чисел, доказана Валеном (Vahlen Th., J. reine angew. Math., 1893, **112**, 1—36). В этом же частном случае формула (3), а также обе формулы, когда $\mathfrak{A}$ представляет множество всех k-х степеней натуральных чисел, доказаны Фордом (Ford W. B., Amer. Math. Monthly, 1931, **38**, 183—184). Доказательства формул (2) и (3) проводятся по образцу доказательства Форда. Далее, рекуррентные формулы (2) и (3) доказываются для еще более общих аддитивных функций, чем $p(n, \mathfrak{A})$ и $p_v(n, \mathfrak{A})$. Г. А. Ломадзе

1956. Некоторые классы целозначных функций. Брёйн (Some classes of integer-valued functions. Bruijn N. G.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 3, 363—367; Indagationes math., 1955, **17**, № 3, 363—367 (англ.)

Будем называть целозначную функцию $f(x)$, определенную для неотрицательных целых x, универсальной, если для всех x и для всех m ($x = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$)

$$f(x+m) - f(x) \equiv 0 \pmod m, \qquad (1)$$

и модулярной, если (1) выполняется для всех целых x. Нетрудно видеть, что всякая модулярная функция универсальна. Если универсальная функция многочлен, то она модулярна. В статье строится пример универсальной функции, которая непродолжаема в модулярную. Функцию нескольких переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть универсальной, если она определена для всех неотрицательных целых $x_1, \ldots, x_n$ и если для каждого целого $m \geqslant 1$ из

$$x_1' \equiv x_1 \pmod m, \ \ldots, \ x_n' \equiv x_n \pmod m \ (x_i \geqslant 0,\ x_i' \geqslant 0)$$

следует

$$f(x_1', \ldots, x_n') \equiv f(x_1, \ldots, x_n) \pmod m.$$

Обозначим через s_k наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, k$. Доказываются теоремы:

1. $f(x)$ универсальна тогда и только тогда, если она представима в виде

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s_k c_k \binom{x}{k}, \qquad (2)$$

где все c_k — целые. Универсальная функция в виде (2) представляется однозначно. Универсальная функция $f(x)$ является многочленом степени $\leqslant n$ тогда и только тогда, если $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$.

2. $f(x)$ модулярна тогда и только тогда, если она представима в виде

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s_k c_k \binom{x + [k/2]}{k}, \qquad (3)$$

где все c_k — целые. При этом модулярная функция в виде (3) представляется однозначно.

3. $f(x_1, \ldots, x_n)$ универсальна тогда и только тогда, если она представима в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} b(k_1, \ldots, k_n) \binom{x_1}{k_1} \ldots \binom{x_n}{k_n},$$

где каждое $b(k_1, \ldots, k_n)$ кратно s_t и $t = \max(k_1, \ldots, k_n)$. Указывается, что сходный результат имеет место для модулярных функций от нескольких переменных.

Замечена опечатка: на стр. 367 (8-я строка снизу) вместо «be modular» следует читать «be universal».

В. И. Нечаев

1957. О некоторых свойствах функций $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$. Шинцель, Серпинский (Sur quelques propriétés des fonctions $\varphi(n)$ et $\sigma(n)$. Schinzel A., Sierpinski W.), Bull Acad. polon. sci. Cl. III, 1954, 2, № 10, 463—466 (франц.)

О некоторых свойствах функций $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$. Шинцель А., Серпинский В., Бюл. Польск. АН. Отд. 3, 1954, 2, № 10, 467—470

Авторы доказывают элементарным способом (не опираясь на теорему Лежён-Дирихле о существовании бесконечного множества простых чисел в арифметической прогрессии) следующие теоремы о теоретико-числовых функциях:

Для всякого натурального числа m существует натуральное число $n>1$ такое, что $f(n-1)/f(n) > m$ и $f(n+1)/f(n) > m$; также существует натуральное число $p>1$ такое, что $f(p)/f(p-1) > m$ и $f(p)/f(p+1) > m$, где $f(n)$ означает число чисел, взаимно простых с n и $\leqslant n$, или сумму всех делителей натуральных чисел n. K. Zarankiewicz

1958. Некоторые теоремы о функциях $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$. Шинцель (Quelques théorèmes sur les fonctions $\varphi(n)$ et $\sigma(n)$. Schinzel A.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. III, 1954, **2**, № 10, 467—469 (франц.)

Некоторые теоремы о функциях $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$. Шинцель А., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 10, 471—473.

Обобщаются теоремы, доказанные ранее Серпинским и автором (реф. 1957)

Если даны натуральные числа m и k, то существует натуральное число n такое, что $f(n+i)/f(n+i-1) > m$ для $i = 1, 2, 3, \ldots, k$; также существует натуральное число p, такое, что $f(p+i)/f(p+i+1) > m$ для $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, где $f(n)$ означает число чисел, взаимно простых с n и не превышающих n, или же $f(n)$ означает сумму всех целых делителей числа n.

Автор замечает, что остается открытым вопрос о том, справедливы ли аналогичные теоремы, если $f(n)$ означает число делителей числа n. K. Zarankiewicz

1959. О числе решений некоторых уравнений в конечном поле. Карлиц (The number of solutions of some equations in a finite field. Carlitz L.), Portugaliae math., 1954, **13**, № 1—2, 25—31 (англ.)

Определяется число N решений уравнений

$$(x+y+z-b)^2 = 2axyz \quad (a \neq 0), \qquad (1)$$

$$(x+y+z+t-b)^2 = 2axyzt \quad (a \neq 0), \qquad (2)$$

$$\text{и } t^2 = 2(txy + txz + tyz + xyz) \qquad (3)$$

в конечном поле $GF(q)$, где $q = p^n$, $p > 2$ — простое число, а a и b — некоторые фиксированные числа этого поля. Так, например, для уравнения (1) получается $N = q^2 + 1 + q\Psi(ab(ab-2))$, где при $x \in GF(q)$ $\Psi(x) = 1$ или -1 в зависимости от того, является ли x полным квадратом или нет, и $\Psi(x) = 0$ при $x = 0$. В частности, при $b = 0$, а также при $ab = 2$ имеем

$N = q^2 + 1$. Очень простой вид имеет число решений уравнения (2) в случае $q \equiv 3 \pmod 4$, именно: $N = q^3 + q - 1$. Число решений уравнения (3) дается формулой $N = q^3 + 2q^2 - 3q$. Э. Апарисио

1960. О многократно совершенных числах. Канольд (Über mehrfach vollkommene Zahlen. Kanold Hans-Joachim), J. reine und angew. Math., 1955, **194**, № 1—4, 218—220 (нем.)

Назовем «многократно совершенным» натуральное число n, удовлетворяющее равенству $\sigma(n) = sn$, где $s > 1$ — целое, а $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n. Доказываются:

Теорема 1. Пусть $n > 6$ — совершенное или многократно совершенное число. Тогда наибольший квадратичный делитель n $Q^2(n) \geqslant (p+1)/2$, $p > \alpha + 1$, простое. Если $\alpha \not\equiv 3 \pmod 4$, то $p \geqslant 2\alpha + 3$, за исключением случаев $n = 672$ и $n = 30\,240$.

Теорема 2. Для множества N всех совершенных и многократно совершенных чисел «натуральная плотность» $D^*(N) = 0$

$$D^*(N) = \lim_{x \to \infty} A(x)/x$$

$A(x)$ — количество элементов $n \in N$ таких, что $n \leqslant x$). Е. П. Ожигова

1961. Алгоритм деления с парами чисел. Дрейм (A division algorithm with number pairs. Draim N. A.), Math. Mag., 1955, **28**, № 4, 221—228 (англ.)

Предлагается один прием для быстрого разложения в непрерывную дробь квадратичной иррациональности f, удовлетворяющей уравнению $(P+f)(Q+f) = N$, где P, Q и N — натуральные числа. В. Б. Демьянов

1962. Предположение относительно делителей $2^p \pm 1$. Вильсон (Conjectures as to a factor of $2^p \pm 1$. Wilson Neil Y.), Edinburgh Math. Notes, 1954, № 39, 6—9 (англ.)

Приводятся без доказательств 7 теорем о делимости $2^p \pm 1$ на простые числа вида: $3p+1$, $4p+1$, $5p+1$, $6p+1$, $8p+1$, $12p+1$ и $24p+1$. Упомянутые простые числа могут быть соответственно представлены некоторыми квадратичными формами, которые получены при помощи таблиц. По словам автора, на основании таблиц установлено, что если простое число не представляется определенной формой, то оно не может быть делителем $2^p \pm 1$. П. Н. Реморов

1963. Простейшие симметрические функции первообразных корней n-й степени из единицы. Гальярдо (Le funzioni simmetriche semplici delle radici n-esime primitive dell unità. Gagliardo Emilio), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 269—273 (итал.)

Для суммы $S_k(n)$ k-х степеней всех первообразных корней n-й степени из единицы устанавливается следующая формула

$$S_k(n) = \mu\left(\frac{n}{(n,k)}\right) \varphi(n) / \varphi\left(\frac{n}{(n,k)}\right).$$

Г. Б. Гуревич

1964. Суммы степеней чисел, имеющих заданный период по mod m. Максфилд, Максфилд (Sums of powers of numbers having a given period modulo m. Maxfield John, Maxfield Margaret), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 5, 349—353 (англ.)

По определению, число a имеет период e по $\bmod m$, если $a^n \equiv a \pmod m$ тогда и только тогда, когда $n \equiv 1 \pmod e$. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — максимальный набор попарно несравнимых по $\bmod m$ чисел, имеющих один и тот же период e по $\bmod m$. В работе дается явное выражение для значения по $\bmod m$ суммы $\sum_{i=1}^k a_i^n$ при всех натуральных n. Если $m = p^s$, где p — простое нечетное, и $e = p^r e'$, где $0 \leqslant r < s$, $e' \mid (p-1)$, то $\sum_{i=1}^k a_i^n \equiv \varphi(e')\,\varphi^{-1}(e'/(n,e'))\,\varphi(p^r)\,\mu(e'/(n,e')) \pmod{p^s}$ (здесь φ и μ — соответственно функции Эйлера и Мёбиуса). Если $m = 2^s$, $e = 2^r$, то при $s > 2$, $r > 1$ $\sum_{i=1}^k a_i^n \equiv 2^r \pmod{2^s}$, когда n нечетно, и $\equiv 0 \pmod{2^s}$, когда n четно; при $r = 1$ $\sum_{i=1}^k a_i^n \equiv -1 \pmod{2^s}$, когда n нечетно, $\equiv 1 \pmod{2^s}$, когда n четно и $s = 2$, и $\equiv 3 \pmod{2^s}$, когда n четно и $s > 2$. Значение $\sum_{i=1}^k a_i^n$ по $\bmod m$ для модуля, содержащего различные простые сомножители, выражается через уже полученные значения аналогичных сумм по модулям, равным степеням простых чисел. В. Б. Демьянов

1965. О целых неотрицательных решениях уравнения $rx + sy = m$. Ривье (Sur les solutions entières et non négatives de l'équation $rx + sy = m$. Rivier William), Bull. sci. math., 1954, **78**, juillet—août, 147—155 (франц.)

Продолжение предыдущей работы автора (РЖМат, 1954, 2854). Пусть $N(a, b)$ — число целых чисел, принадлежащих интервалу (a, b). Устанавливается, что $[l] \leqslant N(a,b) \leqslant [l] + 1$, т. е.

$$N(a,b) = [l] + [1 + l - [l] - (b - [b])], \qquad (1)$$

где l — длина интервала (a, b), $[x]$ — целая часть x. Соотношение (1) позволяет найти выражение для числа $\omega(m)$ решений уравнения $rx + sy = m$ в целых неотрицательных числах x и y, где r и s — положительные взаимно простые целые числа, m — неотрицательное целое число. Именно, выводятся симметричные относительно r и s формулы

$$\begin{aligned} \omega(m) &= \left[\frac{m}{rs}\right] + \left[1 + R\left(\frac{m}{rs}\right) - R\left(\frac{mr^{\varphi(s)-1}}{s}\right)\right], \\ \omega(m) &= \left[\frac{m}{rs}\right] + \left[1 + R\left(\frac{m}{rs}\right) - R\left(\frac{ms^{\varphi(r)-1}}{r}\right)\right], \end{aligned} \qquad (2)$$

где $R(x) = x - [x]$, $\varphi(s)$ — функция Эйлера. Доказывается, что если m_1 и m_2 — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $m_1 + m_2 = krs - r - s$ (k — произвольное целое > 0), то

$$\omega(m_1) + \omega(m_2) = k. \qquad (3)$$

Будем называть особыми числа m, для которых $\omega(m) = 0$. Из предыдущих рассмотрений получается, что если особое число представлено как сумма целых положительных слагаемых, то по крайней мере одно слагаемое — особое, и что все делители особого числа — особые. Из (1), (2), (3) выводятся сумматорные формулы

$$\sum_{m=(h-1)\,rs}^{hrs-1} \omega(m) = hrs - (r-1)(s-1)/2,$$

$$\sum_{m=0}^{krs-1} \omega(m) = [k^2 rs + k(r+s-1)]/2,$$

где k — целое > 0, h — произвольное целое > 0.

В заключение определяются вероятности того, что целое число $m = rx + sy$ попадает в некоторые определенные интервалы. Б. М. Уразбаев

1966. Линейные неопределенные уравнения. Марек (Lineární neurčité rovnice. Marek Jiří), Mat.-přírodověd. rozhl., 1955, **34**, № 3, 125—127 (чеш.)

Подробное описание элементарного решения уравнения $ax + by = c$ в целых числах путем «снижения» коэффициентов a и b, данного еще Эйлером. В. А. Голубев

1967. Проблемы делимости в теории чисел. Вандивер (Divisibility problems in number theory. Van-

d i v e r H. S.), Scripta math., 1955, **21**, № 1, 15—19 (англ.)

Отмечается важность некоторых проблем мультипликативной теории чисел, как, например, вопросов о делимости частного Вильсона

$$W(p) = [(p-1)! + 1]/p$$ и частного Ферма $$q(a, p) = (a^{p-1} - 1)/p$$

во многих вопросах теории чисел, в частности в проблеме Ферма. Г. В. Емельянов

1968. «Магический» относительно сложения и умножения квадрат восьмого порядка. Хорнер (Addition-multiplication magic square of order 8. H o r n e r W a l t e r W.), Scripta Math., 1955, **21**, № 1, 23—27 (англ.)

Рассматривается задача — выбрать 64 неповторяющихся целых числа и расположить их в форме квадрата так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце были одинаковыми суммы чисел, а также их произведения. Разработан способ подбора чисел и обоснован прием составления требуемого магического квадрата. Для получения искомого квадрата употребляется эйлеров магический квадрат. Б. А. Кордемский

1969. Письмо в редакцию. Кошляков Н. С., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, № 3, 271

Указаны некоторые ошибки, допущенные автором в его работах. Более полный список этих ошибок см. РЖМат, 1955, 3586. Н. Г. Чудаков

1970. Поправка к статье: «Одно предложение о множестве простых чисел». Хорнфек (Berichtigung zur Arbeit «Ein in Satz über die Primzahlmenge». H o r n f e c k B e r n h a r d), Math. Z., 1955, **62**, № 4, 502 (нем.)

К РЖМат, 1955, 3604.

1971 К. Оценка для возможных решений уравнения в проблеме Ферма. Инкери (Abschätzungen für eventuelle Lösungen der Gleichung im Fermatschen Problem. I n k e r i K.), Turun yliopiston julkaisuja, 1953, **A16**, № 1, 9 (нем.)

Пусть l — нечетное простое число; x, y, z — целые рациональные числа, удовлетворяющие условиям:

$$x^l + y^l + z^l = 0, \quad (x, y, z) = 1,$$
$$0 < x < y < z.$$

Обобщаются результаты (РЖМат, 1954, 2513; 1955, 2102) в оценке чисел x, y, z:

1) Если $(xyz, l) = 1$, то

$$z > y > x > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2l}{\log 2}}\left(\frac{2l^3 + l}{\log(2l/\log 2)}\right)^l > \left(\frac{2l^3 + l}{\log(3l)}\right)^l.$$

2) Если $(xyz, l) \neq 1$, то

$$x > l^{3l-4}, \qquad z > \frac{1}{2}\, l^{3l-1}.$$

П. Н. Реморов

См. также: 2081, 2151

АЛГЕБРА

1972 К. Алгебра. Том 1. Эквивалентость, операции, группы, кольца, поля. Дюбрей (Algèbre. Tome 1. Equivalences, opérations, groupes, anneaux, corps, éd. D u b r e i l P a u l, Paris, Gauthier — Villars, 1954, 468 p., ill., 3 900 fr.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 1,6 (франц.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1973. О теореме Шура относительно корней одного класса алгебраических уравнений. Дингхас (Sur un théorème de Schur concernant les racines d'une classe des équations algébriques. D i n g h a s A l e x a n d r e), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1952, 25, № 5, 17—20 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Намечается ход доказательства следующей теоремы: Пусть S — множество всех многочленов с целыми коэффициентами, старший коэффициент которых равен единице и все корни $x_1, \ldots, x_n$ положительны, различны и просты. Существует число $r_0 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ и для любого $r > r_0$ существует такое положительное $\gamma_0 = \gamma_0(r)$, что для каждого положительного $\gamma < \gamma_0$ множество S содержит лишь конечное число $N = N(\gamma)$ уравнений, у которых $x_1^r + \ldots + x_n^r \leqslant \gamma n$.

Частный случай теоремы с $r = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{e}$ был доказан Шуром (Schur I., Math. Z., 1918, **1**, 377—402). Для постоянной $\gamma_0(1)$, которая не превосходит двух, Зигель (Siegel C. L., Amer. J. Math., 1945, **46**, 302—312) дал оценку 1,7336.... Э. К. Фогелс

1974. Математический спектр корней алгебраического уравнения. Орлов (Mathematisches Spektrum der Wurzeln einer Algebraischen Gleichung. O r l o f f C o n s t a n t i n), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 47 (нем.)

Определяется спектр алгебраического уравнения с целыми коэффициентами в смысле М. Петровича, т. е. указывается число, лежащее между 0 и 1, с помощью которого могут быть найдены с любой степенью точности значения действительных корней данного уравнения. Л. Я. Окунев

1975. Теоремы включения для собственных значений. Виландт (Inclusion theorems for eigenvalues. W i e l a n d t H.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. ser., 1953, № 29, 75—78 (англ.)

Квадратная матрица A называется нормализуемой, если число ее собственных векторов равно ее порядку. В этом случае существует такая неособенная матрица U и такая диагональная матрица D, что $A = U^{-1}DU$. Углом нормальности нормализуемой матрицы A называется величина

$$\nu_A = \sup_U \inf_{x,\,y} \arccos \frac{|(Ux, Uy)|}{\|Ux\|\,\|Uy\|} \quad (A = U^{-1}DU;\ (x, y) = 0).$$

Ставится задача: какова должна быть совокупность комплексных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (среди них могут быть равные), чтобы существовала нормализуемая матрица A (порядка n), спектр которой совпадает с указанной совокупностью и для которой $\nu_A \geqslant \nu$, $Ax = y$, где ν — заданное число, а x, y — данные векторы. Если такая матрица A существует, то совокупность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называется ν-совместимым спектром. Множество M называется включающим множеством, если оно содержит хотя бы одну точку каждого ν-совместимого спектра.

Для решения задачи строится сфера S с центром в точке $\mu = (x, y)$ комплексной плоскости радиуса $r =$

$= (\|y\|^2 - |\mu|^2)^{1/2}$. Через $\rho(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ обозначается сферический радиус наименьшего сферического сегмента сферы S, содержащего стереографическую проекцию совокупности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на S. Без доказательства формулируется основная теорема: Для того чтобы совокупность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ была ν-совместимым спектром, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \geqslant \nu$. Отсюда немедленно вытекает, что множество M на комплексной плоскости тогда и только тогда является включающим, когда его стереографическая проекция на S содержит сегмент сферического радиуса $\pi - \nu$.

Указываются возможные пути обобщения задачи.

Г. П. Акилов

1976. Автоморфизмы квадратичных форм. Джонс, Марш (Automorphs of quadratic forms. Jones Burton W., Marsh Donald), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 179—193 (англ.)

Пусть A — неособенная симметрическая матрица порядка n над полем F, характеристика которого отлична от двух. Изучаются автоморфизмы T матрицы A, т. е. матрицы T, удовлетворяющие условию $T'AT = A$. Вводится матрица $L = T - T^{-1}$, которая представима в виде $L = RA/d$, где R — кососимметрическая матрица, а d — определитель матрицы A, и доказывается (теорема 3), что автоморфизм T тогда и только тогда представим в виде многочлена от L с коэффициентами из поля F, когда:

1) ни i, ни $-i$ не являются кратными корнями минимального многочлена $\varphi(x)$ матрицы T (где $i = \sqrt{-1}$ в поле F);

2) для любой пары корней a_i, a_j многочлена $\varphi(x)$ справедливо неравенство $a_i \neq -a_j^{-1}$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующую теорему о многочленах (теорема 2): Пусть даны многочлен

$$f(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_m)^{\alpha_m},$$

где a_i — все его различные корни, и многочлен $z = h(x)$; оба с коэффициентами из поля F. Тогда и только тогда существует такой многочлен $g(z)$ с коэффициентами из F, что многочлен $G(x) = g(z) - x$ делится на $f(x)$, когда из равенства $h(a_i) = h(a_j)$ следует $i = j$ и $h'(a_i) \neq 0$ для каждого корня a_i, кратность которого $\alpha_i > 1$.

Предполагая далее, что порядок n матрицы A нечетен ($n = 2m + 1$) и определитель матрицы T равен 1, автор строит такие многочлены $h_1(x)$ и $h_2(x)$ с коэффициентами из поля F соответственно степени m и $m - 1$ (причем многочлен $h_1(x)$ имеет ту же четность, что и m, а многочлен $h_2(x)$ ту же четность, что и $m - 1$), что справедливо равенство

$$[h_1(L) + h_2(L)]\, T = \pm [h_1(L) - h_2(L)]; \qquad (1)$$

знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, четно или нечетно m. Равенство (1) разрешимо относительно T тогда и только тогда, когда матрица T представима в виде многочлена от L (теорема 4).

Обратно, если $L = RA/d$, где R — произвольная кососимметрическая матрица, и если произвольно выбраны многочлены $h_1(x)$ и $h_2(x)$, удовлетворяющие лишь указанным выше условиям, то при разрешимости относительно T равенства (1), получающаяся матрица T будет автоморфизмом матрицы A, причем $L = T - T^{-1}$ тогда и только тогда, когда L удовлетворяет уравнению

$$-zh_1^2(z) \mp 4h_1(z)h_2(z) + zh_2^2(z) = 0.$$

Аналогичные результаты приводятся для случая, когда матрица A четного порядка и определитель матрицы T равен 1.

Затем рассматриваются автоморфизмы T матрицы A, удовлетворяющие условию $T^2 = I$ (в этом случае $L = 0$), и доказывается следующая теорема, обобщающая результат Соминского (Матем. сб., 1948, **65**, 279—296). Если T — такой автоморфизм неособенной симметрической матрицы A, что матрицы $T - I$ и $T + I$ особенные и сумма их рангов не больше, чем порядок n матрицы A, то $T^2 = I$, и если r — ранг матрицы $T - I$, то существует такая $n \times r$-матрица U ранга r, что матрица $U'AU$ неособенная и $T = I - 2U(U'AU)^{-1}U'A$. Обратное утверждение также справедливо.

Далее приводятся необходимые и достаточные условия, при которых симметрическая матрица A с элементами из поля рациональных чисел обладает автоморфизмом T, удовлетворяющим условию $T^2 = I$ и отличным от I и $-I$; указывается также условие при котором элементами матрицы T будут целые числа. В заключение детально рассматриваются автоморфизмы симметрической матрицы A, порядок которой $n = 3$.

Примечание референта. При доказательстве теоремы 2 автор использовал теорему о примитивном элементе. Поэтому эта теорема, а также опирающиеся на нее теоремы 3 и 4 справедливы, вообще говоря, лишь в случае, когда поле F совершенно. Е. Г. Шульгейфер

1977. Уточнение и исправление некоторых исследований в теории бесконечных матриц. Керубино (Precisazione e rettifica di alcune osservazioni sulla teoria delle matrici infinite. Cherubino Salvatore), Ann. Scoula norm. super. Pisa, 1953, **7**, № 3—4, 217—218 (итал.)

Поправки к работам автора в Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1949, **4**, № 1, 133—159; 1952, **6**, 292—315 (РЖМат, 1955, 2113). Л. М. Глускин

1978. О первой основной теореме теории инвариантов. Мостов (On the first main theorem of the theory of invariants. Mostow G. D.), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Villavicencio — Mendoza, julio 1954. Montevideo, Centro coop. cient., UNESCO América Latina, 1954, 35 (англ.)

Утверждается, что все тензорные представления вполне приводимой группы матриц над полем характеристики нуль вполне приводимы. Это дает возможность распространить первую основную теорему теории инвариантов на вполне приводимые группы матриц. Доказательство будет опубликовано в Amer. J. Math.

Ф. И. Карпелевич

1979. Симплектические модулярные дополнения. Рейнер (Symplectic modular complements. Reiner Irving), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 3, 498—505 (англ.)

Пусть A и B — целочисленные матрицы с j строками и n столбцами ($j \leqslant n$), C и D — целочисленные матрицы с k строками и n столбцами ($k \leqslant n$). Для того чтобы матрица $\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix}$ могла быть дополнена до целочисленной симплектической матрицы с помощью добавления $n - j$ строк после первых j строк и $n - k$ строк после остальных k строк, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) матрица $\mathfrak{X}$ примитивна, т. е. наибольший общий делитель всех ее миноров порядка $j + j$ равен единице; 2) матрицы AB' и CD' симметричны (штрих означает транспонирование); 3) матрица $AD' - BC'$ имеет либо вид $(I^j 0)$, либо вид $\begin{pmatrix} I^k \\ 0 \end{pmatrix}$, где I^j и I^k — единичные матрицы порядков j и k соответственно.

Частный случай этого предложения ($j=n$, $k=0$) установлен ранее Зигелем (Siegel L. C., Ann. Math., 1935, 36, 527—606). Дается способ получения всех целочисленных симплектических дополнений матрицы $\mathfrak{X}$, если известно хотя бы одно такое дополнение.

В. М. Глушков

1980. Одна полезная теорема теории матриц. Рой (A useful theorem in matrix theory. Roy S. N.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 635—638 (англ.)

Пусть A и B — квадратные матрицы порядка p с действительными или комплексными элементами. Если хотя бы одна из этих матриц невырождена, то для характеристических чисел $c(AB)$ матрицы AB имеют место неравенства

$$c_{\min}(AA^*)\,c_{\min}(BB^*)\leqslant c(AB)\,\overline{c}(AB)\leqslant \leqslant c_{\max}(AA^*)\,c_{\max}(BB^*), \qquad (1)$$

где $c(AB)$ и $\overline{c}(AB)$ — комплексно-сопряженные, а $c_{\min}$ и $c_{\max}$ — соответственно наименьшее и наибольшее характеристические числа.

Автор указывает, что эта теорема легко обобщается и на случай произведения любого конечного числа матриц:

$$\Pi_{i=1}^n c_{\min}(A_iA_i^*)\leqslant c(\Pi_{i=1}^n A_i)\,\overline{c}(\Pi_{i=1}^n A_i)\leqslant \leqslant \Pi_{i=1}^n c_{\max}(A_iA_i^*).$$

Из результатов автора следует теорема Брауна: для произвольной $n\times n$ матрицы A имеют место неравенства

$$c_{\min}(AA^*)\leqslant c(A)\,\overline{c}(A)\leqslant c_{\max}(AA^*)$$

(Browne E. T., Bull. Amer. Math. Soc., 1928, 34, 363—368).

Если матрицы A и B — эрмитовы, то неравенства (1) принимают вид

$$c_{\min}^2(A)\,c_{\min}^2(B)\leqslant c(AB)\,\overline{c}(AB)\leqslant c_{\max}^2(A)\,c_{\max}^2(B).$$

Если матрицы A и B — эрмитовы и одна из них положительно определенная, а другая по крайней мере положительно полуопределенная (т. е. все ее характеристические числа неотрицательны), то

$$c_{\min}(A)\,c_{\min}(B)\leqslant c(AB)\leqslant c_{\max}(A)\,c_{\max}(B).$$

Автор утверждает, что полученные результаты весьма полезны в математической статистике.

Х. Р. Сулейманова

1981. Обобщение формулы Кели. Стейн (An extension of a formula of Cayley. Stein P.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, 9, № 2, 91—99 (англ.)

Если x_{ik} $(i,k=1,2,\ldots,n)$ — n^2 независимых переменных, a_{ik} — n^2 констант, ξ_{ik} — n^2 операторов $a_{ik}\dfrac{\partial}{\partial x_{ik}}$, $x=(x_{ik})$ — определитель, составленный из n^2 элементов x_{ik}, $\xi=(\xi_{ik})$ — определитель, составленный из элементов ξ_{ik}, x_{IK} — минор m-го порядка определителя x, x^{IK} — минор, дополнительный к минору x_{IK}, ξ_{IK} и ξ^{IK} — такие же миноры определителя ξ, а α — произвольная константа, то имеет место формула

$$\xi^{IK}x^{\alpha}=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-m-1)\,x^{\alpha-1}x_{IK}.$$

Для $a_{ik}\equiv 1$ получается известная формула Капелли, а для $a_{ik}\equiv 1$ и $m=0$ (т. е. $x_{IK}=1$, $x^{IK}=x$) — формула Кели.

Б. А. Розенфельд

1982. О квазиидемпотентных матрицах. Хафф (On quasi-idempotent matrices. Huff G. B.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 5, 334—339 (англ.)

Многочлен с матричными коэффициентами $P(x)=\Sigma_{i=0}^m B_ix^i$ (B_i $(i=0,1,\ldots,m)$ — $n\times n$-матрицы с комплексными элементами $B_m\neq 0$) называется экспоненциальным, если $P(r)=[P(1)]^r$ для любого $r=1,2,\ldots$; матрица $A=P(1)$ называется квазиидемпотентной матрицей, соответствующей многочлену $P(x)$.

Устанавливается необходимое и достаточное условие квазиидемпотентности: минимальный аннулирующий многочлен матрицы A должен иметь вид $\lambda(\lambda-1)^{m+1}$. При этом существует такая идемпотентная матрица B_0 ($B_0^2=B_0$), что $B_0A=AB_0=A$, $(A-B_0)^{m+1}=0$, но $(A-B_0)^m\neq 0$. Соответствующий многочлен $P(x)$ имеет вид:

$$P(x)=B_0+(A-B_0)\,x+(A-B_0)^2x(x-1)/2!+\ldots \ldots+(A-B_0)^mx(x-1)\ldots(x-m+1)/m!.$$

Ф. Р. Гантмахер

1983. Некоторые неравенства, касающиеся положительно определенных эрмитовых матриц, Фань Цюй. (Some inequalities concerning positive-definite Hermitian matrices. Fan K y), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 3, 414—421 (англ.)

Пусть $H=\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ — положительно определенная эрмитова матрица. Символом $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ обозначается матрица, состоящая из элементов, стоящих на пересечении строк и столбцов матрицы H с номерами $i_1,i_2,\ldots,i_k$.

Доказывается неравенство

$$\frac{\det H}{\det(p+1,\ldots,n)}\leqslant\prod_{i=1}^p\frac{\det(i,p+1,\ldots,n)}{\det(p+1,\ldots,n)}\ (1\leqslant p<n),$$

дающее лучшую оценку для $\det H$, чем оценки, получаемые с помощью обобщенного неравенства Адамара.

Представив H в клеточной форме $H=\left\|\begin{matrix}A & B\\ B^* & C\end{matrix}\right\|$, автор устанавливает следующую экстремальную характеристику частного $\det H/\det C$:

$$\det H/\det C=\min_R\det(A+BR+R^*B^*+R^*CR),$$

где R пробегает все матрицы тех же размеров, что B^*. Минимум достигается тогда и только тогда, когда $R=-C^{-1}B^*$, т. е. $\det H=\det C\cdot\det(A-BC^{-1}B^*)$.

Приводятся неравенства, относящиеся к собственным значениям матрицы H. Отметим следующую теорему, уточняющую известные неравенства для собственных значений: Если $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$ — собственные значения матрицы H, p, h, k — целые числа, удовлетворяющие условиям: $1\leqslant h\leqslant p\leqslant n$, $0\leqslant k\leqslant n-p$, то

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_h\leqslant\prod_{i=1}^h\frac{\det(i,p+1,\ldots,n)}{\det(p+1,\ldots,n)}$$

и

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_h\lambda_{h+1}\ldots\lambda_{h+k}\leqslant \leqslant\det(p+1,\ldots,p+k)\prod_{i=1}^h\frac{\det(i,p+1,\ldots,n)}{\det(p+1,\ldots,n)}.$$

Ю. Л. Шмульян

1984. Осцилляционная теорема для алгебраических задач о собственных значениях и ее приложения. Зиндеен (An oscillation theorem for algebraic eigen-

value problems and its applications. Sinden Frank W.— Diss. (Mitt. Inst f. angew. Math. Eidg. Techn. Hochschule, Zürich № 4). Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1954, 57 S., 6.25 sfr), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, **A**, № 21, 1129 (нем.)

ГРУППЫ

1985. Диссонирующие перестановки. Риордан (Discordant permutations. Riordan John), Scripta math., 1954, **20**, № 1—2, 14—23 (англ.)

Две перестановки n элементов называются диссонирующими, если ни один элемент не занимает в обоих перестановках одно и то же положение. Статья посвящена определению числа $N_{n,k}$ перестановок, диссонирующих до $(n-k)$-го места с тремя перестановками

$$(1\ 2\ \ldots\ n-1\ n),$$
$$(2\ 3\ \ldots\ n\ \ 1),$$
$$(3\ 4\ \ldots\ 1\ \ 2).$$

В частности, $N_{n,0}$ представляет собой число перестановок, диссонирующих с тремя указанными перестановками.

Рассматривается образующая функция

$$N_n(y) = \sum_0^n N_{n,k} y^k.$$

Так как

$$N_n(y) = \sum_0^n \sigma_{n,k}(n-k)!\,(y-1)^k$$

и

$$\sigma_{n,k} = \sigma_{n-1,k} + 2\sigma_{n-1,k-1} + \sigma_{n-2,k-1} - \sigma_{n-3,k-3} - 2\delta_{n-1,k},$$

где $\delta_{n-1,k} = 1$ при $k = n-1$ и $\delta_{n-1,k} = 0$ при $k \neq n-1$, то отсюда можно определить числа $N_{n,k}$ для любого заданного значения $n \geqslant 3$. Л. Я. Окунев

1986. О представлениях обобщенной симметрической группы. Осима (On the representations of the generalized symmetric group. Osima Masaru), Math. J. Okayama Univ., 1954, **4**, № 1, 39—56 (англ.)

Автор называет обобщенной симметрической группой $S(n, m)$ совокупность всех подстановок mn символов

$$1_1, 2_1, \ldots, m_1;\ 1_2, 2_2, \ldots, m_2;\ \ldots;\ 1_n, 2_n, \ldots, m_n,$$

перестановочных с подстановкой

$$(1_1, 2_1 \ldots m_1)(1_2, 2_2 \ldots m_2)\ldots(1_n, 2_n \ldots m_n). \qquad (1)$$

Группа $S(n, 1)$ совпадает с симметрической группой S_n.

Группа $S(n, m)$ имеет нормальный делитель $\mathfrak{K}$ порядка m^n, порождаемый циклами, из которых состоит подстановка (1). Фактор-группа $S(n, m)/\mathfrak{K}$ изоморфна подгруппе S_n^* группы $S(n, m)$, состоящей из всех подстановок, преобразующих каждый из упомянутых циклов в какой-либо другой из этих циклов. Подгруппа S_n^* изоморфна группе S_n.

Первый раздел работы посвящен вопросу о связи между характерами конечной группы и характерами ее нормального делителя. Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная группа, для которой рассматриваются представления в алгебраически замкнутом поле характеристики 0. Пусть $\mathfrak{H}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$; $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$; $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ — характеры различных неприводимых представлений групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{G}_\mu$ $(1 \leqslant \mu \leqslant m)$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$, состоящая из всех элементов G этой группы, удовлетворяющих условию $\zeta_\mu(H) = \zeta_\mu(G^{-1}HG)$, где H — любой элемент из $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{G} = \Sigma_i \mathfrak{G}_\mu T_i$ $(T_i = 1)$ — разложение группы $\mathfrak{G}$ по модулю $\mathfrak{G}_\mu$ и $\theta_\mu(H) = \Sigma_i \zeta_\mu(T_i^{-1} H T_i)$. Для любого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ можно подобрать такое μ, что $\chi_i(H) = a_i \theta_\mu(H)$ для любого H из $\mathfrak{H}$, где a_i — целое положительное число. Характер χ_i называется характером группы $\mathfrak{G}$, определяемым посредством ζ_μ.

Пусть $\mathfrak{G}'$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $G' \to D(G')$ $(G' \in \mathfrak{G}')$ — некоторое ее представление. Пусть $\mathfrak{G} = \Sigma_i \mathfrak{G}' S_i$ $(S_1 = 1)$ разложение группы $\mathfrak{G}$ по модулю $\mathfrak{G}'$. Представление группы $\mathfrak{G}: G \to D^*(G) = (D(S_i^{-1} G S_j))_{ij}$ $(G \in \mathfrak{G})$, где $D(S_i^{-1} G S_j) = 0$, если $S_i^{-1} G S_j$ не содержится в $\mathfrak{G}'$, называется представлением группы $\mathfrak{G}$, индуцированным представлением D. Если ξ — какой-либо характер представления D, то через $\tilde{\xi}$ обозначается соответствующий характер представления D^*, причем $\tilde{\xi}(G) = \Sigma_i \xi(S_i^{-1} G S_i)$ $(G \in \mathfrak{G})$.

Теорема. Пусть ζ_μ — неприводимый характер нормального делителя $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$. Пусть $\chi_\mu^{(1)}, \chi_\mu^{(2)}, \ldots, \chi_\mu^{(t_\mu)}$; $\xi_\mu^{(1)}, \xi_\mu^{(2)}, \ldots, \xi_\mu^{(h_\mu)}$ — неприводимые характеры группы $\mathfrak{G}$ и подгруппы $\mathfrak{G}_\mu$, определяемые посредством ζ_μ. Тогда $t_\mu = h_\mu$ и при соответствующем выборе обозначений $\tilde{\xi}_\mu^{(i)} = \chi_\mu^{(i)}$.

Во втором и третьем разделах эта теорема используется при исследовании свойств неприводимых представлений группы $S(n, m)$. Установлено взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями группы $S(n, m)$ и звездными диаграммами определенного вида. Выведена формула для степеней неприводимых представлений группы $S(n, m)$. Установлена связь между неприводимыми представлениями группы $S(n, m)$ и обобщенной знакопеременной группы $A(n, m)$. На неприводимые представления группы $S(n, m)$ обобщен ряд свойств неприводимых представлений группы S_n, в том числе рекуррентная формула Мурнагана — Накаяма, облегчающая вычисление характеров для подстановок различных видов.

В четвертом разделе приведены доказательства теорем, формулировки которых были ранее опубликованы автором (РЖМат, 1956, 1061). В. К. Туркин

1987. Теория модулярных представлений симметрической группы. Робинсон (The modular representation theory of the symmetric group. Robinson Gilbert de Beauregard), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 61—62 (англ.)

Отмечается достигнутый прогресс в изучении неприводимых представлений симметрической группы и излагается результат автора об изменении веса диаграммы Юнга при r-индуцировании (реф. 1988). М. А. Наймарк

1988. О модулярных представлениях симметрической группы. Ч. IV. Робинсон (On the modular representations of the symmetric group. Part IV. Robinson G. de B.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 4, 486—497, bef. 1953 (англ.)

Части I — III см. Proc. Nat. Acad. Soc., 1951, **37**, 694—696; 1952, **38**, 129—133, 424—426. Изучается влияние на диаграмму Юнга неприводимого представления симметрической группы S_n процессов индуцирования и сужения, в результате которых из неприводимого

представления группы S_n получаются неприводимые представления групп S_{n+1} и S_{n-1} соответственно.

Основной результат: Изменения веса диаграммы Юнга при присоединении или удалении узла класса r соответственно равны $d - d^* - 1$ и $d^* - d - 1$, где d, d^* — r-дефект и r-аффект диаграммы. При этом r-дефектом диаграмм называется число d узлов класса r, которые можно к ней присоединить, а r-аффектом — число d^* узлов класса r, которые из нее можно удалить.

В заключение изучается булева алгебра диаграмм, получаемых из данной диаграммы путем r-индуцирования и r-сужения. М. А. Наймарк

1989. О модулярном представлении симметрической группы. Часть V. Робинсон (On the modular representation of the symmetric group. Part V. Robinson G. de B.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 3, 391—400 (англ.)

Пусть $[\lambda]$ — диаграмма Юнга, соответствующая разбиению (λ) целого положительного числа n на целые положительные слагаемые; p — простое число. Автор называет диаграмму $[\lambda]$ p-регулярной, если в ней нет p строк одинаковой длины.

Доказана следующая теорема: Число p-регулярных диаграмм, относящихся к какому-либо блоку, равно числу модулярных (по модулю p) неприводимых представлений симметрической группы S_n, относящихся к тому же блоку.

Эта теорема уточняет ряд ранее доказанных теорем о числе модулярных неприводимых представлений группы S_n (Фарахат, Фрейм и Робинсон, Нагао, Осима).

Выведен также ряд критериев регулярности диаграмм Юнга и изложен метод их построения по заданным p-ядру и p-отношению. В. К. Туркин

1990. О некоторых свойствах алгебраических линейных групп Ли. Гуревич Г. Б., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 2, 177—178

Выводятся некоторые следствия из теоремы А. И. Мальцева, согласно которой всякая алгебраическая линейная алгебра Ли G расщепляема, т. е. каждая матрица $x \in G$ представима в виде $x = y + z$, где y — нильпотентный и z — семирегулярный элементы G и $yz = zy$.

Доказывается, что все линейные зависимости между весами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ алгебраической линейной алгебры Ли G сводятся к зависимости вида $\gamma_1\Lambda_1 + \ldots + \gamma_n\Lambda_n = 0$, где γ_i — целые числа. Отсюда вытекает, что пересечение алгебры G с ее ортогональным дополнением (в смысле картановской метрики) состоит из матриц, все собственные значения которых равны нулю. А. Л. Онищик

1991. О локально-компактной группе, действующей на многообразии. Мостерт (On a locally compact group acting on a manifold. Mostert Paul S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 769—770 (англ.)

Монтгомери показал, что если G — связная группа Ли, транзитивно действующая на компактном многообразии M, и если стационарная подгруппа G_x связна, то G содержит компактную подгруппу, транзитивно действующую на M (Montgomery D., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 467—469). Автор показывает, что теорема справедлива в случае, когда G — любая связная локально-компактная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Если G обладает указанными свойствами, то существует группа Ли G^*, транзитивно действующая на M и такая, что G^* является фактор-группой G по компактному нормальному делителю из G_x.

Н. Я. Виленкин

1992. Локально-нильпотентные неприводимые подгруппы полной линейной группы. Супруненко Д. А., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 1, 41—44

Пусть P — произвольное алгебраическое замкнутое поле, m — натуральное число вида p^ν (p — простое) и $u_1, \ldots, u_m$ — некоторый базис m-мерного векторного пространства над P. Обозначим через N_{p^ν} одну из максимальных транзитивных нильпотентных подгрупп симметрической группы, перемещающей базисные векторы $u_1, \ldots, u_m$, а через H_{p^ν} — подгруппу группы $GL(mP)$, состоящую из всех таких матриц h, что $h(u_i) = \eta_i u_i$, где $\eta_i \in P$ и $\eta_i^{p^m} = 1$ для некоторого натурального числа m ($i = 1, \ldots, m$). Тогда $N_{p^\nu} H_{p^\nu}$ есть локально-конечная p-группа.

Пусть теперь $n = p_1^{\nu_1} \ldots p_k^{\nu_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа ($k \geqslant 1$). Тогда множество Γ_n матриц вида $\lambda\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k$, где λ — произвольный отличный от нуля элемент поля P, σ_i — произвольная матрица из $N_{p_i^{\nu_i}} H_{p_i^{\nu_i}}$ и $\times$ — знак кронекеровского произведения, является локально-нильпотентной подгруппой группы $GL(n, P)$. Любая локально-нильпотентная неприводимая подгруппа группы $GL(n, P)$ сопряжена с некоторой подгруппой группы Γ_n. Все максимальные локально-нильпотентные неприводимые подгруппы группы $GL(n, P)$ сопряжены в $GL(n, P)$.

В. М. Глушков

1993. Соотношения между группами E_7 и E_8 и октавной плоскостью. I. Фрёйденталь (Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. vetensch., 1954, A **57**, № 3, 218—230; Indagationes Math., 1954, 16, № 3, 218—230 (нем.)

Статья непосредственно примыкает к более ранней работе автора (РЖМат, 1953, 1357; там же пояснены применяемые ниже обозначения), в которой строится проективная октавная геометрия двух измерений. Для этой цели используется кольцо $\mathfrak{J}$ эрмитово симметричных матриц третьего порядка, элементы которых — октавы (числа Кэли); проективная группа $\mathrm{Inv}(\det X)$ октавной плоскости состоит из тех преобразований $X \to AXA^*$, которые оставляют неизмененным $\det X = (X, X, X)$, $X \in \mathfrak{J}$. В реферируемой работе с каждой парой матриц $X, U \in \mathfrak{J}$ связывается преобразование $\langle X, U\rangle \in \mathrm{Inv}(\det X)$, определяемое равенством $\langle X, U\rangle A = U\circ(X\circ A) - X\circ(U\circ A) - (X\circ U)\circ A + \frac{1}{3}(X, U)A$; $X\circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$. Вводится в рассмотрение 56-мерное пространство $\mathfrak{K}$ величин P с компонентами x, u, ξ, ω (x, $u \in \mathfrak{J}$, ξ, ω — действительные числа) и его 27-мерное подпространство $\mathfrak{M}$, составленное из тех $P \in \mathfrak{K}$, для которых выполняются соотношения

$$\chi(X\circ U - \xi\omega) = 0, \tag{2.0}$$

$$X \times X - \omega U = 0, \tag{2.1}$$

$$U \times U - \xi X = 0, \tag{2.2}$$

$$\langle X, U\rangle = 0, \tag{2.3}$$

$$X\circ U - \xi\omega = 0. \tag{2.4}$$

Уравнения эти не являются независимыми: как показано в работе, при $\omega \neq 0$ из равенств (2.0) и (2.1) вытекают равенства (2.2), (2.3) и (2.4); при $\xi \neq 0$ из (2.0) и (2.2) следуют все остальные соотношения и, наконец, равенства (2.0), (2.1), (2.2) и (2.4) являются следствиями уравнения (2.3).

Проективные преобразования пространства $\mathfrak{K}$, кото-

рые оставляют неизменными подпространство $\mathfrak{M}$, образуют 133-мерную связную полупростую группу Inv ($\mathfrak{M}$). Для этой группы найдены ее бесконечно малые преобразования; выражение

$$J = (X \times X,\ U \times U) - \xi \det X - \omega \det U - \frac{1}{4}((X, U) - \xi\omega)^2 \qquad (4.9)$$

является инвариантом группы Inv ($\mathfrak{M}$). Обратно, группа Inv ($\mathfrak{M}$) может быть определена как множество тех проективных преобразований пространства $\mathfrak{K}$, которые оставляют неизменной правую часть равенства (4.9). Разыскав корни группы Inv ($\mathfrak{M}$), автор устанавливает, что она является действительной формой исключительной простой группы $\mathfrak{E}_7$. В заключение показано, что группа Inv ($\mathfrak{M}$) транзитивна над $\mathfrak{M}$. Г. Б. Гуревич

1994. **Свободные подгруппы ортогональной группы. Грот, Деккер** (Free subgroups of the orthogonal group. Groot J. de, Dekker T.), Compositio math., 1954, **12**, № 2, 134—136 (англ.)

Пусть G^n — группа всех собственных ортогональных преобразований евклидова пространства E^n, представленная с помощью действительных ортогональных матриц n-го порядка с детерминантом, равным $+1$. Доказано (с использованием аксиомы выбора), что для $n>2$ группа G^n содержит свободную (неабелеву) подгруппу с $\aleph$ свободных образующих.

Группа вращений G^2 и группа всех движений пространства E^2 не имеют свободных неабелевых подгрупп. Л. Е. Садовский

1995. **О мономиальных представлениях конечных групп. Ито** (On monomial representations of finite groups. Ito Noboru), Osaka Math. J., 1954, **6**, № 1, 119—127 (англ.)

В § 1 работы даются новые доказательства полученных Шодой (Shoda K., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 1933, **15**, 249—257) критерия неприводимости транзитивной мономиальной матричной группы и теоремы о соотношении между степенью точного абсолютно неприводимого представления метабелевой группы и порядком ее максимального абелевого нормального делителя, содержащего коммутант группы.

В § 2 доказывается, что порядки двух максимальных и абелевых нормальных делителей A и B конечной группы совпадают, если коммутант группы AB циклический.

§ 3 содержит основную теорему работы. Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа, $a_1, \ldots, a_s$ — система представителей левых смежных классов группы G по H. Мономиальным представлением группы G, индуцированным подгруппой H, называется представление $g \to \| \gamma_{ij}(g) \|$ $(g \in G)$, где

$$\gamma_{ij}(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i^{-1} g a_j \in H \\ 0, & \text{если } a_i^{-1} g a_j \notin H. \end{cases}$$

Теорема. Каждое неприводимое мономиальное представление конечной группы, индуцированное ее циклической подгруппой, отличной от всей группы, содержит по крайней мере одну диагональную нескалярную матрицу.

На примере знакопеременной группы A_5 и ее подгруппы A_4 показывается, что требование цикличности подгруппы существенно. С. Д. Берман

1996. **К проблеме классификации конечных метабелевых p-групп. Калужнин** (Zum Problem der Klassifikation der endlichen metabelschen p-Gruppen. Kaloujnine Leo), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1954 — 1955, **4**, № 1, 1—7 (нем.)

Вводный параграф работы посвящен обсуждению вопроса о классификации тех или иных классов конечных алгебраических систем при помощи числовых инвариантов. Указывается, в частности, на необходимость найти точную формулировку этого вопроса. Специализируя, далее, хорошо известное соответствие между p-группами и лиевыми кольцами, а также принадлежащую А. И. Мальцеву идею присоединенной группы для обобщенно нильпотентной алгебры, автор непосредственным путем устанавливает взаимно однозначное соответствие между конечными метабелевыми группами, все отличные от единицы элементы которых имеют порядок p, и конечными антикоммутативными нильпотентными алгебрами класса 3 над простым полем характеристики p. Работа заканчивается замечаниями, относящимися к вопросу о классификации алгебр указанного типа, притом в случае произвольного основного поля. В частности, среди всех алгебр этого типа, имеющих число d в качестве ранга фактор-алгебры по квадрату, имеется единственная такая алгебра, что остальные будут ее гомоморфными образами. А. Г. Курош

1997. **О проблеме Бернсайда. Линдон** (On Burnside's problem. Lyndon R. C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 2, 202—215 (англ.)

Пусть F — свободная группа с q образующими, R — нормальный делитель, порожденный p-ми степенями элементов группы F (p — простое число) и $B = F/R$. Пусть $k(n)$ — число простых слагаемых (все эти слагаемые являются циклическими группами p-го порядка) n-го фактора нижнего центрального ряда группы B, а $\psi(n)$ — ранг n-го фактора нижнего центрального ряда группы F. Оказывается, что

$$k(n) = \psi(n) \text{ для } n < p; \qquad (1)$$

$$k(p) = \psi(p) - \binom{p+q-1}{p} + q; \qquad (2)$$

$$k(p+1) = \psi(p+1) - \binom{q}{2}\binom{p+q-2}{p-1} \text{ для } p > 2; \qquad (3)$$

$$k(p+2) = \psi(p+2) - 3p + 1 \quad \text{для } p > 3 \text{ и } q = 2. \qquad (4)$$

Автор указывает, что формулы (1), (2), (3) для $q = 2$ и формула (4) были получены (но не опубликованы) Ф. Холлом в 1949 г. с помощью других методов. В. М. Глушков

1998. **Некоторые теоремы о покрытии групп. Маттьоли** (Altri teoremi di copertura dei gruppi. Mattioli Ennio), Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1953, **7**, № 1-2, 43—52 (итал.)

Пусть G — абелева группа типа $(1, 1, \ldots, 1)$ и порядка p^n (p — простое число) и $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — ее образующие. Если G содержит такую подгруппу Γ, что

$$G = \Gamma + \Sigma\Gamma g_i^{\alpha} \ (\alpha = 1, 2, \ldots, p-1;\ i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

то G называется группой с полным линейным покрытием, а Γ — ядром покрытия (см., например, Mattioli E., Ann. Scuola norm. super. Pisa, Sci. fis. e mat., 1949, **3**, 59—65). Пусть группа G разложена в произведение своих подгрупп $G^{(i)}$ порядка p и типа $(1, 1, \ldots, 1)$. Основная теорема статьи указывает способ построения ядра покрытия группы G по ядрам покрытия групп $G^{(i)}$. Как и в указанной выше предыдущей работе автора, получено следствие для размещений (упорядоченных множеств) с повторениями: из некоторого множества M размещений m элементов можно выделить такое подмножество N, что каждое размещение из M отличается от некоторого размещения из N одним элементом.

Если вместо (1) для группы выполняется соотношение

$$G = \Gamma + \Sigma \Gamma g_i^{\alpha} + \Sigma g_j^{\beta} g_l^{\gamma};\ i, j, l = 1, \ldots, n;$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, p-1,$$

то автор называет группу G группой с квадратичным покрытием. Построен пример такой группы.

Л. М. Глускин

1999. База для подгрупп свободных групп. Нильсен (A basis for subgroups of free groups. Nielsen Jakob), Math. scand., 1955, **3**, № 1, 31—43 (англ.)

Результаты работы, как отмечает и сам автор, в основном повторяют результаты более ранних работ разных авторов о подгруппах свободных групп. Методы же, как должен отметить референт, весьма близки к методам последнего о подгруппах свободных произведений групп. Если F — свободная группа с фиксированной системой свободных образующих, то система элементов B, записанных в виде несократимых слов в этих образующих, называется базисной, если ни в одном произведении двух элементов из $B \cup B^{-1}$, не являющихся обратными друг другу, не может сократиться больше половины каждого из этих множителей и если ни в одном произведении трех элементов из $B^{-1} \cup B$, в котором соседние множители не являются обратными другу другу, центральный множитель не может сократиться на половину ни с одной стороны. Доказано, что всякая подгруппа свободной группы обладает базисной системой образующих; отсюда следует, что всякая подгруппа свободной группы свободна. Показано также, что если подгруппа свободной группы имеет конечную систему образующих, то существует алгоритм для решения вопроса, принадлежит ли к этой подгруппе данный элемент свободной группы.

А. Г. Курош

2000. О мультипликативной группе корней из единицы. Селе (Az egységgyökök multiplikativ csoportjáról. Szele T.), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, **3**, № 1, 55—58 (венг.)

Автор доказывает следующую теорему: Некоторая группа не содержит двух различных изоморфных подгрупп тогда и только тогда, когда она изоморфна подгруппе мультипликативной группы всех (комплексных) корней из единицы. Краткое и простое доказательство использует только самые основные факты теории групп.

A. Kertész

2001. Обобщение теории r-идеалов Прюфера-Лоренцена. Обер (Généralisation de la théorie des r-idéaux de Prüfer-Lorenzen. Aubert Karl Egil), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 23, 2214—2216 (франц.)

В коммутативной полугруппе D определена система r-идеалов, или r-система, если определено такое отображение $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_r$ подмножеств $\mathfrak{a} \subseteq D$ на некоторую совокупность подмножеств $\mathfrak{a}_r \subseteq D$, что: 1) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_r$; 2) из $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}_r$ следует $\mathfrak{a}_r \subseteq \mathfrak{b}_r$; 3) $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_r \subseteq \mathfrak{b}_r \cup (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_r$. Если $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_r$, то $\mathfrak{a}$ называется r-идеалом. r-система имеет конечную характеристику, если r-идеал, порожденный произвольным подмножеством $\mathfrak{a}$, совпадает с объединением r-идеалов, порожденных конечными подмножествами, содержащимися в $\mathfrak{a}$. Утверждается (без доказательства), что для системы r-идеалов конечной характеристики справедливы классические теории идеалов Круля, Нетер и Дедекинда. Приводится несколько известных результатов, относящихся к идеалам и фильтрам дистрибутивных структур, к структурам с умножением, к топологическим и дифференциальным кольцам, которые можно получить как следствия из теорий Круля и Нетер для r-идеалов полугруппы. Указывается, что теорию Дедекинда-Нетер для r-идеалов можно объединить с теорией r-идеалов Прюфера-Лоренцена (Lorenzen, Math. Z., 1939, **45**, 533—553). В конце отмечается, что аналогичное обобщение можно провести для случая некоммутативных полугрупп.

Е. Г. Шульгейфер

2002. Теорема о коммутативных с ассоциативными степенями алгебрах луп. Пейдж (A theorem on commutative power associative loop algebras. Paige Lowell J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 279—280 (англ.)

Каждой лупе L можно сопоставить алгебру лупы $A(L)$ над некоторым полем F, аналогично тому, как группе сопоставляется групповая алгебра. Доказано, что если характеристика поля F отлична от 2, то алгебра $A(L)$ тогда и только тогда будет коммутативной алгеброй с ассоциативными степенями, если L — абелева группа.

А. И. Ширшов

2003. О ядрах полугрупп. Хасимото (On the kernel of semigroups. Hashimoto Hiroshi), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 1, 59—66 (англ.)

Пусть S — полугруппа, обладающая минимальными левыми и минимальными правыми идеалами, D_1 и D_2 — ее минимальные соответственно левый и правый идеалы. Ядром полугруппы S называется двусторонний идеал D_1D_2. Ядро не имеет нетривиальных двусторонних идеалов и не зависит от выбора идеалов D_1 и D_2. Пересечение $D_1 \cap D_2 = D_2 \cdot D_1$ является группой. Ядро D_1D_2 является объединением попарно непересекающихся минимальных левых идеалов S. Идеалы D_1 и D_2 являются объединениями попарно непересекающихся групп.

Е. С. Ляпин

2004 К. Непрерывные группы. Понтрягин Л. С. Изд. 2-е перераб. и доп., М., Гостехиздат, 1954, 516 стр. с черт. 19 р. 40 к.

Настоящее, второе, издание книги существенно дополнено и переработано по сравнению с первым (первое издание вышло из печати в 1938 г.). Гл. 1, содержащая изложение основных фактов теории абстрактных групп (понятия группы, подгруппы, фактор-группы, центра, коммутанта, прямого произведения; теория коммутативных групп), дополнена параграфом о кольцах, телах и проективных пространствах и пунктом о группах преобразований. Гл. 2, посвященная теории топологических пространств (излагаются понятия топологического пространства, окрестности, гомеоморфизма, аксиом отделимости, подпространства, бикомпактности, прямого произведения пространств, связности, размерности), подверглась серьезной переработке в связи с тем, что автор отказался в этом издании от второй аксиомы счетности и ведет изложение для произвольных локально-бикомпактных групп. В связи с этим детально исследуется понятие бикомпактности, доказываются теоремы А. Н. Тихонова о бикомпактных пространствах и т. д.

Начиная с гл. 3, автор переходит к изложению теории топологических групп. Вводятся основные понятия, изучаются топологические свойства группового пространства, исследуются связные и вполне несвязные группы. Новым является параграф о непрерывных группах преобразований и доказательство полной регулярности группового пространства. Совершенно новой является гл. 4, в которой исследованы топологические тела (в первом издании этому вопросу был посвящен только один параграф). Выяснена структура непрерывных локально бикомпактных тел и показана их связь с классическими непрерывными телами (полем действительных чисел, полем комплексных чисел, телом квартернионов, полем p-адических чисел и полем рядов над полем вычетов по модулю p). В гл. 5, содержащей классические результаты теории представлений бикомпактных топологических групп (соотношения ортогональности, теорему о полноте системы неприводимых представлений и т. д.), добавлен

параграф об интегральных уравнениях на группе. Гл. 6 посвящена теории характеров локально-бикомпактных коммутативных групп, принадлежащей в основном автору книги. Здесь излагаются основные результаты этой теории, находящие приложения в комбинаторной топологии (теорема двойственности, теорема о взаимности аннуляторов, вычисление группы характеров для подгруппы и фактор-группы и т. д.). Указаны связи между различными свойствами двойственных групп, исследуется строение локально-бикомпактных коммутативных групп.

В гл. 7 дано обоснование основных понятий теории групп Ли. Доказывается, что если закон умножения в локальной группе Ли задается трижды дифференцируемыми функциями координат (автор называет в этом случае систему координат дифференцируемой), то все дифференцируемые системы координат получаются из данной с помощью дифференцируемых преобразований, что всякая подгруппа группы Ли является группой Ли, что естественное отображение группы Ли на ее фактор-группу задается дифференцируемыми функциями и т. д. Аналогичные результаты даны для аналитических систем координат (возможность введения в дифференцируемую группу Ли аналитических координат доказана в гл. 10). Глава содержит новый параграф о гладких и аналитических многообразиях, используемый далее для исследования компактных групп в целом. В гл. 8 исследована структура бикомпактных топологических групп, причем, вместо обычно применяющихся обратных спектров по частично упорядоченной системе индексов, автор использует такие сходящиеся ряды бикомпактных групп, занумерованные трансфинитными числами, что ядро гомоморфизма, отображающего группу $G_{\alpha+1}$ на группу G_α, является группой Ли. Дается решение пятой проблемы Гильберта для бикомпактных групп, основанное на исследовании строения таких групп. Новым является параграф о транзитивных бикомпактных группах преобразований конечномерных пространств. В гл. 9 исследуются локально-изоморфные группы и доказывается теорема Шрейера. Более подробно, чем ранее, исследован вопрос о накрывающих группах. Гл. 10 посвящена исследованию группы Ли и алгебр Ли. Проведено построение группы Ли по структурным константам, определены полупростые и разрешимые алгебры Ли, доказано существование полной группы Ли, соответствующей данной действительной алгебре Ли. Совершенно новой является гл. 11, содержащая теорию компактных групп Ли. Излагается теория корневых систем, дается построение компактной алгебры Ли по ее корневой системе и выводится классификация простых компактных алгебр Ли.

Несмотря на то, что большинство необходимых результатов и понятий изложено в самой книге, от читателя требуется значительная математическая культура. Изложение ведется дедуктивно, в ряде мест весьма абстрактным образом. Приложения теории топологических групп излагаются в основном в примерах (так, теория почти периодических функций рассматривается как пример к общей теории представлений компактных групп). Все доказательства проведены в книге с полной строгостью, дана схема логической зависимости глав, книга снабжена указателем основных понятий.

Многие аспекты теории топологических групп, возникшие после выхода в свет первого издания книги, не нашли во втором издании достаточного отражения. К ним относятся, например, общая теория меры на группах, общая теория функций, заданных на группах, теория унитарных представлений групп, гармонический анализ на группах, включающий теорию рядов и интегралов Фурье на группах, теорию положительно определенных функций и др., алгебраическая теория топологических групп, общая теория спектров топологических групп, решение пятой проблемы Гильберта для локально-бикомпактных групп и т. д. Мало работ по этим вопросам приведено и в библиографии (содержащей лишь 47 названий). Н. Я. Виленкин

2005 Д. К теории разрешимых транзитивных групп подстановок. Рюс • (Zur Theorie der einfach transitiven Permatationsgruppen. Rühs Fritz.— Diss. Math.-naturwiss. F., Rostock, 1953, 21 p. Bl. Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, **B**, № 15, 1088 (нем.)

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

2006. Об автоморфизмах полей алгебраических функций. Бозек (Über Automorphismen algebraischen Funktionenkörper. Boseck Helmut), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math.-naturwiss., 1953/54, **3**, 361—362 (нем.)

Пусть R — поле алгебраических функций от одной переменной рода $g > 1$ над полем констант K; A — группа автоморфизмов поля R над K. Известно, что при алгебраически замкнутом поле K группа A конечна. Показывается, что группа A конечна также при любом совершенном поле K. З. И. Боревич

2007. О теореме о главном роде. Куниёси, Такахаси (On the principal genus theorem. Kuniyoshi Hideo, Takanashi Shuichi), Tôhoku Math. J., 1953, 5, № 2, 128—131 (англ.)

Доказывается, что если в нормальном поле K с группой Галуа $\mathfrak{G}$ задана система идеалов $\mathfrak{A}_\sigma$, $\sigma \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\mathfrak{A}_\tau^\sigma \mathfrak{A}_\sigma \mathfrak{A}_{\sigma\tau}^{-1} = (A_{\sigma\tau})$, 2) $A_{\sigma\tau} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}\mathfrak{D}}$, 3) $A_{\sigma\tau}$ образуют систему множителей в K, то существует такой идеал $\mathfrak{L}$, что $\mathfrak{A}_\sigma = \mathfrak{L}^{1-\sigma}(c_\sigma)$, где $C_\sigma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}}$. Здесь $\mathfrak{F}$ означает ведущий модуль поля K, а $\mathfrak{D}$ — его дифференту.

Примечание референта. Как показывает лемма 1 настоящей работы, эта теорема следует из теоремы Э. Нётер о главном роде. И. Р. Шафаревич

2008. Замечание к теореме о главном роде. Терада (A note on the principal genus theorem. Terada Fumiyuki), Tôhoku Math. J., 1953, 5, № 2, 211—213 (англ.)

Результат работы Куниёси и Такахаси (реф. 2007) несколько уточняется для случая, когда поле имеет абелеву группу Галуа. И. Р. Шафаревич

2009. Арифметика абелевых функций. Рокетт (L'arithmétique des fonctions abéliennes. Roquette Peter), Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Paris, Georges Thone, Liège, Masson et Cie, 1954, 69—80 (франц.)

Обзорный доклад, не содержащий доказательств. Рассматривается поле алгебраических функций K рода $g > 0$ над алгебраически замкнутым полем констант Ω. Образуется поле $\Omega(x^{(1)}, \ldots, x^{(g)})$ рациональных функций от g независимых переменных $x^{(1)}, \ldots, x^{(g)}$ над Ω и его алгебраическое замыкание $\bar{A}$. Через $\xi_1, \ldots, \xi_g$ обозначаются такие изоморфизмы поля K в $\bar{A}$, что поля $K_{\xi_1}, \ldots, K_{\xi_g}$ алгебраически независимы над Ω. Объединение подполей $K_{\xi_1}, \ldots, K_{\xi_g}$ поля $\bar{A}$ содержит, в частности, такие элементы, которые остаются инвариантными при перестановке полей K_{ξ_i}. Эти элементы образуют подполе A в $\bar{A}$, называемое симметрическим композитом полей K_{ξ_i}.

Под специализацией некоторого расширения поля Ω подразумевается гомоморфизм этого расширения на Ω с присоединенной ∞. Пусть $\overline{\gamma}$ — специализация $\overline{A}$, $p^r_{K_{\xi_i}}(\overline{\gamma})$ та специализация K_{ξ_i}, которая индуцируется специализацией $\overline{\gamma}$, и $pr_{K_{\xi_i}}(\overline{\gamma})\,\xi_i^{-1}$ — образ этой специализации в K. Специализации $\overset{\cdot}{pr}_{K_{\xi_i}}(\overline{\gamma})\,\xi_i^{-1}$ являются простыми дивизорами в K. Их сумма $\Sigma pr_{K_{\xi_i}}(\overline{\gamma})\,\xi_i^{-1}$ (дивизоры записываются аддитивно) обозначается через $\overline{\xi\gamma}$ и является дивизором порядка g в K. Этот дивизор зависит только от той специализации γ, которую $\overline{\gamma}$ индуцирует в A. Поэтому полагают $\overline{\xi\gamma} = \xi\gamma$. Выбирается произвольный дивизор $\mathfrak{o}$ порядка g в K и полагается $\xi_0\gamma = \xi\gamma - \mathfrak{o}$. $\xi_0\gamma$ является дивизором нулевого порядка. По определению, специализации γ_1 и γ_2 эквивалентны, если $\xi_0\gamma_1 \sim \xi_0\gamma_2$ в K. Это отношение не зависит от выбора дивизора $\mathfrak{o}$. Класс эквивалентных специализаций называется точкой поля A. Множество точек поля A является аналогом якобиева многообразия поля K.

Изоморфизм μ поля A на свое подполе называется мероморфизмом. Соответствие $\gamma \to pr_{A\mu}(\gamma)\mu^{-1}$ определяет отображение специализаций, соответствующее мероморфизму μ. Это отображение является отображением точек и тем самым определяет отображение классов дивизоров нулевого порядка поля K. Степень A/A_μ называется нормой мероморфизма μ. Мероморфизм μ называется нормированным относительно $\mathfrak{o}$, если отображение $\xi_a \mu \xi_{\mathfrak{o}}^{-1}$ классов дивизоров нулевого порядка в K не меняет нулевого класса. Тогда это отображение является эндоморфизмом группы классов. Эндоморфизм, сводящийся к умножению любого класса на заданное целое число n, порождается указанным образом некоторым мероморфизмом $n_{\mathfrak{o}}$, называемым натуральным. Норма мероморфизма $n_{\mathfrak{o}}$ равна n^{2g}. Поле $A/An_{\mathfrak{o}}$ нормально и его группа Галуа изоморфна группе классов дивизоров, порядок которых делит n. В частности, число таких классов есть n^{2g}. Этот результат был другим образом получен А. Вейлем.

Нормированный мероморфизм однозначно определяется соответствующим ему эндоморфизмом группы классов дивизоров нулевого порядка. Ввиду этого действия, определенные для эндоморфизмов, переносятся на мероморфизмы и совокупность нормированных мероморфизмов становится кольцом. Это кольцо имеет характеристику 0.

Автор сообщает, что при помощи исследования кольца нормированных мероморфизмов ему удалось получить простое доказательство гипотезы Римана для полей алгебраических функций с конечным полем констант и доказательство теоремы Вейля о конечности числа образующих группы классов дивизоров поля алгебраических функций с рациональным полем констант, свободное от применения абелевых функций.

И. Р. Шафаревич

2010. Обобщенная локальная теория полей классов. II. Теорема существования. Уэйплс (Generalized local class field theory. II. Existence theorem. Whaples G.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 2, 247—255 (англ.)

Поле k называется регулярным, если оно полно относительно дискретной неархимедовой нормы и его поле классов вычетов не имеет несепарабельных расширений и имеет ровно одно расширение каждой заданной степени n. Накаяма и Мория (Nakayama, Moriya, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1943, **19**, 129—137) перенесли на регулярные поля основные результаты локальной теории полей классов, однако в их работе остался открытым вопрос, какие подгруппы мультипликативной группы поля k являются группами норм абелевых расширений этого поля. Автор доказывает, что подгруппа H мультипликативной группы регулярного поля тогда и только тогда является группой норм некоторого абелевого расширения поля k, когда она аналитична и имеет конечный индекс. Подгруппа H называется аналитической, если: 1) существует такое число c, что для любой единицы ε поля k из $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\pi^C}$ следует $\varepsilon \in H$ (π означает простой элемент поля k) и 2) для любого i с $0 < i \leqslant c$ (в предположении, что c выбрано наименьшим, удовлетворяющим условию 1)) существует такой непостоянный многочлен $u_i(x)$ с целыми коэффициентами из k, что все элементы $1+u_i(\xi)\pi^i$ с любым целым ξ из k принадлежат H.

И. Р. Шафаревич

2011. Заметка о 2-мерной относительной группе когомологий в полных полях с дискретной метрикой. Кинохара (A note on the relative 2 dimensional cohomology group in complete fields with respect to a discrete valuation. Kinohara Akira), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, **A18**, № 1, 1—7 (англ.)

Относительная группа когомологий $H^2(R, R_0; M)$ коммутативного кольца R (относительно подкольца R_0) в R-модуле M определяется как фактор-группа группы функций $f(\alpha, \beta) \in M$, $\alpha, \beta \in R$, удовлетворяющих условиям:

1) $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$,

2) $f(\alpha + \beta, \gamma) = f(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma)$,

3) $\alpha f(\beta, \gamma) - f(\alpha\beta, \gamma) + f(\alpha, \beta\gamma) - \gamma f(\alpha, \beta) = 0$,

4) $f(a, \alpha) = 0$ при $a \in R_0$,

по подгруппе функций вида $(\delta g)(\alpha, \beta) = \alpha g(\beta) - g(\alpha\beta) + \beta g(\alpha)$, где функция $g(\alpha) \in M$, $\alpha \in R$, такова, что $g(a) = 0$, $g(a\alpha) = ag(\alpha)$ при всех $a \in R_0$.

Пусть K — конечное сепарабельное расширение полного поля k с дискретной метрикой; $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{o}$ — кольца целых элементов полей K и k; $\mathfrak{P}$ — простой идеал $\mathfrak{O}$; D — относительная дифферента K/k. В работе доказывается, что если в $\mathfrak{O}$ существует элемент θ такой, что $\mathfrak{O} = \mathfrak{o}[\theta]$, то

$$H^2(\mathfrak{O}_0; \mathfrak{O}\mathfrak{P}^r) \cong \begin{cases} \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r, \text{ если } \mathfrak{P}^r \supset D \\ \mathfrak{O}/D, \text{ если } \mathfrak{P}^r \subset D \end{cases}$$

Для случая, когда k есть конечное расширение поля p-адических чисел, этот результат был установлен Кавада (Kawada Y., Ann. Math., 1951, **54**, № 2, 302—314). Далее показано, что $H^2(\mathfrak{O}', \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r) = 0$, где $\mathfrak{O}'$ — кольцо целых элементов поля инерции расширения K/k.

З. И. Боревич

2012. Теория 2-мерных групп когомологий в полных полях с дискретной метрикой. Мория (Theorie der 2-Cohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern. Moriya Mikao), Proc. Japan. Acad., 1954, **30**, № 9, 787—790 (нем.)

Пусть $\overline{K}$ — конечное сепарабельное расширение поля k, полного относительно дискретной метрики; $k \subset K \subset \overline{K}$; $\mathfrak{o}, \mathfrak{O}, \overline{\mathfrak{O}}$ — кольца целых элементов полей k, K, $\overline{K}$ соответственно. Изучается группа $H^2(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{O}})$, являющаяся естественным образом $\mathfrak{O}$-модулем (определение см. реф. 2011).

Теорема 1. Если $\mathfrak{O}_1$ есть кольцо целых элементов поля $K_1, k \subset K_1 \subset K$, то ядро гомоморфизма ограничения $\rho: H^2(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{O}}) \to H^2(\mathfrak{O}_1, \mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{O}})$ $\overline{\mathfrak{O}}$-изоморфно группе $H^2(\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_1; \overline{\mathfrak{O}})$.

Кольцо $\mathfrak{O}$ называется просто нормальным над $\mathfrak{o}$, если $\mathfrak{O} = \mathfrak{o}[\theta], \theta \in \mathfrak{O}$; $\mathfrak{O}$ называется нормальным над $\mathfrak{o}$, если существует цепочка полей $k = K_0 \subset K_1 \subset \subset \ldots \subset K_m = K$ такая, что кольцо целых элементов поля K_i просто нормально над кольцом целых элементов поля K_{i-1}.

Теорема 2. Если $\mathfrak{O}$ нормально над $\mathfrak{o}$, то в группе $H = H^2(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{O}})$ существует конечное число таких элементов $c_1, \ldots, c_n$, что каждый элемент из H представим в виде $c = a_1c_1 + \ldots + a_nc_n$, $a_i \in \overline{\mathfrak{O}}$, причем из $c = 0$ следует $a_1c_1 = \ldots = a_nc_n = 0$. Далее, для $c \in H$ идеал, состоящий из таких элементов $a \in \mathfrak{O}$, что $ac = 0$, является делителем дифференты D поля K/k. Длина $\overline{\mathfrak{O}}$-композиционного ряда группы H равна u, где $\overline{\mathfrak{P}}^u = D\overline{\mathfrak{O}}$, $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца $\mathfrak{O}$.

Теорема 3. Если $\mathfrak{O}$ нормально над $\mathfrak{o}$, то гомоморфизм ρ теоремы 1 есть гомоморфизм «на».

Для случая $\overline{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}$ теоремы 2 и 3 справедливы без предположения нормальности $\mathfrak{O}$ над $\mathfrak{o}$. Доказательства не приводятся. З. И. Боревич

2013. Аналитическое продолжение в полных нормированных полях: аналитические элементы, предварительные замечания к теореме единственности. Краснер (Prolongement analytique dans les corps valués complets: éléments analytiques, préliminaires du théorème d'unicité. Krasner Marc), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 6, 468—470 (франц.)

Пусть K — нормированное (неархимедовское) поле и D — квазисвязная область множества K' (РЖМат, 1955, 4274). Функция $f(x)$, определенная в области D и принимающая значения в поле K, называется аналитическим элементом, если она является равномерным (на D) пределом рациональных над полем K функций, не имеющих в области D полюсов. Утверждается (теорема единственности), что аналитический элемент, равный нулю на некотором множестве, имеющем (в D) хотя бы одну предельную точку, равен нулю тождественно. Сообщается, что эта теорема будет показана в следующей заметке и рассматриваются некоторые вспомогательные определения, необходимые для этого доказательства.

Замеченная опечатка: на стр. 469, строка 15 снизу — вместо D^* нужно D. М. М. Постников

2014. Аналитическое продолжение в полных нормированных полях: доказательство теоремы единственности; равномерно аналитические функции. Краснер (Prolongement analytique dans les corps valués complets: démonstration de la loi d'unicité; fonctions analytiques uniformes. Krasner Marc), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 13, 745—747 (франц.)

Доказывается сформулированная в предыдущей заметке (см. реф. 2013) теорема единственности. Эта теорема обеспечивает возможность нетривиального аналитического продолжения аналитических элементов (обычный прием аналитического продолжения с помощью рядов Тейлора в неархимедовых полях неприменим). М. М. Постников

2015. О строении групп Галуа некоторых бесконечных расширений. II. Кавада (On the structure of the Galois group of some infinite extensions. II. Kawada Yukiyosi), 東京大學理學部紀要, (Токё дайгаку ригаку-бу киё, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo), 1954, Sec. 1, **7**, № 1, 87—106 (англ.)

Ч. I. см. РЖМат, 1955, 4273.

Рассматривается поле k характеристики 0, содержащее все корни из 1, его нормальное расширение K с группой Галуа $\mathfrak{G}$ и максимальное абелево расширение Ω поля K. Группы Галуа Ω/K и Ω/k обозначаются через Γ_k и $\mathfrak{G}_k$. Доказывается, что отображение сдвига тогда и только тогда отображает фактор-группу $\mathfrak{G}_k$ по коммутанту на подгруппу группы Γ_k, состоящую из элементов, инвариантных относительно всех операторов G, когда каждое число из k является нормой некоторого числа из K. Группы гомологий $H^r(G_1, K^x)$ любой подгруппы G_1 группы G с коэффициентами в мультипликативной группе K^x поля K тогда и только тогда тривиальны во всех размерностях $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, когда выполняются соотношения $H^r(G_1, \Gamma_k \cong H^{r-2}(G_1, Z)$, в которых Z означает бесконечную циклическую группу. При выводе этих утверждений используется, что в предположениях, сделанных относительно поля k, группа Γ_k изоморфна группе характеров тензорного произведения мультипликативной группы k^x поля k на группу всех корней из 1. Доказывается так же аналог приведенных утверждений для случая поля k характеристики p.

В заключение доказывается, что если нульмерная компактная топологическая p-группа $\mathfrak{G}$ обладает конечным числом образующих, ее фактор-группа по коммутанту является свободной абелевой группой и для любого нормального делителя $\mathfrak{N}$ конечного индекса отображение сдвига изоморфно отображает фактор-группу $\mathfrak{G}$ по коммутанту на подгруппу фактор-группы $\mathfrak{N}$ по коммутанту, состоящую из элементов, инвариантных относительно всех операторов из $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{G}$ является свободной топологической группой. Из теории полей классов следует, что если k — поле p-адических чисел, не содержащее корня степени p из 1, то эти условия выполнены для группы Галуа $\mathfrak{G}_k$ максимального p-расширения поля k. Отсюда получается новое доказательство результата референта (Матем. сб., 1947, **20**, № 2, 351—363), согласно которому $\mathfrak{G}_k$ является свободной группой. И. Р. Шафаревич

2016. Алгебры с тривиальными n-мерными группами когомологий. Икеда, Нагао, Накаяма (Algebras with vanishing n-cohomology groups. Ikeda Masatoshi, Nagao Hiroshi, Nakayama Tadashi), Nagoya Math. J., 1954, **7**, June, 115—131 (англ.)

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей конечного ранга над полем Ω и N — ее радикал. Для левого идеала L алгебры A тензорное произведение $Q_L^{n-1} = \underbrace{= A \otimes \ldots \otimes A}_{n-2} \otimes L$ над полем Ω является левым A-модулем, согласно определению

$$x \cdot (x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n-1}) = x \cdot x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_{n-1} -$$

$$- x \otimes x_1x_2 \otimes \ldots \otimes x_{n-1} + \ldots + (-1)^n x \otimes x_1 \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes x_{n-2}x_{n-1};\ x, x_1, \ldots, x_{n-2} \in A;\ x_{n-1} \in L.$$

Теорема. Если при $n \geqslant 2$ все n-мерные группы когомологий $H^n(A, *)$ алгебры A тривиальны, то: 1) фактор-алгебра A/N сепарабельна и 2) для любого левого идеала L алгебры A левый A-модуль $1 \cdot Q_L^{n-1}$ является (M_0)-модулем (РЖМат, 1954, 5460). (При доказательстве предложения 2) конечность ранга A над Ω не используется). Обратно, если алгебра A/N сепарабельна и $1 \cdot Q_N^{n-1}$ является (M_0)-модулем, то $H^n(A, *) = 0$.

З. И. Боревич

2017. О нильпотентных и разрешимых алгебрах. Паттерсон (Note on nilpotent and solvable algebras. Patterson E. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 1, 37—40 (англ.)

Рассматриваются алгебры конечного ранга, не обязательно ассоциативные, над некоторым полем. Доказывается, что если A — такая нильпотентная алгебра ранга $n(n>1)$, что равенство $x^2\neq 0$ верно для всех x из A, то класс алгебры A не больше n. Строится пример, когда граница n достигается. Доказывается, что индекс разрешимой алгебры Ли ранга $n(n>2)$ над полем характеристики нуль, не больше чем $[\log_2(n-2)]+2$. В. А. Андрунакиевич

2018. Канонические пространства ассоциативных алгебр. Ху Сы-цзень (The canonical spaces of associative algebras. Hu Sze-Tsen), Portugaliae math., 1954, **13**, № 2, 87—96 (англ.)

Идеал M ассоциативной алгебры A с единицей над полем F называется допустимым, если он является ядром такого гомоморфизма φ_M: $A\to F$, что $\varphi_M(a)=a$, если $a\in F\subset A$. Пусть на поле F задана произвольная топология. Тогда множество X всех допустимых идеалов алгебры A можно обратить в топологическое пространство. В качестве подбазиса открытых множеств пространства X следует принять множества $W_\alpha(U)$, $\alpha\in A$, где U — открыто в F, состоящие из таких идеалов $M\in X$, что $\varphi_M(\alpha)\in U$. Пространство X называется каноническим пространством алгебры A относительно заданной на поле F топологии.

Пусть I — произвольный идеал кольца многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$ над полем комплексных чисел K, V — алгебраическое многообразие n-мерного аффинного пространства, состоящее из общих нулей всех многочленов идеала I. Доказывается, что алгебраическое многообразие V гомеоморфно каноническому пространству алгебры вычетов $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ относительно обычной топологии поля K.

Пусть S есть Q-пространство Хьюитта (Hewitt E., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, № 1, 45—99), а $C(S, R)$ — алгебра над полем вещественных чисел R непрерывных вещественных функций, определенных на S. Показывается, что каноническое пространство алгебры $C(S, R)$ относительно обычной топологии поля R гомеоморфно пространству S. З. И. Боревич

2019. Теория эндоморфизмов векторного пространства. Хукухара (Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel. Hukuhara Masuo), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1954, sec. 1, **7**, № 2, 129—192 (франц.)

Статья представляет первую часть работы, посвященной изучению эндоморфизмов бесконечномерного векторного пространства алгебраическими средствами, без введения топологии.

Пусть $\mathfrak{R}$ — векторное пространство над полем K, L — эндоморфизм в $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}=N_0\supseteq N_1\supseteq N_2\supseteq\ldots$ и $\{0\}=N^0\subseteq N^1\subseteq N^2\subseteq\ldots$ — две цепочки подпространств, определяемых условиями: $N_n=L^n\{\mathfrak{R}\}$, $L^n\{N^n\}=0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Если первая цепочка стабилизируется, начиная с номера ν: $\ldots N_{\nu-1}\supset N_\nu=N_{\nu+1}=\ldots$, то с ней сопоставляется число ν, если же $N_n\supset N_{n+1}$ для всех n, то считается $\nu=\infty$. Аналогичным образом со второй цепочкой сопоставляется число μ. Конечное или бесконечное число $\max(\mu, \nu)$ называется порядком эндоморфизма. Если μ и ν — оба конечны, то всегда $\mu=\nu$.

Большая часть работы посвящена эндоморфизмам конечного порядка; примером такого эндоморфизма является эндоморфизм $K-I$, где I — единичный, а K — вполне непрерывный операторы.

Доказано, что если порядок L — конечен и равен ν, то существуют такие подпространства N_q^p $(p=1, 2, \ldots, \nu$, $q=0, 1, \ldots, \nu-1$, $p+q\leqslant\nu)$, что $L(N_q^p)=N_{q+1}^{p-1}$ и подпространства N^j и N_k разлагаются в прямые суммы

$$N^j=\sum_{p\leqslant j}N_q^p,\quad N_k=N_\nu+\sum_{q\geqslant k}N_q^p. \qquad (1)$$

Векторные пространства $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}^*$ над одним и тем же полем K называются сопряженными, если для каждой пары векторов $x\in\mathfrak{R}$ и $u^*\in\mathfrak{R}^*$ определено скалярное произведение u^*x со значениями в K, являющееся линейным относительно векторов каждого из пространств $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}^*$ и удовлетворяющее условиям: a) из $u^*x=0$ для всех x из $\mathfrak{R}$ следует $u^*=0$, b) из $u^*x=0$ для всех u^* из $\mathfrak{R}^*$ следует $x=0$. Если L — эндоморфизм в $\mathfrak{R}$, то с помощью равенства $(u^*L)x=u^*(Lx)$ в $\mathfrak{R}^*$ определяется эндоморфизм L^*, присоединенный к L. Доказывается, что если L имеет конечный порядок ν, то порядок присоединенного эндоморфизма также конечен и равен ν. Если, кроме того, N^ν конечномерно, то размерности соответствующих друг другу подпространств N_q^p и ${}_qN^*$, входящих в разложения (1) в пространствах $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}^*$, одинаковы.

Полученные результаты частично переносятся на эндоморфизмы бесконечного порядка. Здесь также существуют подпространства N_q^p $(p=1, 2, \ldots, q=0, 1, \ldots)$, удовлетворяющие условиям $L\{N_q^p\}=N_{q+1}^{p-1}$. Показано, что каждому вектору $x\in\mathfrak{R}$ можно сопоставить по $\bmod A$, где A — некоторое подпространство взаимно простое со всеми N_q^p, такой ряд Σx_q^p, $x_q^p\in N_q^p$, что линейным операциям над векторами соответствуют такие же операции над членами их рядов и если $x\equiv\Sigma x_q^p\ (\bmod A)$, то $Lx\equiv\Sigma Lx_q^p\ (\bmod A)$. В. К. Иванов

2020. О дифференциальной алгебре произвольной характеристики. Окугава (On differential algebra of arbitrary characteristic. Okugawa Kôtaro), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, **A28**, № 2, 97—107 (англ.)

Пусть $\mathfrak{F}$ есть дифференциальное поле произвольной характеристики p с конечным числом попарно перестановочных дифференцирований, $\mathfrak{R}$ — кольцо дифференциальных полиномов над $\mathfrak{F}$ с n образующими $X_1, \ldots, X_n$. Если поле $\mathfrak{F}$ совершенно, то всякий полупростой дифференциальный идеал в $\mathfrak{R}$ называется допустимым. Если же поле $\mathfrak{F}$ несовершенно, то $p\neq 0$ и в $\mathfrak{F}$ существует такое множество элементов $z_1, z_2, \ldots$, что всевозможные произведения $w_1, w_2, \ldots$ степеней этих элементов с показателями $\leqslant p-1$ составляют линейный базис поля $\mathfrak{F}$ над $\mathfrak{F}^p$. Пусть $\mathfrak{R}_p$ — подкольцо кольца $\mathfrak{R}$, порожденное p-ми степенями различных дифференцирований $X_1, \ldots, X_n$. Полупростой дифференциальный идеал M кольца $\mathfrak{R}$ называется допустимым, если для любой системы элементов $A_1, A_2, \ldots$ подкольца $\mathfrak{R}^p$ из включения $\Sigma A_i w_i\in M\cap\mathfrak{R}_p$ вытекают включения $A_i\in M$ для всех $i=1, 2, \ldots$ (это определение не зависит от выбора элементов $z_1, z_2, \ldots$). Доказывается, что любой допустимый полупростой дифференциальный идеал M кольца R имеет конечный базис, иначе говоря, существует конечное множество $N\subset M$ такое, что M является минимальным допустимым полупростым дифференциальным идеалом, содержащим N. Кроме того, для M справедлива теорема разложения, т. е. M является пересечением конечного числа допустимых простых дифференциальных идеалов кольца.

Величина x называется дифференциально S-алгебраической над дифференциальным полем $\mathfrak{F}$ характеристики p, если она обращает в нуль какой-либо дифференциальный полином $C(U)$ над $\mathfrak{F}$, который не может быть записан в виде полинома (над $\mathfrak{F}$) от p-х степеней различных производных неизвестного U. Если $\mathfrak{F}$ не имеет конечного линейного базиса над подполем констант и если u и v дифференциально S-алгебраичны над $\mathfrak{F}$, то существует элемент такой w, что $\mathfrak{F}\langle U, V\rangle = \mathfrak{F}\langle W\rangle$. Для дифференциальных расширений вводится понятие дифференциальной размерности (аналог степени трансцендентности) и доказывается теорема аналогичная известной теореме Штейница для обычных трансцендентных расширений. Полученные результаты обобщают результаты Зейденберга (Seidenberg A., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, 174—190) и Колчина (Kolchin E. R., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, **52**, 115—127). Б. М. Глушков

2021. Кольца, обладающие минимальными двусторонними идеалами. Андрунакиевич В. А., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 3, 405—408

Формулируется ряд предложений, описывающих строение ассоциативных колец, удовлетворяющих тем или иным условиям минимальности. Полупростота и радикал понимаются в смысле Брауна — Маккоя и рассматриваются лишь двусторонние идеалы.

Полупростое кольцо тогда и только тогда является специальной подпрямой суммой простых колец с единицей, когда всякий ненулевой идеал содержит минимальные идеалы. Полупростое кольцо тогда и только тогда является дискретной прямой суммой простых колец с единицей, когда оно удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов.

Через E ($\mathfrak{A}$) (или E) обозначается сумма всех минимальных идеалов с единицей кольца $\mathfrak{A}$. В произвольном кольце $\mathfrak{A}$ имеют место следующие соотношения:

1) $E \cap N = 0$;

2) $N \subseteq E^*$, $E \subseteq N^*$;

3) $E \cap E^* = 0$;

4) $N = N(E^*)$, $E = E(N^*)$,

где E^* и N^* — соответственно аннуляторы идеала E и радикала N.

Кольцо $\mathfrak{A}$ называется присоединенно-полупростым, если оно не содержит минимальных идеалов с единицей; идеал I кольца $\mathfrak{A}$ называется присоединенно-полупростым, если он не содержит минимальных идеалов с единицей кольца $\mathfrak{A}$. Отмечается, что кольцо $\mathfrak{A}$, ограниченное своим радикалом, присоединенно-полупросто; обратное утверждение справедливо по крайней мере в случае, когда фактор-кольцо $\mathfrak{A}/N$ удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов. Аннулятор E^* является суммой всех присоединенно-полупростых идеалов кольца $\mathfrak{A}$.

Если структура идеалов кольца $\mathfrak{A}$ является структурой с дополнениями, то $\mathfrak{A} = E \dotplus N$, причем $N = E^*$. Кольцо $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае представимо в виде прямой суммы $\mathfrak{A} = E \dotplus E^*$, когда каждый его идеал содержит не более конечного числа минимальных идеалов с единицей. Всякое кольцо $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для главных идеалов однозначно представимо в виде прямой суммы $\mathfrak{A} = H \dotplus H^*$, где H — полупростое кольцо ($H = E$), а H^* — присоединенно-полупростое кольцо с минимальными идеалами. Из результатов настоящей работы следует основная теорема 6 предыдущей работы автора (РЖМат, 1956, 257). Е. Г. Шульгейфер

2022. К теории коммутативных областей целостности. Крулль (Zur Theorie der kommutativen Integritätsbereiche. Krull Wolfgang), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 3/4, 230—252 (нем.)

Основной целью работы является установление связей между однозначностью разложения элементов кольца на неразложимые множители и общими свойствами идеалов рассматриваемого кольца. В этом направлении получены, в частности, следующие результаты:

1. Если R — регулярное локальное кольцо, в пополнении R^* которого имеет место однозначная разложимость элементов, то однозначная разложимость имеет место также и в R.

2. Однозначная разложимость элементов имеет место в любом полном регулярном локальном кольце размерности 2.

3. Если R — кольцо с конечным числом максимальных идеалов, то в нем однозначная разложимость элементов имеет место тогда и только тогда, когда она справедлива во всех кольцах частных кольца R по его максимальным идеалам.

Попутно в работе доказано несколько теорем об обратимых идеалах и о так называемых Σ-операциях (Krull W., Idealtheorie, Berlin, 1935, 43). В частности, доказано, что идеал обратим тогда и только тогда, когда он имеет конечный базис и когда его расширение в кольце частных рассматриваемого кольца по любому максимальному идеалу есть главный идеал.

А. И. Узков

2023. Об одной теореме Золотарева. Мойсил (Asupra unei teoreme a lui Zolotarev. Moisil Gr. C.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. si fiz., 1954, 6, № 4, 797—800 (рум., резюме русск., франц.)

Дано краткое доказательство следующей теоремы Золотарева (J. math. pures et appl., 1882, **23**, 153—156): для коммутативного кольца с конечным числом элементов, каждый из которых является или единицей или делителем нуля, следующие два предложения равносильны:

1) существуют два таких элемента h и k, что $ha + kb = 1$;

2) если $az = bz = 0$, то $z = 0$. А. И. Попов

2024. О расширении Шрейера колец без делителей нуля. Сендреи (On Schreier extension of rings without zero-divisors. Szendrei J.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 276—280 (журнал вышел из печати в 1953 г.)

Кольцо T называется расширением Шрейера (или просто расширением) кольца S при помощи кольца R, если в T существует такой идеал S', изоморфный кольцу S, что $T/S' \cong R$. Даются необходимые и достаточные условия, чтобы расширение Шрейера не содержало делителей нуля. Устанавливаются также необходимые и достаточные условия, чтобы расширение Шрейера без делителей нуля имело единицу. Пользуясь этими условиями, автор приводит новое доказательство своего результата о том, что всякое кольцо без делителей нуля всегда обладает минимальным расширением с единицей и без делителей нуля (Acta Sci. Math. Szeged, 1950, **13**, 231—234). Указанные выше результаты формулируются в терминах введенного Редеи понятия косого произведения колец (Redei L., Comment. math. helv., 1947, **20**, 225—264).

В. А. Андрунакиевич

2025. Об отсутствии делителей нуля в кольцах. — Штейнфельд (Über die Nullteilerfreiheit von Ringen. Steinfeld O.), Publs. mathematicae. 1952, **2**, № 3-4, 281—285 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Пусть A — идеал некоторого ассоциативного кольца R. Если кольцо A не содержит делителей нуля, то A называется идеалом без делителей нуля. Доказы-

вается, что если кольцо R содержит такой идеал A без делителей нуля, в котором существует ненулевой элемент, не являющийся правым делителем нуля в R, то кольцо R не имеет делителей нуля. С помощью этого результата дается новый простой вывод о необходимых и достаточных условиях, чтобы расширение ассоциативного кольца не содержало делителей нуля.

В. А. Андрунакиевич

2026. Приведение финитарных операций к бинарным и сингулярным операциям. Терстон (Reduction of finitary operations to binary and singulary operations. Thurston Hugh Ansfrid), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 68—69 (англ.)

Всякая алгебра (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, стр. 7) с n-арной операцией ($1<n<\infty$) может быть включена в качестве подалгебры в алгебру с бинарной операцией. Л. М. Глускин

2027. Комбинаторная теория классических билинейных отношений. Шютценбергер (Théorie combinatoire des relations bilinéaires classiques. Schützenberger Marcel Paul), Bull. sci. math., 1955, **79**, janvier-février, 12—32 (франц.)

Пусть ρ — некоторое бинарное симметричное отношение, определенное между элементами множества E. Для $A \subset E$ через A^* обозначается совокупность всех тех $x \in E$, для которых $x\rho y$ при всех $y \in A$. Отображение $A \to A^{**}$ является операцией замыкания на подмножествах множества E. В работе устанавливается ряд свойств так называемых классических билинейных отношений ρ, характеризуемых следующим условием: если $a\rho b, a \neq b$ и $x \notin a^* \cap b^*$, то пересечение $x^* \cap (a,b)^{**}$ состоит из одного элемента. Отношением такого типа является отношение «ортогональности» между одномерными подпространствами в векторном пространстве (над телом с инволютивным антиавтоморфизмом), в котором задана билинейная эрмитова форма $f(x,y)$: $x\rho y \leftrightarrow f(x,y)=0$. (Для отношения ортогональности вышеуказанное свойство имеет место без предположения $a\rho b$).

З. И. Боревич

2028. Теоретико-структурное исследование некоторых проблем аддитивной теории идеалов. Фукс (A lattice-theoretic discussion of some problems in additive ideal theory. Fuchs L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 3—4, 299—313 (англ.; резюме русс.)

Рассматривается полная структура L с ассоциативным умножением, наибольший элемент которой является единицей относительно умножения. Предполагается также, что в L выполняются левый и правый бесконечные дистрибутивные законы относительно умножения:

$$a\left(\bigcup_\alpha b_\alpha\right) = \bigcup_\alpha (ab_\alpha).$$

и

$$\left(\bigcup_\alpha b_\alpha\right) a = \bigcup_\alpha (b_\alpha a).$$

Правым (левым) частным $a:b$ ($a::b$) элемента $a \in L$ по элементу $b \in L$ называется объединение всех x, удовлетворяющих условию $xb \leqslant a$ ($bx \leqslant a$); если $a:b = a (a::b = a)$, то элемент b называется простым справа (слева) к элементу a. Как и в одной из предыдущих работ автора, (Acta Sci. Math. Szeged., 1950, A12, 105—111), на L определяется операция $\Psi(x)$, ставящая в соответствие каждому элементу $x \in L$ некоторый элемент $\Psi(x)$, также принадлежащий L, причем в настоящей работе никаких ограничений на операцию Ψ вначале не накладывается.

Вводятся следующие определения.

1. Элемент p называется Ψ-простым, если из $x_1 \ldots x_k \leqslant p$ (k — произвольное число) следует, что $x_i \leqslant \Psi(p)$ для некоторого i.

2. Элемент q называется Ψ-примарным, если из $x_1 \ldots x_k \leqslant q$ для каждого i следует либо $x_i \leqslant q$, либо $x_j \leqslant \Psi(q)$ для некоторого $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$.

3. Элемент r называется Ψ-примальным справа (слева), если $\Psi(r)$ совпадает с объединением всех элементов x, удовлетворяющих условию $r : x > r$ ($r :: x > r$); элемент, который одновременно Ψ-примален справа и слева, называется Ψ-примальным.

4. Элемент s называется вполне Ψ-примальным справа, или Ψ^*-примальным справа, если $x \leqslant \Psi(s)$ тогда и только тогда, когда $s ; x > s$.

Об элементе, удовлетворяющем одному из перечисленных выше четырех условий, говорится, что он обладает Ψ-свойством. Каждый Ψ^*-примальный справа элемент является Ψ-примальным элементом; каждый Ψ-примальный справа (слева) элемент является Ψ-примарным элементом; каждый Ψ-примарный элемент является Ψ-простым. Для каждого элемента, обладающего Ψ-свойством, справедливо соотношение $x \leqslant \Psi(x)$. Приводятся несколько примеров операции Ψ и указываются некоторые дополнительные свойства введенных понятий в этих частных случаях.

Затем изучается вопрос о необходимых и достаточных условиях, при которых пересечение конечного числа элементов, обладающих данным Ψ-свойством, будет обладать тем же Ψ-свойством, а также вопрос о единственности представления элемента в виде пересечения конечного числа элементов, обладающих данным Ψ-свойством. При этом для случаев Ψ-простых и Ψ-примарных элементов дополнительно предполагается, что операция Ψ удовлетворяет следующему условию: если $x \leqslant \Psi(y)$, то $\Psi(x) \leqslant \Psi(y)$ (в последнем случае вместо символа «Ψ» употребляется символ «Φ»). Поскольку здесь получены до некоторой степени аналогичные результаты, мы сформулируем их лишь для Φ-простых элементов.

Пересечение $p = p_1 \cap \ldots \cap p_n$ конечного числа Φ-простых элементов $p_1, \ldots, p_n$ тогда и только тогда будет Φ-простым элементом, когда $\Phi(p_i) \geqslant \Phi(p)$ для каждого i и $\Phi(p_i) = \Phi(p)$ по крайней мере для одного i. Элемент x, представимый в виде пересечения $x = x_1 \cap \ldots \cap x_n$ конечного числа Φ-простых элементов $x_1, \ldots, x_n$, называется квази-Φ-простым, если существует такой индекс j ($1 \leqslant j \leqslant n$), что $\Phi(x_j) \leqslant \Phi(x_i)$ для каждого $i = 1, \ldots, n$; в этом случае полагается $\Phi[x] = \Phi(x_j)$. Если элемент $a \in L$ представим в виде пересечения конечного числа Φ-простых элементов, то a можно представить в виде кратчайшего пересечения конечного числа квази-Φ-простых элементов (кратчайшего в том смысле, что ни одну компоненту пересечения нельзя отбросить и пересечение любого подмножества компонент не является квази-Φ-простым), и если

$$a = p_1^* \cap \ldots \cap p_n^* = x_1^* \cap \ldots \cap x_m^*$$

— два таких представления, то $m = n$ и, с точностью до перестановки индексов, $\Phi[p_i^*] = \Phi[x_i^*]$ для каждого i.

Е. Г. Шульгейфер

2029 Д. О полях с расширенными группами многогранников. Волынина Н. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1955.

См. также: 1860, 1910, 1911, 1942, 1959, 2058, 2096, 2130, 2181, 2190, 2286, 2352 Д, 2393, 2395, 2398, 2406, 2407, 2408, 2425, 2454, 2455

ТОПОЛОГИЯ

2030. Об одной проблеме, относящейся к вполне регулярным множествам. Новак (On a problem concerning completely regular sets. Novak J.), Fundam. math., 1954, **41**, № 1, 103—104 (англ.)

С помощью максимального бикомпактного (чеховского) расширения βN множества N натуральных чисел построено такое вполне регулярное, некомпактное пространство, на котором всякая непрерывная функция ограничена.

Примечание референта. Как указал Г. А. Киртадзе, примером такого пространства может служить известное пространство $\dot{S} = [0, \omega_0] \times [0, \omega_1] \setminus (\omega_0, \omega_1)$.
А. Н. Тихонова, Ю. М. Смирнов

2031. О вполне регулярных пространствах. Мрувка (On completely regular spaces. Mrówka S.), Fundam. math., 1954, **41**, № 1, 105—106 (англ.)

При помощи трансфинитной индукции (без обращения к теории бикомпактных расширений) строится такое вполне регулярное некомпактное расширение X множества N всех натуральных чисел, на котором всякая непрерывная функция ограничена (реф. 2030). Для всякого непрерывного отображения f пространства X в топологическое пространство Y с первой аксиомой счетности образ $f(X)$ пространства X замкнут в Y; если при этом Y — метрическое пространство, то $f(X)$ компактно. Ю. М. Смирнов

2032. Об одном классе абстрактных пространств. Папич (Sur une classe d'espaces abstraits. Papič Pavle), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1954, **9**, № 3—4, 197—216 (франц.; резюме хорв.)

Исследуется довольно узкий класс топологических пространств с ветвящейся базой окрестностей (РЖМат, 1954, 4765). Отметим следующие теоремы: 1. Для метризуемости пространства, принадлежащего рассматриваемому классу, необходимо и достаточно, чтобы оно имело ветвящуюся базу ранга $\leqslant \omega_0$ (по определению, база имеет ранг $\leqslant \omega_0$, если каждому ее элементу Γ можно таким образом поставить в соответствие натуральное число n, что каждое Γn содержится в одном из элементов меньшего ранга и не содержится ни в одном из элементов большего или равного ранга). 2. Всякое локально метризуемое пространство рассматриваемого класса метризуемо. 3. Для того чтобы пространство рассматриваемого класса было компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждая его ветвящаяся база имела ранг $\leqslant \omega_0$. 4. Всякое пространство рассматриваемого класса паракомпактно. 5. Всякое метризуемое пространство рассматриваемого класса гомеоморфно некоторому упорядоченному пространству. Далее рассматриваются пространства еще более узкого класса — пространства, имеющие счетный характер и такую ветвящуюся базу, в которой каждая подсистема из попарно непересекающихся элементов не более чем счетна, — и приводятся многочисленные примеры. Ю. М. Смирнов

2033. О псевдометрических пространствах. Папич (Sur les espaces pseudo-distanciés. Papič Pavle), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1954, **9**, № 3—4, 217—228 (франц.; резюме хорв.)

Изучаются псевдометрические пространства и их связь с пространствами, обладающими ветвящимися базами окрестностей (РЖМат, 1954, 4765). Псевдометрическим автор называет всякое топологическое пространство, каждой упорядоченной паре точек которого поставлен в соответствие элемент некоторого упорядоченного множества (с единственным первым элементом, но без второго), причем так, что выполняются условия, заменяющие обычные аксиомы метрического пространства. Ю. М. Смирнов

2034. О полных и регулярно полных пространствах. I, II. Кунуги (Sur les espaces complets et régulièrement complets. I. II. Kunugi Kinjirô), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 7, 553—556; № 10, 912—916 (франц.)

Пусть R — топологическое пространство, а ω_ν — регулярное порядковое число, обладающее следующим свойством: если $v_0(p) \supseteq \ldots \supseteq v_\alpha(p) \supseteq \ldots$ — последовательность окрестностей точки $p \in R$, занумерованная порядковыми числами $< \beta$, где $\beta < \omega_\nu$, то существует окрестность точки p, содержащаяся во всех окрестностях этой последовательности. Пусть в R каждому порядковому числу α $(0 \leqslant \alpha \leqslant \omega_\nu)$ поставлено в соответствие семейство $\mathfrak{B}_\alpha$ окрестностей точек R (окрестностей ранга α), причем одна точка может иметь любое число окрестностей ранга α. Если для каждой окрестности $v(p)$ точки $p \in R$ и каждого порядкового числа $\alpha < \omega_\nu$ найдется такое порядковое число β, $\alpha < \beta < \omega_\nu$, что $v(p)$ содержит окрестность $v_\beta(p)$ ранга β, то автор называет пространство «рангированным» (rangé). В таком пространстве определяется понятие фундаментальной последовательности окрестностей, как последовательность

$$v_0(p_0) \supseteq v_1(p_1) \supseteq \ldots \supseteq v_\alpha(p_\alpha) \supseteq \ldots \qquad 0 \leqslant \alpha < \omega_\mu$$

($\omega_\mu \leqslant \omega_\nu$ — регулярное порядковое число), удовлетворяющей условиям: 1) ранг окрестности $v_\alpha(p_\alpha)$ монотонно возрастает вместе с α; 2) для каждого α, $0 \leqslant \alpha < \omega_\mu$, существует такое β, что $\alpha \leqslant \beta < \omega_\mu$, $p_\beta = p_{\beta+1}$ и ранг окрестности $v_\beta(p_\beta)$ строго меньше, чем ранг окрестности $v_{\beta+1}(p_{\beta+1})$. Пространство называется полным, если любая его фундаментальная последовательность имеет непустое пересечение. Определяется понятие регулярно полного пространства. Доказывается, что в полном пространстве R непустое открытое множество E является множеством второй категории, т. е. не может быть представлено в виде $E = \bigcup_\alpha E_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < \omega_\nu)$, где E_α нигде не плотны в E. Приводится ряд примеров полных и регулярно полных пространств. Описывается процесс пополнения пространства. А. С. Шварц

2035. Пространства траекторий конечных групп преобразований. II. Флойд (Orbit spaces of finite transformation groups. II. Floyd E. E.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 1, 33—38 (англ.)

Работа является непосредственным продолжением предыдущей (РЖМат, 1955, 138). Пусть X — компакт конечной размерности, G — конечная группа преобразований этого пространства, а Y — пространство траекторий, порожденное в X группой G. Автор доказывает, что следующие свойства пространства X переносятся и на Y: а) свойство иметь размерность $\dim = n$, б) свойство ацикличности во всех размерностях над данной бикомпактной коммутативной группой, в) свойство гомологической локальной связности во всех размерностях над группой целых чисел; г) свойство локальной связности и локальной односвязности, д) свойство быть абсолютным окрестностным ретрактом и д′) свойство быть абсолютным ретрактом. Из последнего легко вытекает положительное решение проблемы δ) Борсука и Улама, относящейся к симметрическим степеням топологических пространств (полученное, впрочем, несколько ранее Ganea T., см. РЖМат, 1955, 3109).
Ю. М. Смирнов

2036. О полноте пространств близости. II. Смирнов Ю. М., Тр. Моск. матем. о-ва, 1955, **4**, 421, 438

Подробное изложение результатов, опубликованных ранее (РЖМат, 1954, 2051). В. А. Ефремович

2037. Локальная размерность нормальных пространств. Даукер (Local dimension of normal spaces. Dowker C. H.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 22, 101—120 (англ.)

Исследуются взаимосвязи между различными определениями размерности в самых общих предположениях. Особый интерес, проявляемый к локальной размерности, вполне оправдан основными конечными результатами: отрицательным решением проблемы П. С. Александрова о монотонности размерности dim (определяемой с помощью покрытий) в классе нормальных пространств и сведением проблемы Э. Чеха о монотонности этой же размерности в классе наследственно-нормальных пространств к проблеме равенства $\dim R = \operatorname{loc}\dim R$ для пространств этого рода.

Локальную размерность $\operatorname{loc}\dim R$ автор определяет следующим образом: $\operatorname{loc}\dim R \leqslant n$, если у каждой точки $x \in R$ имеется такая окрестность Ox, что $\dim(|Ox|) \leqslant n$. Аналогично определяются локальные размерности loc ind и loc Ind для так называемых «малой» и «большой» индуктивных размерностей ind и Ind. 1. Для произвольных пространств имеют место соотношения $\operatorname{loc}\operatorname{ind} R = \operatorname{ind} R$, $\operatorname{loc}\operatorname{Ind} R \leqslant \operatorname{Ind} R$ и $\operatorname{loc}\dim R \leqslant \dim R$, для T_3-пространств $\operatorname{ind} R \leqslant \operatorname{loc}\operatorname{Ind} R$, а для T_4-пространств $\dim R \leqslant \operatorname{Ind} R$ и $\operatorname{loc}\dim R \leqslant \operatorname{loc}\operatorname{Ind} R$ (точки не обязаны быть замкнутыми множествами). 2. Для паракомпактных тотально-нормальных пространств (последние по определению суть такие T_4-пространства, в которых каждое открытое множество является локально-конечной в себе суммой открытых множеств типа F_σ) $\operatorname{loc}\operatorname{Ind} R = \operatorname{Ind} R$. Для произвольного множества M тотально-нормального пространства R всегда $\dim M \leqslant \dim R$, $\operatorname{loc}\dim M \leqslant \operatorname{loc}\dim R$ и $\operatorname{loc}\operatorname{Ind} M \leqslant \operatorname{loc}\operatorname{Ind} R$. 3. Для каждого T_3- и, одновременно, T_4-пространства R путем прибавления одной замкнутой точки можно построить такое T_3- и T_4-пространство $\bar{R}$, что $\dim R \leqslant \operatorname{loc}\dim R$, причем если R — хаусдорфово или наследственно-нормально, то таким же оказывается и $\bar{R}$. Отсюда вытекает, что проблемы (монотонности размерности dim) П. С. Александрова и Э. Чеха эквивалентны проблемам равенства $\dim R = \operatorname{loc}\dim R$ для соответствующего класса пространств.

Многочисленные примеры, приводимые автором, позволяют разобраться во всей сложной обстановке, имеющейся в данном вопросе. Наиболее интересным из них является нормальное (T_1, T_4)-пространство M с размерностями $\operatorname{loc}\operatorname{ind} M = \operatorname{loc}\dim M = \operatorname{loc}\operatorname{Ind} M = \operatorname{ind} M = 0 < \dim M = \operatorname{Ind} M = 1$, являющееся усложнением известного примера Лунца (Докл. АН СССР, 1949, 66, 801—803): пусть все числа отрезка $[0;1]$ разбиты на конгруентные классы Q_λ по модулю рациональных чисел. Выберем $\aleph_1$ таких классов Q_β, $\beta < \omega_1$. Пространство M состоит из всевозможных пар (α, x), где α — порядковое число, меньшее ω_1, а x — действительное число отрезка $[0;1]$, удовлетворяющее условию $x \notin \bigcup_{\beta \geqslant \alpha} Q_\beta$. Топология — тихоновская. Отрицательное решение проблемы П. С. Александрова получим, взяв пространство $\tilde{M}$: согласно 3 оно нормально и $\dim \tilde{M} = \operatorname{Ind} \tilde{M} = 0$, в то время как $\dim M = \operatorname{Ind} \tilde{M} = 1$.

Примечание референта. Для этой цели построение 3 не обязательно: в силу известного результата Веденисова (Уч. зап. МГУ, 1939, 30, № 3, 131—140) пространство M можно гомеоморфно вложить в тихоновское произведение D^c континуального числа нормальных двоеточий $D = \{a, b\}$, являющееся бикомпактным, нульмерным во всех размерностях пространством. Ю. М. Смирнов

2038. Вложение в однородные пространства. Шимрат (Embedding in homogeneous spaces. Shimrat M.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 20, 304—311 (англ.)

Топологическое (метрическое) пространство S автор называет (метрически) однородным, если для каждой пары точек $a \in S$, $b \in S$ существует гомеоморфное (изометричное) отображение пространства S на себя, переводящее a в b.

Доказаны теоремы:

I. Произвольное топологическое пространство S может быть вложено в однородное пространство S^*, удовлетворяющее следующим условиям: 1) если S есть T_0, T_1, хаусдорфово, регулярное, нормальное или вполне нормальное пространство, то S^* обладает этим же свойством; 2) если S есть T_1-пространство, то S замкнуто в S^*; 3) если S связно или локально связно, то таково же и S^*.

II. Произвольное метрическое пространство S можно изометрично отобразить на замкнутое подмножество некоторого метрически однородного пространства S'. С. С. Рышков

2039. Обобщение теоремы Кантора — Бендиксона. Падмавалли (A generalization of Cantor-Bendixon theorem. Padmavally K.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, 20, № 3, 305—306 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть m — регулярное кардинальное число, большее чем локальный вес данного локально-бикомпактного регулярного пространства R в любой его точке, и пусть ω_m — первое порядковое число мощности m. Тогда для любого множества X, лежащего в пространстве R, производная порядка $\omega_m + 1$ совпадает с производной порядка ω_m.

При этом (в силу локальной бикомпактности пространства R) локальный вес пространства R в данной его точке x можно понимать по желанию и как наименьшую мощность множества окрестностей точки x, образующих локальную базу пространства в этой точке, и как наименьшую мощность множества окрестностей точки x, дающих в пересечении эту точку.

Автор показывает на примере, что без требования регулярности пространства R теорема перестает быть верной. П. С. Александров

2040. Пример открытого отображения одномерного компакта на гильбертов параллелепипед. Локуциевский О. В., Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика 7, 118—130

Построение указанного в заглавии отображения ведется при помощи спектров и основано на возможности открыто отобразить на квадрат топологическое произведение плоского кольца на канторов дисконтинуум. Существенным отличием этого примера от предыдущих примеров на эту тему является то, что отображаемый компакт гомеоморфен некоторому подмножеству образа. Я. М. Каждан

2041. О неустойчивых гомеоморфизмах. Вильямс (A note on unstable homeomorphisms. Williams Robert F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 308—309 (англ.)

Гомеоморфное отображение f компактного метрического пространства X на себя называется неустойчивым, если существует такое положительное число δ, что каковы бы ни были две различные точки x и y пространства X при некотором n имеет место неравенство $\rho[f^n(x), f^n(y)] > \delta$. Строятся примеры континуумов, допускающих неустойчивое отображение на себя. А. С. Пархоменко

2042. Об одном специальном классе эйлеровых графов. Беблер (Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen. Bäbler F.), Comment. math. helv., 1953, 27, № 2, 81—100 (нем.)

В первой части статьи исследуется некоторый специальный класс эйлеровых графов — класс «цугов». Цугом называется граф, все циклы которого проходят через некоторую вершину и который может быть представлен в виде прямой суммы циклов; число последних называется порядком цуга. Автор приводит доказательства ряда теорем, полученных ранее Оре (Ore O., Elem. Math., 1951, **6**, № 3, 49—53), и выводит из них ряд следствий, характеризующих структуру цугов, а также устанавливает необходимое и достаточное условие того, чтобы число a_n было числом способов разложения цуга n-го порядка на циклы.

Во второй части рассматривается задача, решенная ранее Сениором (Senior, Amer. J. Math., 1951, **73**, 663—689). Пусть $\Pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ — невозрастающая последовательность натуральных чисел. При каких необходимых и достаточных условиях, наложенных на Π, существует граф

A) с вершинами E_i степени $p_i (i = 1, \ldots, m)$;

B) без петель с вершинами тех же степеней;

C) связный с вершинами тех же степеней;

D) связный без петель с вершинами тех же степеней;

Сениор показал, что упомянутые условия таковы:

A. $\Sigma_i^m p_i$ — четное число;

B. $F_2(\Pi) = \frac{1}{2}\Sigma_1^m p_i - m + 1 \geqslant 0$; (I)

C. $F_1(\Pi) = \frac{1}{2}\Sigma_1^m p_i - p_1 \geqslant 0$; (II)

D. Одновременное выполнение (I) и (II).

Сениор установил также, при каких дополнительных условиях существует единственный граф без петель с данным распределением степеней вершин. Автор предлагает новый способ синтеза графов (по данным степеням вершин), в котором существенно используются цуги, и получает результаты Сениора значительно более коротким способом.

Примечание референта. В статье имеется много опечаток. Например, на стр. 90 в формуле Π' вместо mnr следует читать mr; на стр. 91—92 в формулах для a_n (в виде дроби) в знаменателе выпущен показатель степени при 2; на стр. 92, 14 строка сверху, вместо $n < h$ следует читать $n + 1 < h$; на стр. 95, 6 строка сверху, вместо $F_1(\Pi) < 0$ следует читать $F_1(\Pi) > 0$ и др.

Статья содержит ряд неточностей. Наиболее существенные из них:

1) стр. 89. Утверждение автора о том, что всякий простой цуг n-го порядка можно отобразить на цуг Z_n^0 указанным автором способом, неверно;

2) стр. 97 (последний абзац пункта 6). Неверно утверждение автора, что граф G' всегда содержит цикл длины не менее 3 (рассмотреть, например, $\Pi = \{6,3,3,2\}$)

О. Б. Лупанов

2043. О проблеме четырех красок. Ратиб (Sur le problème des quatre couleurs. Ratib Ismail), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 247 (франц.)

Доклад на Математическом конгрессе в Амстердаме. Указывается, что Эррера показал невозможность существования на несводимых картах колец, состоящих из четного числа шестиугольников и четного числа пятиугольников. Автор утверждает, что он доказал это (аналогичным методом) и для нечетного числа шестиугольников.

С. С. Рышков

2044. Топологическая характеристика расширения в E^3. Хомма, Киносита (On a topological characterization of the dilatation in E^3. Homma Tatsuo, Kinoshita Shin'ichi), Osaka Math. J., 1954, **6**, № 1, 135—143 (англ.)

Доказывается следующая теорема. Пусть h — гомеоморфное отображение трехмерного пространства E^3 на себя, удовлетворяющее следующим условиям: 1) для всякой точки $x \in E^3$ последовательность $h^n(x)$ сходится к началу координат 0, когда $n \to +\infty$; 2) для всякой точки $x \in E^3$, за исключением точки 0, последовательность $h^n(x)$ сходится к бесконечно удаленной точке, когда $n \to -\infty$. Тогда, если отображение h сохраняет ориентацию пространства, то оно топологически эквивалентно преобразованию $x' = {}^1/_2 x$, $y' = {}^1/_2 y$, $z' = {}^1/_2 z$; в декартовых координатах.

Если же h меняет ориентацию пространства на противоположную, то оно топологически эквивалентно преобразованию $x' = {}^1/_2 x$, $y' = {}^1/_2 y$, $z' = -{}^1/_2 z$. Для случая плоскости теорема была доказана Кerекиярто (Kerékjártó B. V., Acta Litt. ac Szeged, 1934; 4).

А. С. Пархоменко

2045. Антуановы феномены и геометрические свойства простых дуг. Киркор А., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, 2, № 6, 259—263

Антуановы феномены и геометрические свойства простых дуг. Киркор (Antoine phenomena and geometric properties of simple arcs. Kirkor A.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1954, 2, № 6, 257—260 (англ.)

Даны некоторые результаты относительно связи между топологическими и геометрическими свойствами дуг в трехмерном евклидовом пространстве.

Простая дуга в трехмерном евклидовом пространстве E_3 называется беспорядочно вложенной, если не существует гомеоморфизма E_3 на себя, при котором эта дуга переходит в прямолинейный отрезок. Первый пример простой дуги, беспорядочно вложенной в E_3, построил Антуан в 1921 г. В дальнейшем класс беспорядочно вложимых объектов был значительно расширен; в частности, референтом были найдены аналогичные построения в евклидовых пространствах более высокой размерности. В 1948 г. Р. Фокс и Е. Артин дали новые примеры беспорядочного вложения в трехмерное евклидово пространство простых дуг и некоторых других объектов. Их примеры показывают, что такого рода дуги могут обладать, в отличие от дуг, построенных Антуаном, довольно хорошими геометрическими свойствами, в частности, иметь всюду, кроме одного из концов, ориентированную касательную, непрерывно зависящую от точки касания.

В реферируемой работе дано построение беспорядочно вложенной дуги, имеющей всюду, включая концы, неориентированную касательную, являющееся небольшим видоизменением построения Р. Фокса и Е. Артина; исследуются также некоторые геометрические свойства антуановых дуг (антуановой называется дуга, содержащая антуаново множество, т. е. нульмерное множество, дополнение которого в E_3 имеет нетривиальную фундаментальную группу). Устанавливается, что всякая антуанова дуга содержит несчетное множество точек, в которых ее касательная (даже неориентированная) не существует. Таким образом, показывается, что геометрические свойства антуановых дуг не могут быть достаточно регулярными. С другой стороны выясняется, что, хотя построения самого Антуана приводят к дугам бесконечной длины, однако можно построить антуанову дугу конечной длины. А. А. Иванов

2046. Когомологическое определение размерности для локально-компактных хаусдорфовых пространств. Коэн (A cohomological definition of dimension for locally compact Hausdorff spaces. Cohen Haskell), Duke Math. J., 1954, **21**, № 2, 209—224 (англ.)

На основе данной референтом гомологической характеристики размерности бикомпактов вводится гомоло-

гическое определение размерности локально-бикомпактных хаусдорфовых пространств, приводящее в свою очередь к новому топологическому инварианту $cd(X, X_0)$, т. е. к гомологической размерности пространства X по отношению к его замкнутому подмножеству X_0.

Пусть G — произвольная ненулевая абелева группа (группа коэффициентов). Для бикомпакта Φ и замкнутого в Φ множества Φ_0 определяем $cd(\Phi, \Phi_0)$ как наименьшее из тех целых $n \geqslant 0$, для которых выполнено условие: каково бы ни было замкнутое множество $A \subset \Phi$, каждый элемент группы $\nabla^n(A, \operatorname{mod} A \cap \varphi_0)$ продолжаем на все Φ; т. е. гомоморфизм высечения (в смысле референта, см. Изв. АН СССР, сер. матем., 1942, 6, 227—282) группы $\nabla^n(\Phi, \operatorname{mod} \Phi_0)$ в группу $\nabla^n(A, \operatorname{mod} A \cap \Phi_0)$ есть гомоморфизм на всю эту группу.

Пусть теперь X — локально-бикомпактное хаусдорфово пространство, X_0 — его замкнутое подмножество. Определяем $cd(X, X_0)$ как наибольшее из всех чисел $cd(\Phi, \Phi \cap X_0)$, взятых для всевозможных бикомпактов $\Phi \subset X$; если среди этих чисел нет наибольшего, то полагаем $cd(X, X_0) = \infty$; для пустого X_0 пишем cdX вместо $cd(X, X_0)$; для пустого X полагаем $cdX = -1$. Из результатов референта следует, что размерность cdX для бикомпактного X по целочисленной области коэффициентов совпадает с обычной размерностью $\dim X$ (определенной при помощи покрытий).

Имеет место теорема: cdX есть наибольшее из двух чисел $cd(X, X_0)$ и cdX_0. Далее $cdX \leqslant \dim X$ и $cdX \leqslant \operatorname{ind} X$. Если $\operatorname{ind} X = 1$, то $cdX = 1$. Для локально-компактных метризуемых пространств со счетной базой размерность cdX совпадает с обычной. Размерность cdX равна нулю тогда и только тогда, когда X не содержит связных многоточечных бикомпактов. Имеет место «неравенство произведения» $cd(X \times Y) \leqslant cdX + cdY$, а также равенство $cd(X \times Y) = n + 1$, если $cdX = n \geqslant 0$ и $cdY = 1$; этим доказывается и гипотеза референта, заключающаяся в справедливости аналогичной формулы для обычной размерности.

Для размерности cdX имеет место теорема суммы. Среди размерностей $cd(X, X_0)$ по всевозможным группам коэффициентов имеется наибольшая; она получается, если за группу коэффициентов взять аддитивную группу целых чисел. П. С. Александров

2047. **О локальной несвязности евклидовых пространств. Гранас** (On local disconnection of Euclidean spaces. Granas A.), Fundam. math., 1954, 41, № 1, 42—48 (англ.)

Пусть S^{n+1} есть $(n+1)$-мерная сфера, а F — ее замкнутое подмножество. Э. Чех доказал (Čech E., Publ. Faculté sci. Univ. Masaryk, 1933, 188, 35—38), опираясь на понятие локальных чисел Бетти, что число $b_0(a, S^{n+1} \setminus F)$ компонент, на которые F разбивает сферу S^{n+1} в точке $a \in F$, является топологическим инвариантом. Автор дает другое доказательство этой теоремы, опирающееся на принадлежащее Борсуку понятие когомотопической группы. Именно, автор определяет локальное когомотопическое число $b_n(a, F)$ множества F в точке $a \in F$ и доказывает, что $b_0(a, S^{n+1} \setminus F) = b_n(a, F) + 1$. Из топологической инвариантности числа $b_n(a, F)$ следует, что и число $b_0(a, S^{n+1} \setminus F)$ топологически инвариантно. J. W. Jaworowski

Примечание редакции. Теорема представляет весьма частный случай упомянутого результата Чеха, доказанного также П. С. Александровым (C. r. Acad., sci., 1934, 193, 227—229).

2048. **Конечные семейства отображений в компактных топологических многообразиях. Вейер** (Endliche Abbildungsscharen in kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten. Weier Josef), Monatsh Math., 1955, 59, № 1, 1—21 (нем.)

Доказана следующая теорема. Пусть $f^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1$ — непрерывное семейство отображений компактного топологического многообразия в себя, а ε — положительное число. Тогда существует такое семейство g^τ отображений этого многообразия, что для любого τ имеем $\rho(f^\tau, g^\tau) < \varepsilon$, и каждое отображение g^τ имеет лишь конечное число неподвижных точек. Если при этом отображения f^0 и f^1 имеют лишь конечное число неподвижных точек, то семейство g^τ можно выбрать так, чтобы было $g^0 = f^0$, $g^1 = f^1$. Эта теорема была использована автором в одной из предыдущих работ (РЖМат, 1955, 139). В. Г. Болтянский

2049. **О понятии делителя и кратного отображений. Борсук** (Sur la notion de diviseur et de multiple des transformations. Borsuk K.), Bull. Acad. polon. sci. Cl. 3, 1955, 3, № 2, 81—85 (франц.)

О понятии делителя и кратного отображений. Борсук К., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1955, 3, № 2, 81—85

Непрерывное отображение $f \in Y^X$ компактного пространства X в абсолютный окрестностный ретракт Y называется делителем отображения $g \in Y^X$ (обозначение: $f \mid g$), если для каждого компактного пространства $X_1 \supset X$ из существования распространения отображения f на X_1 вытекает существование распространения отображения g на X_1. Определяемое таким образом соотношение является соотношением между гомотопическими классами. Автор обозначает через (f) гомотопический класс отображения f. Доказано, что необходимым и достаточным условием делимости $f \mid g$ является существование такого отображения $\psi \in Y^Y$, что $(g) = (\psi \circ f)$.

Если Y есть n-мерная сфера, а $\dim X \leqslant n$ (этот случай называется в дальнейшем хопфовским), то гомотопические классы отображений пространства X в Y образуют абелеву группу, называемую хопфовской группой. Оказывается, что в хопфовском случае делимость $f \mid g$ имеет место тогда и только тогда, когда $(g) = m \cdot (f)$, где m — некоторое натуральное число, а умножение на m понимается в смысле хопфовской группы.

Если хопфовская группа пространства X имеет конечную систему образующих (автор называет этот случай элементарным), то каждый ненулевой класс имеет только конечное число делителей.

Отображение $g \in Y^X$ называется примитивным, если оно является делителем каждого из своих делителей. В элементарном хопфовском случае каждое отображение имеет примитивный делитель. Неизвестно, имеет ли это место для произвольного отображения полиэдра в полиэдр.

Число гомотопически различных кратных отображения f называется порядком отображения f. В элементарном хопфовском случае существует лишь конечное число единичных (т. е. являющихся делителями всех остальных) гомотопических классов. Показывается, что в случае отображений тора в себя существует бесконечно много единичных гомотопических классов. Наконец, введено понятие делимости в размерности m.

A. Kosiński

2050. **Локальные топологические инварианты. Гриффитс** (Local topological invariants. Griffiths H. B.), Proc. London Math. Soc., 1953, ser. 3, 3, № 11, 350—367 (англ.)

Пусть M — локально-компактное сепарабельное метрическое пространство. Группа $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^r(x, M)$ согласно Уайлдеру (R. L. Wilder) называется r-мерной группой локальной связности пространства M в точке x, если для каждой достаточно малой окрестности U_1 найдется

такая окрестность $\varkappa^r U_1$), что для всякой $U_2 \subseteq \varkappa^r(U_1)$ образ естественного гомоморфизма $i\colon \mathscr{H}^r_c(M, M \setminus U_1) \to \mathscr{H}^r_c(M, M \setminus U_2)$ изоморфен $\mathfrak{K}$. Здесь, как и в дальнейшем, приняты следующие обозначения: U_1, U_2 и т. д. суть всегда окрестности точки x с компактным замыканием; $\varkappa^r(U)$ есть «окрестностная» функция, т. е. функция, аргументом и значениями которой служат такие окрестности точки x, причем $\overline{\varkappa^r(U)} \subseteq U$; в дальнейшем рассматриваются также «окрестностные» функции от нескольких аргументов $\mu(U_1, \ldots, U_r)$, удовлетворяющие условию $\overline{\mu(U_1, \ldots, U_r)} \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_r$; $\mathscr{H}^r_c(X, X_0)$ означает r-мерную чеховскую группу гомологий $X \bmod X_0$ (где, как и дальше, рассматриваются лишь циклы и гомологии с компактными носителями) по дискретной группе коэффициентов.

Показывается, что соответствующий гомотопический инвариант $\mathfrak{K}^r_{\simeq}(x, M, y)$, получаемый при замене относительной группы гомологий $\mathscr{H}^r_c(X, X_0)$ относительной гомотопической группой $\pi_r(X, X_0, y)$, не имеет локального характера. Поэтому введены локальные гомотопические группы пространства M, исходя из другой идеи Уайлдера, следующим образом.

Пусть $r > 0$. Обозначим через $\pi_r(X_1 \mid X_2, y)$ образ гомоморфизма вложения $\pi_r(X_1, y) \to \pi_r(X_2, y)$, где $y \in X_1 \subseteq X_2$ (y — внутренняя точка X_1). Тогда M считают имеющим локальную гомотопическую группу $\mathfrak{C}^r_{\simeq}(x)$, если существует такая окрестностная функция $\Gamma^r(U)$, что для всякой достаточно малой окрестности U_1 и для всякой линейно-связной окрестности $U_2 \subseteq \Gamma^r(U_1)$ (такие окрестности всегда существуют в предположении, что M локально-связно) будет $\pi_r(\overline{U}_2 \setminus x \mid \overline{U}_1 \setminus x) \approx \mathfrak{C}^r_{\simeq}(x)$. На M накладываются еще некоторые небольшие ограничения локального характера и тогда $\mathfrak{C}^r_{\simeq}(x)$ будет локальным топологическим инвариантом. Аналогичным образом определяются локальные гомологические группы $\mathfrak{C}^r_v(x)$, где вместо $\pi_r(X, y)$ берутся группы вьеторисовских гомологий $\mathscr{H}^r_v(X)$. Приравнивая их нулю, получаем введенное Уайлдером определение r-неразрезающей точки.

Доказываются некоторые свойства введенных понятий. Отметим теорему: Если для точки $x \in M$ имеем $\mathfrak{C}^r_{\simeq}(x) = 0$, $0 \leqslant r \leqslant p$, то для всякой окрестности U найдется такая окрестность V, что всякое отображение в $\overline{V} \setminus x$ не более, чем p-мерного комплекса $\simeq 0$ в $\overline{U} \setminus x$ ($\simeq$ есть знак гомотопности). Наиболее интересным является предложение, называемое автором локальной теоремой Гуревича: Если M есть LC^n (т. е. локально-связно в смысле Лефшеца в размерностях $\leqslant n$, $n \geqslant 2$) и если $\mathfrak{C}^1_{\simeq}(x) = \mathfrak{C}^r_{\simeq}(x) = 0$, $0 \leqslant r < n$, то $\mathfrak{C}^n_{\simeq}(x)$ существует и имеет конечное число образующих тогда и только тогда, когда это справедливо для $\mathfrak{C}^n_v(x)$, и в этом случае будет $\mathfrak{C}^n_v(x) \approx \mathfrak{C}^n_{\simeq}(x)$. Аналогичная теорема справедлива и при $n = 1$ в случае коммутативности группы $\mathfrak{C}^1_{\simeq}(x)$. В приложении дается формально-логическое определение понятий чисто локального и локального топологического предикатов.

М. Ф. Бокштейн

2051. К теории многообразий. Гриффитс (A contribution to the theory of manifolds. Griffiths H. B.), Michigan Math. J., 1953—1954, 2, № 1, 61—89 (англ.)

Кроме построенных в предыдущей работе (реф. 2050) локальных инвариантов $\mathfrak{C}^r_{\simeq}(x)$ и $\mathfrak{C}^r_v(x)$, рассматривается еще аналогичный инвариант $\mathfrak{C}^r_c(x)$, построенный с помощью чеховских гомологий, а также новые локальные инварианты $\mathfrak{D}^r_v(x)$ и $\mathfrak{D}^r_c(x)$. Группа $\mathfrak{D}^r_v(x, G)$ (здесь, как и в дальнейшем, указываем явно группу коэффициентов G) определяется следующим образом. Пространство M называется имеющим в точке x группу $\mathfrak{D}^r_v(x, G)$, если существуют такая окрестность U^r_δ и такие окрестностные функции (реф. 2050) $\delta^r(U)$, $\delta^r(U, U')$, $\delta^r(U, U', U'')$, что если $U_1 \subseteq U^r_\delta$, $U_2 \subseteq \delta^r(U_1)$, $U_3 \subseteq \delta^r(U_1, U_2)$, $U_4 \subseteq \delta^r(U_1, U_2, U_3)$, то $\mathscr{H}^r_c(\overline{U}_2 \setminus U_3 \mid \overline{U}_1 \setminus U_4, G) \approx \mathfrak{D}^r_v(x, G)$. Аналогично определяется группа $\mathfrak{D}^r_c(x, G)$. Оказывается, что (для любой дискретной группы G) группы $\mathfrak{C}^r_c(x, G)$ и $\mathfrak{C}^r_v(x, G)$ существуют или не существуют одновременно и изоморфны друг другу; то же верно и для $\mathfrak{D}^r_v(x, G)$ и $\mathfrak{D}^r_c(x, G)$. Далее, если M есть $lc^r(G)$ (т. е. локально-связно по G в гомологическом смысле в размерностях $\leqslant r$) и существует $\mathfrak{C}^r_v(x, G)$ с конечным числом образующих, то существует и $\mathfrak{D}^r_v(x, G)$, причем они изоморфны; обратно, если пространство M есть $lc^r(G)$ и, кроме того, $(r+1)$-локально-связно по G в точке x, то из существования $\mathfrak{D}^r_v(x, G)$ вытекает существование $\mathfrak{C}^r_v(x, G)$ и изоморфизм между ними.

Введенные локальные инварианты служат для определения обобщенных n-мерных многообразий. Это локально-компактные метрические пространства размерности n, локально-связные в соответствующем смысле в размерностях $\leqslant n$ и для которых соответствующий локальный инвариант для любой точки и любого значения размерности совпадает с этим инвариантом для n-мерного евклидова (или локально-евклидова) пространства. Такие многообразия обозначаются через $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{C}_{\simeq})$, $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{C}_v, G)$ и т. д.

Доказываются теоремы: 1) $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{C}_{\simeq})$ есть $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{C}_v, I)$ (I — аддитивная группа целых чисел), обратное неверно; 2) $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{D}_v, G)$ есть $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{D}_c, G)$, $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{C}_v, G)$ есть $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{C}_c, G)$ и обратно для любой дискретной группы G. 3) Если G есть поле или группа целых чисел, то $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{C}_v, G)$ есть $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{D}_v, G)$, и обратно. 4) $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{C}_v, G)$ есть $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{D}_v, Q)$, но не обратно ($Q$ — поле рациональных чисел). 5) Если G — поле, то $\mathfrak{M}^n(\mathfrak{D}_c, G)$ есть обобщенное многообразие в смысле Уайлдера, и обратно. 6) Если M компактно и ориентируемо, то для него имеет место теорема двойственности Пуанкаре. 7) Компактное $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{D}_v, I)$ есть окружность, а $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{D}_v, I)$ всегда локально-евклидово. Далее исследуется связь введенных понятий с понятием избегаемости.

Статья требует предварительного ознакомления с предыдущей работой (реф. 2050), продолжением которой она является, так как введенные там понятия заново не определяются.

М. Ф. Бокштейн

2052. Одна теорема об отображениях в «локальной» топологии. Гриффитс (A mapping theorem in

«local» topology. Griffiths H. B.), J. London Math. Soc., 1953, 28, part 3, № 111, 269—278 (англ.)

Рассматривается локальный инвариант $\mathfrak{D}^r_{\simeq}(x)$, определяемый так же, как $\mathfrak{D}^r_v(x)$, но с заменой групп гомологий гомотопическими группами, причем на пространство M накладываются такие же ограничения, как при определении $\mathfrak{C}^r_{\simeq}(x)$ (реф. 2050 и 2051). Вводится следующее определение. Отображение p пространства M в себя, оставляющее неподвижной точку x, называется нейтральным вблизи x, если существуют такие окрестностные функции $\varphi^r(U)$ и $\varphi^r(U, U')$ в x (зависящие от x и p), что если $U_2 \subseteq \varphi^r(U_1)$, $U_3 \subseteq U_2$, $U_4 \subseteq \varphi^r(U_1, U_3)$, то p отображает $\overline{U}_2 \setminus U_3$ внутрь $\overline{U}_1 \setminus U_4$. При этом p называется r-нейтральным вблизи x, когда, кроме того, выполняется условие: $\lambda_{p(z)z} p'^r_z = i^r_z$, где $\lambda_{p(z)z}$ — гомоморфизм между группами гомотопий, порожденный движением по произвольному пути, ведущему из точки $p(z)$ в точку z и лежащему внутри $\overline{U}_1 \setminus U_4$, i есть тождественное отображение $\overline{U}_2 \setminus U_3 \to \overline{U}_1 \setminus U_4$, $p' = p / \overline{U}_2 \setminus U_3$, а i^r_z и p'^r_z — соответствующие гомоморфизмы гомотопических групп,

$$i^r_z : \pi_r(\overline{U}_2 \setminus U_3, z) \to \pi_r(\overline{U}_1 \setminus U_4, z),\ p'^r_z : \pi_r(\overline{U}_2 \setminus U_3, z) \to \pi_r(\overline{U}_1 \setminus U_4, p(z)).$$

Доказывается следующая теорема: Пусть $f : M, x \to N, y$ и $g : N, y \to M, x$ — отображения, для которых y является внутренней точкой образа $f(M)$, а x — внутренней точкой образа $g(N)$, и такие, что fg и gf r-нейтральны соответственно вблизи y и x. Тогда если $\mathfrak{D}^r_{\simeq}(y)$ существует и является абелевой группой с конечным числом образующих, то и $\mathfrak{D}^r_{\simeq}(x)$ существует, и они изоморфны. Аналогичный результат имеет место и для групп $\mathfrak{C}^r_{\simeq}(x)$ при соответствующем видоизменении понятия нейтральности.

Статью можно читать независимо от предыдущих двух работ, так как все необходимые определения в ней повторены заново. М. Ф. Бокштейн

2053. Фундаментальная группа суммы двух пространств, имеющих одну общую точку. Гриффитс (The fundamental group of two spaces with a common point. Griffiths H. B.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 19, 175—190 (англ.)

Изучается фундаментальная группа $\pi_1(X, x)$ объединения двух хаусдорфовых пространств X_1 и X_2, удовлетворяющих первой аксиоме счетности и имеющих лишь одну общую точку x. Доказываются теоремы, являющиеся обобщением известных фактов теории конечных полиэдров.

Если X_1 и X_2 замкнуты в X, то гомоморфизмы вложения $i_r : \pi_1(X_r, x) \to \pi_1(X, x)$, $i = 1, 2$, мономорфизм $(i_1 \wedge i_2) : \pi_1(X_1, x) \circ \pi_1(X_2, x) \to \pi_1(X, x)$, где кружок $\circ$ обозначает свободное произведение групп. Если к тому же по крайней мере одно из пространств X_1, X_2 локально односвязно в точке x, то отображение $(i_1 \wedge i_2)$ изоморфно.

Строится пример, показывающий, что последнее условие не может быть отброшено; для изучения примера разрабатывается алгебраический аппарат.

При построении примера используется верная лемма 3:1, однако в доказательстве ее, приведенном в статье, содержится ошибка: на стр. 184, на 21 строке неявно использовано предположение о связности множества F, чего, вообще говоря, может не быть. С. С. Рышков

2054. Фундаментальная группа суммы двух пространств, имеющих одну общую точку. Исправление. Гриффитс (The fundamental group of two spaces with a common point: A correction. Griffiths H. B.) Quart. J. Math., 1955, 6, № 22, 154—155 (англ.)

Исправление ошибки, допущенной в одноименной статье автора (реф. 2053). С. С. Рышков

2055. Произведения фундаментальных групп. Гриффитс (Products of fundamental groups. Griffiths Hubert Brian), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 222—223 (англ.)

Краткое изложение доклада на Международном математическом конгрессе в Амстердаме. Результаты опубликованы ранее; см. реф. 2953. С. С. Рышков

2056. Гомотопическая теорема сложения. Ху Сыцзэнь (The homotopy addition theorem. Hu Sze-tzen), Ann. Math., 1953, 58, № 1, 108—122 (англ.)

Излагается теория гомотопических групп. Дается строгое формальное доказательство гомотопической теоремы сложения: элемент гомотопической группы $\pi_n(X, x_0)$, определенный отображением $f : S^n \to X$ — границы симплекса T^{n+1} в пространство X, равен сумме элементов группы $\pi_n(X, x_0)$, порожденных отображением f на гранях этого симплекса, если f переводит весь $(n-1)$-мерный остов симплекса T^{n+1} в точку x_0. С. С. Рышков

2057. Специальная гомотопическая теорема сложения. Манкрес (The special homotopy addition theorem. Munkres James), Michigan Math. J., 1953—1954, 2, № 2, 127—131 (англ.)

Пусть $u : J^{n+1} \to X$ — такой куб пространства X, что все $(n-1)$-мерные грани евклидова куба J^{n+1} отображаются в точку $x \in X$.

Доказывается формула

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \lambda^0_i u - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \lambda^1_i u = 0,$$

где $\lambda^\varepsilon_i u = u(x_1, \ldots, x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$, $\varepsilon = 0, 1$, т. е. доказывается, что сумма взятых с соответствующими знаками элементов гомотопической группы $\pi^n(X, x)$, определенных n-мерными гранями куба u, равна нулю.

Факт этот хорошо известен и может быть доказан различными способами, хотя (как отмечает и автор) до недавнего времени было дано лишь одно (довольно сложное) доказательство (см. реф. 2056). С. С. Рышков

2058. Инварианты непрерывных отображений. Дэевель (Invariants d'une application continue. Deheuvels René), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 41, № 2, 90—93 (англ.)

Излагается некоторая конструкция, по существу являющаяся обобщением конструкции точных пар Масси (РЖМат, 1054, 2909) и позволяющая получить спектральную последовательность любого непрерывного отображения. М. М. Постников

2059. О группах $H(\Pi, n)$. III. Операции и препятствия. Эйленберг, Мак-Лейн (On the groups $H(\Pi, n)$. III. Operations and obstructions. Eilenberg Samuel, MacLane Saunders), Ann. Math., 1954, 60, № 3, 513—557 (англ.)

Пусть Π, G — абелевы группы и q, n — такие целые числа, что $q \geqslant n \geqslant 0$. Операцией P авторы называют функцию, относящую любой конечной последовательности классов когомологий $x_i \in H^{n_i}(K, L; \Pi)$ $(i = 1, \ldots, r)$ (где K произвольный полный полусимплициальный комплекс, L_i $(i = 1, \ldots, r)$ — некоторые его подкомплексы,

а $n_i \leqslant n$) элемент $P(x_1, \ldots, x_r) \in H^{q-s}(K \setminus \bigcup L_i; G)$; требуется, чтобы эта функция была:

1) перестановочна с гомоморфизмами групп когомологий, порожденными симплициальными отображениями;

2) удовлетворяла соотношению; $P(x_1, \ldots, x_j, \delta x, x_{j+1}, \ldots, x_r) = \gamma(\Sigma_{i>j}(n-n_i)) \cdot \delta P(i^* x_1, \ldots, i^* x_j, x, i^* x_{j+1}, \ldots, i^* x_r)$, где $x_i \in H^{n_i}(M; \Pi)$, $x \in H^m(K, \Pi)$, $i: K \subset M$ — отображение вложения и $\delta: H^m(K, \Pi) \to H^{m+1}(M, K; \Pi)$ — когранничный гомоморфизм;

3) аддитивна, в том смысле, что если $L_1 = \ldots = L_r = 0$, $n_1 = \ldots = n_r = n$, то $P(x_1, \ldots, x_{r+1}, x_r' + x_r'') = P(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r') + P(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r'') + P(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r', x_r'')$.

Оказывается, что операции P находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами группы $H^\alpha(\Pi, n; G)$. Именно, данной операции P соответствует класс $P(b)$, где $b \in H^n(\Pi, n; \Pi)$ — фундаментальный класс когомологий, а данному элементу $y \in H^q(\Pi, n; G)$ — операция $y\vdash$, определяемая следующим образом (для простоты мы ограничимся случаем $r = 1$): для $x \in H^n(K, \Pi)$ элемент $y \vdash x$ равен T_y^*, где $T: K \to K(\Pi, n)$ — симплициальное отображение, относящее симплексу $\sigma \in K$ симплекс комплекса $K(\Pi, n)$, возникающий при рассмотрении коцикла x на симплексе σ.

Примечание референта. Аналогичную теорию для пространств развил Серр (РЖМат, 1954, 3271). Операции $y\vdash$ для $r = 1, 2$ являются весьма частными случаями операций, построенных референтом (Докл. АН СССР, 1951, **79**, № 4, 573).

Используя операции $y\vdash$, авторы доказывают некоторые теоремы распространения и классификации непрерывных отображений. Эти теоремы также являются весьма частными случаями теорем сформулированных (без доказательства) в указанной выше заметке референта. М. М. Постников

2060. О квадратах в многообразиях Грассмана. У Вэнь-цзюнь (格拉斯曼流形中的平方運算. 吳文俊), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **2**, № 4 203—230 (кит.)

Подробные доказательства результатов, опубликованных ранее (Wu, Wen-tsün, C. r. Acad. sci., 1950, **230**, 580—611, 918—920). Дано полное вычисление квадратов в многообразиях Грассмана. Как следствие доказывается, что для пучка (m — 1)-мерных сфер классы Штифеля — Уитни по mod 2 полностью определяются с помощью операций $\cup$ и Sq^2. Резюме автора

2061. Комплексные параллелизуемые многообразия. Ван Сян-чжун (Complex parallisable manifolds. Wang Hsien-Chung), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 5, 771—776 (англ.)

Изучаются параллелизуемые комплексные аналитические многообразия (т. е. многообразия, на которых существуют n линейно-независимых аналитических векторных полей).

Основной результат работы (теорема 1): Всякое компактное комплексно-аналитическое параллелизуемое многообразие аналитически гомеоморфно фактор-пространству G/D некоторой компактной группы Ли G по дискретной подгруппе D.

Теорема 2. Когомологическое кольцо аналитических дифференциальных форм параллелизуемого компактного комплексно-аналитического многообразия $M = G/D$ изоморфно когомологическому кольцу комплексной алгебры Ли группы G.

Интересным следствием теоремы 2 является тот факт, что n-мерное параллелизуемое компактное комплексно-аналитическое многообразие является келеровым в том и только в том случае, когда оно аналитически гомеоморфно комплексному тору комплексной размерности n. Р. В. Гамкрелидзе

2062. О канонических многообразиях и характеристических циклах алгебраических многообразий. Галбурэ (Despre varietăţile canonice şi ciclyrile caracteristice ale unei varietăţi algebrice. Galbură Gh.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romine Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 1, 61—64 (рум.; резюме русс., франц.)

Доказывается, что канонические многообразия алгебраического многообразия совпадают с черновскими циклами этого многообразия. К тому же выводу пришел Ходж в 1951 г. для двух частных случаев Hodge W. V. D., Proc. London Math. Soc., 1951, II-a, **1**, 138—151). Доказательство опирается на результаты Тодда (Todd I. A., Proc. London Math. Soc., 1937, II-a, 127—238) и референта (РЖМат, 1954, 2061).

Р. В. Гамкрелидзе

2063. О продолжениях псевдогруппы локальных изоморфизмов дифференцируемого многообразия. Мацусима (Sur le prolongement d'un pseudogroupe d'isomorphismes locaux d'une variété différentiable. Matsushima Yozô), Nagoya Math. J., 1954, **7**, June, 103—110 (франц.)

Отображение $f: v \to u$, где v и u — открытые непустые множества гладкого многообразия, автор называет локальным изоморфизмом, если f есть гомеоморфизм и оба отображения f и f^{-1} дифференцируемы. Если $g: v' \to u'$ совпадает с f на $v' \subset v$, то g называется ограничением изоморфизма f; в записи: $g < f$.

Множество $\mathfrak{G}$ локальных изоморфизмов называется псевдогруппой локальных изоморфизмов на M, если оно удовлетворяет условиям: 1) если $g \in \mathfrak{G}$ и $f < g$, то $f \in \mathfrak{G}$; 2) если $f \in \mathfrak{G}$, то и $f^{-1} \in \mathfrak{G}$; 3) если $f, g \in \mathfrak{G}$, то и $f \circ g \in \mathfrak{G}$.

Даются определения продолжения псевдогруппы локальных изоморфизмов и изоморфного продолжения псевдогруппы локальных изоморфизмов.

Пусть $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ — псевдогруппы на дифференцируемых многообразиях M и M'. Если существует псевдогруппа $\tilde{\mathfrak{G}}$ на дифференцируемом многообразии $\tilde{M}$, являющаяся изоморфным продолжением псевдогрупп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$, то говорят, что $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ изоморфны ($\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{G}'$); если $\mathfrak{G}$ есть продолжение псевдогруппы $\mathfrak{G}'$ и изоморфное продолжение псевдогруппы $\mathfrak{G}$, то устанавливается гомоморфизм $\mathfrak{G} \tilde{\to} \mathfrak{G}'$.

Пусть G — группа Ли; обозначим через $L(g)$ левый сдвиг группы G на элемент $g \in G$. Множество $\mathfrak{G}(G)$ ограничений всех левых сдвигов естественным образом образует псевдогруппу многообразия G. Псевдогруппа $\mathfrak{G}(G)$ называется ассоциированной с группой Ли G. Доказывается теорема (3):

Пусть G_1 и G_2 — группы Ли; справедливы утверждения: а) $\mathfrak{G}(G_1) \simeq \mathfrak{G}(G_2)$ тогда и только тогда, когда $G_1 \simeq G_2$; б) $\mathfrak{G}(G_1) \tilde{\to} \mathfrak{G}(G_2)$ тогда и только тогда, когда $G_1 \tilde{\to} G_2$; ($G_1 \simeq G_2$ и $G_1 \tilde{\to} G_2$ — изоморфизмы абстрактных групп, соответствующих группам Ли).

В следующей статье автор предполагает изучить продолжение псевдогрупп, ассоциированных с группами Ли, в свете применений теоремы (3). С. С. Рышков

2064. О почти периодических движениях. Торнехаве (On almost periodic movements. Tornehave Hans), Kgl. danske videnskab. selskab. Mat.-fys. medd., 1954, **28**, № 13, 1—42 (англ.)

Рассматриваются почти периодические в смысле Бора движения в метрическом пространстве M. Если $x = g(u_1, \ldots, u_m)$ — непрерывная функция, периодическая по каждому переменному с периодом 2π ($-\infty < u_\nu < \infty$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$; $x \in M$), и

$\beta_1, \ldots, \beta_m$ — рационально независимые и действительные числа, то функция $x = g(\beta_1 t, \ldots, \beta_m t)$ называется диагональным движением.

Доказано, что если пространство M полно и каждому компактному множеству $F \subset M$ соответствует такое число Δ, что любые две точки $x, y \in F$ с расстоянием $C(x, y) \leqslant \Delta$ могут быть связаны в M непрерывной кривой, которая непрерывно зависит от x, y и стягивается в точку при $x = y$, то любое равномерно непрерывное семейство почти периодических движений может быть равномерно аппроксимировано семейством диагональных движений. Показывается, что для соленоидальных пространств аналогичное предложение не имеет места.

Далее вводится понятие гомотопии между двумя почти периодическими движениями и показывается, что подобная гомотопия порождает гомотопию между двумя непрерывными отображениями тора (определенного числа измерений) в M. В частности, доказано, что каждое почти периодическое движение в полном пространстве, удовлетворяющем сформулированному выше условию связности, гомотопно периодическому движению тогда и только тогда, когда каждое непрерывное отображение тора (любого числа измерений) в M гомотопно отображению тора в замкнутую кривую, лежащую в M. Почти периодические движения, гомотопные периодическим, автор называет приводимыми. Согласно результатам Фенкеля и Эссена (Fenchel W., Jessen B., Dan. mat. fys. Medd., 1935, 13, № 6, 1—28), на полной поверхности, допускающей гиперболическую метрику, каждое почти периодическое движение приводимо, в то время как на поверхности ориентируемого или неориентируемого тора существуют неприводимые почти периодические движения. Автор показывает существование неприводимых почти периодических движений для сферы и проективной плоскости.

В заключение формулируется следующая теорема: Каждое почти периодическое движение в полном пространстве M, удовлетворяющем сформулированному выше условию связности, приводимо, если гомотопические группы $\pi_m(M)$ тривиальны для $m > 1$, а все абелевы подгруппы фундаментальной группы $\pi_1(M)$ являются циклическими. М. И. Грабарь

2065. **Три астрофизических вывода из топологических утверждений. Гранас, Яворовский** (Trzy wnioski astrofizyczne z twierdzeń topologicznych. Granas A., Jaworowski J. W.), Postępy astron., 1954, 2, № 4, 190—191 (польск.)

Приводятся формулировки трех известных теорем. 1) Теорема Борсука: Если на сфере S определена непрерывная функция f, значения которой суть точки плоскости, то на S найдутся две такие диаметрально противоположные точки p, p^*, что $f(p) = f(p^*)$ (Borsuk K., Fundam math., 1933, 20, 178). 2) Теорема Какутани: Если на сфере S с центром O определена непрерывная функция f с вещественными значениями, то найдутся три такие точки p_1, p_2, $p_3 \in S$, что векторы $\overrightarrow{Op_1}$, $\overrightarrow{Op_2}$, $\overrightarrow{Op_3}$ взаимно перпендикулярны и $f(p_1) = f(p_2) = f(p_3)$ (Kakutani. S., Ann. math., 1942, 43, 739). 3) Теорема Дайсона: Если на сфере S определена непрерывная функция с вещественными значениями, то найдутся две такие пары диаметрально противоположных точек p, p^* и q, q^*, что $pp^* \perp qq^*$ и $f(p) = f(p^*) = f(q) = f(q^*)$ (Dyson F. J., Ann. Math., 1951, 54, 534). Отмечается очевидный факт, что эти теоремы остаются справедливыми, если в них сферу заменить произвольной выпуклой поверхностью. Даются элементарные астрофизические интерпретации этих теорем. (Так, теорема Борсука означает, что на поверхности любой планеты найдется пара точек-антиподов, в которых температура и атмосферное давление одинаковы.) Новых результатов в работе не содержится.

М. Ф. Бокштейн

2066. **Морфология фигур и конфигураций. Герман** (Morphologie der Figuren und der Konfigurationen. Herrmann Horst), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 229—230 (нем.)

Автор называет фигурой геометрический образ $F = \{M, \subset_{ij}\}$, состоящий из упорядоченной совокупности множеств $\{M\} = M_0, M_1, \ldots$, между элементами которых $Z_i^\alpha \in M_j$ установлены определенные отношения инцидентности $Z_i^\alpha \subset_{ij} Z_j^\beta$, $i < j$. Элементы множества M_j называются клетками порядка i. Под морфологией фигур понимаются все те высказывания о них, которые могут быть получены с помощью структурных чисел (количество выбранных отношений инцидентности). Конфигурации представляют собой те фигуры, в которых число отношений инцидентности $Z_i^\alpha \subset_{ij} Z_j^\beta$ для каждого $Z_i^\alpha \in M_i$ постоянно и равно a_{ij}, точно так же, как для каждого $Z_j^\beta \in M_j$ число таких отношений равно a_{ji}. Если M_i — конечные множества с числом элементов, равным a_i, то с конфигурацией может быть сопоставлена определенная матрица (a_{ij}), причем полагают $a_{ii} = a_i$. Автор, в частности ставит вопрос о реализуемости заданной матрицы с помощью структурного комплекса (т. е. комплекса, в котором элементы множеств M_i представлены точками, а отношения инцидентности между ними—соединяющими их отрезками) или с помощью иных (не тривиальных) реализаций, и отмечает, например, возможность реализовать некоторые совокупности матриц с помощью проективных конфигураций. Н. И. Кованцов

2067. **Об одном аналитическом свойстве гомеоморфизмов, определенных на плоских континуумах. Куратовский** (Sur une propriété analytique des homéomorphies définies sur des continus plans. Kuratowski K.), Bul. Acad. polon. sci., 1954, 2, № 1, 9—12 (франц.)

См. РЖМат, 1955, 1127.

2068. **О многогранных разбиениях замкнутых поверхностей. Рингель** (Über polyedrische Zerlegungen geschlossener Flächen. Ringel Gerhard. Hab.-Schr., Math.-naturwiss. F., Bonn, 1953, Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B. № 19, 1956 (нем.)

2069. **Леонард Эйлер и кенигсбергские мосты. Ньюман** (Leonhard Euler and the Koenigsberg bridges. Newman James R.), Scient. American, 1953, 189, № 1, 66—70, 100 (англ.)

2070. **Топологические теоремы двойственности. Ч. 1. Замкнутые множества. Александров П. С.**, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, 48, 1—110

В монографии систематически излагаются топологические теоремы двойственности для (замкнутых) множеств, лежащих в евклидовых пространствах.

Первая глава посвящена изложению простейших алгебраических понятий комбинаторной топологии — Δ и ∇ групп Бетти комплексов. Во второй главе излагаются прямые и обратные групповые спектры. В третьей главе определяются Δ- и ∇-группы компактов, составляющие объект доказываемых далее законов двойственности. Определение Δ-групп дается как при помощи нервов покрытий, так и в метрической форме при помощи ε-циклов и гомологий. Доказывается эквивалентность обоих определений, изоморфность этих групп в случае полиэдра комбинаторным, откуда получается топологическая инвариантность последних. В этой же главе определяются локальные Δ-группы

компактов и доказывается, что в случае полиэдров они изоморфны комбинаторным. В четвертой главе дается топологически инвариантное определение гомологических многообразий M^n с помощью локальных групп и доказывается двойственность Пуанкаре, т. е. изоморфизм $\Delta^p M^n \approx \Delta^{n-p} M^n$. С помощью двойственности Пуанкаре доказывается комбинаторный случай закона двойственности Александера — Понтрягина, т. е. изоморфизм $\Delta^p \alpha \approx \Delta^{n-p-1}(M^n \setminus \alpha)$, где α — замкнутый подкомплекс многообразия M^n. В пятой главе доказывается общий закон двойственности Понтрягина в ∇-форме, т. е. изоморфизм $\nabla^p \varphi \approx \approx \Delta^{n-p-1}(M^n \setminus \varphi)$, где φ — компакт, лежащий в M^n. В шестой главе доказывается тот же закон двойственности в Δ-форме, т. е. двойственность $\Delta^p \varphi | \Delta^{n-p-1}(M^n \setminus \varphi)$. Специальной подготовки по топологии от читателя не требуется. К. А. Ситников

См. также: 1991, 2011, 2012, 2016, 2018, 2274, 2334, 2449, 2450, 2451

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2071. Теорема об изоморфизме для конечноаддитивных мер. Остин (An isomorphism theorem for finitely additive measures. Austin Donald G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 205—208 (англ.)

Непустая совокупность S подмножеств некоторого множества называется кольцом, если она вместе с любыми двумя множествами содержит их сумму и их разность, и полукольцом, если из $E_1 \in S$, $E_2 \in S$ следует $E_1 \cap E_2 \in S$ и из $E_1 \in S$, $E_2 \in S$, $E_1 \subset E_2$, следует существование такой цепочки множеств $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \ldots \subset C_n$, что $C_i \setminus C_{i-1} \in S$, $C_1 = E_1$, $C_n = E_2$. Пусть X — счетное множество и P — счетное полукольцо его подмножеств, содержащее X. Пусть на P определена конечноаддитивная неотрицательная действительная функция μ_P, обращающаяся в нуль только на пустом множестве, нормированная ($\mu_P(X) = 1$) и такая, что для всякой точки $x \in X$ существует последовательность содержащих эту точку множеств $E_n \in P$ с $\lim \mu_P(E_n) = 0$. Пусть R — минимальное кольцо, содержащее P; μ_R — естественное конечноаддитивное продолжение меры μ_P на R; M — совокупность таких множеств E, что для каждого $\varepsilon > 0$ в R имеются множества $G \supset E$, $H \supset X \setminus E$ с $\mu_R(G \cap H) < \varepsilon$; и μ — продолжение меры μ_R на M, определяемое формулой $\mu E = \inf \mu_R(F)$ ($F \in R$, $F \supset E$). Всякую такую функцию μE автор называет f-a мерой. Существенной чертой f-a меры является то, что все одноточечные множества имеют меру нуль; в частности, f-a мера не может быть счетноаддитивной.

Пример: X — счетное множество, плотное на интервале $[0,1]$, M — совокупность подмножеств множества X, замыкание которых измеримо по Жордану, $\mu(E)$ для $E \in M$ есть мера Жордана замыкания множества E. Чтобы получить этот пример из предыдущей конструкции, достаточно принять за P совокупность пересечений множества X со всевозможными рациональными подинтервалами $[\alpha, \beta)$ интервала $[0,1)$.

Главный результат автора состоит в том, что всякая f-a мера изоморфна одной из мер, описанных в этом примере. В. А. Рохлин

2072. Об определении топологии через общие производные базы. Хаупт, Пок (Über die durch allgemeine Ableitungsbasen bestimmten Topologien. Haupt Otto, Pauc Christian Y.), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **36**, 247—271 (нем.)

Рассматривается булево σ-кольцо $\mathfrak{z}$ подмножеств некоторого множества E, в котором задана σ-конечная полная мера m. С помощью соответствующей производной базы вводится $\mathfrak{a}$-топология (или так называемая претопология; см. РЖМат, 1954, 2912) в множестве E. Подробно изучаются свойства $\mathfrak{a}$-топологии, соответствующей слабым в смысле Витали базам производных, например рассматриваются вопрос о совпадении класса измеримых множеств по mod $\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ есть σ-идеал нульмерных множеств, с классом $\mathfrak{a}$-борелевских множеств и вопрос о почти всюду $\mathfrak{a}$-непрерывности в смысле $\mathfrak{a}$-топологии измеримых функций. Л. Д. Кудрявцев

2073. Замечания о сходимости измеримых множеств и измеримых функций. Марчевский (Remarks on the convergence of measurable sets and measurable functions. Marczewski E.), Colloq. math., 1955, **3**, № 2, 118—124 (англ.)

Пусть $\mathbf{M}$ — борелевское тело подмножеств основного множества X, содержащее X, и μ — счетноаддитивная неотрицательная числовая функция (мера), определенная на $\mathbf{M}$. Множество $A \in \mathbf{M}$ называется атомом относительно μ, если $\mu(A) > 0$ и для всякого множества $B \in \mathbf{M}$, содержащегося в A, либо $\mu(B) = \mu(A)$, либо $\mu(B) = 0$. Мера μ называется чисто атомической, если X разлагается в сумму атомов, и строго положительной, если она равна нулю только для пустого множества.

Главное содержание работы составляют следующие замечания:

1. Для того чтобы всякая последовательность измеримых функций, сходящаяся по мере, сходилась почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы мера μ была чисто атомической.

2. Строго положительная мера является чисто атомической.

3. Для того чтобы всякая последовательность измеримых функций, сходящаяся по мере, сходилась всюду, необходимо и достаточно, чтобы мера μ была строго положительной. В. А. Рохлин

2074. Заметка о теореме Шеффера. Багемил (A note on Scheeffer's theorem. Bagemihl F.), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 2, 149—150 (англ.)

Рассматриваются подмножества числовой прямой. Доказывается, что если множество E конечно или счетно и множество K 1-й категории, то существует резидуальное множество R (т. е. $(-\infty, \infty) \setminus R$ 1-й категории) такое, что для каждого $r \in R$ пересечение $E[r] \cap K$ пусто, где $E[r] = \{e + r;\ e \in E\}$. Эта теорема является обобщением результата Шеффера (Scheefer L., Acta math., 1884, 5, 279—296). Указывается аналогичная теорема относительно меры: если множество E конечно или счетно и множество Z имеет меру нуль, то существует множество T полной меры такое, что для каждого $t \in T$ пересечение $E[t] \cap Z$ пусто. Б. С. Содномов

2075. Прямые соединения пространств с мерой. Зинк (Direct unions of measure spaces. Zink Robert E.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 1, 57—74 (англ.)

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой (т. е. μ есть мера, определенная на σ-кольце Σ подмножеств основного множества X; по поводу терминологии см. Халмош П. Теория меры, М., 1953), и пусть каждому $x \in X$ отвечает пространство с мерой (Y_x, Σ_x, ν_x), причем множества Y_x попарно не пересекаются. Делается несколько замечаний по поводу неоднократно изучавшейся проблемы построения на множестве $S = \bigcup Y_x$ $(x \in X)$ меры, связанной с мерами μ, ν_x формулой Фубини.

Пусть сначала меры μ и ν_x полны и $\mu(X) = \nu_x(Y_x) = 1$ $(x \in X)$. Пусть для (действительной) функции f, определенной на X,

$$\overline{\int} f(x)\, d\mu(x) = \inf_{\pi} \sum_{i=1}^{n_\pi} \sup_{x \in A_i} f(x)\, \mu(A_i),$$

где π — разбиение множества X на конечное число n_π измеримых подмножеств A_i, и пусть для произвольного множества $E \subset S$

$$\lambda^*(E) = \overline{\int} \nu_x^*(E_x)\, d\mu(x),$$

где $E_x = E \cap Y_x$, а ν_x^* — внешняя мера, отвечающая ν_x. Совокупность тех $E \subset S$, для которых при любом $H \subset S$

$$\lambda^*(H) = \lambda^*(H \cap E) + \lambda^*(H \cap (S \setminus E)),$$

обозначается через $C(\lambda^*)$, а функция λ^*, рассматриваемая на $C(\lambda^*)$, — через λ. Оказывается, что $C(\lambda^*)$ — алгебра и λ — (неотрицательная) счетноаддитивная функция на $C(\lambda^*)$. Эта функция обычным образом продолжается в минимальную полную меру γ, определенную на σ-алгебре $C(\gamma^*)$. Оказывается, что для всякого множества $E \in C(\gamma^*)$ функция $\nu_x(E_x)$ определена для почти всех x, измерима и удовлетворяет соотношению $\gamma(E) = \int \nu_x(E_x)\, d\mu(x)$. Пространство с мерой $(S, C(\gamma^*), \gamma)$ называется прямым соединением пространств с мерой (Y_x, Σ_x, ν_x) относительно (X, Σ, μ).

Пусть $\mathfrak{U}$ — совокупность всех множеств $E \subset S$, для которых функция $\nu_x(E_x)$ определена для почти всех x и измерима. $\mathfrak{U}$ не есть, вообще говоря, σ-кольцо; если $\mathfrak{M}$ — любое σ-кольцо, содержащееся в $\mathfrak{U}$, то функция τ, определенная для $E \in \mathfrak{M}$ соотношением $\tau(E) = \int \nu_x(E_x)\, d\mu(x)$, есть мера, и, следуя Халмошу, автор называет в этом случае пространство с мерой $(S, \mathfrak{M}, \tau)$ прямой суммой пространств с мерой (Y_x, Σ_x, ν_x) относительно (X, Σ, μ). Таким образом, прямое соединение есть специальным образом определенная прямая сумма. Если, например, (X, Σ, μ) и (Y_x, Σ_x, ν_x) суть единичные отрезки с обычной мерой Лебега, то $C(\gamma^*)$ совпадает с $C(\lambda^*)$ и есть совокупность тех множеств $E \subset S$, для которых $\nu_x(E_x)$ почти всюду совпадает с характеристической функцией некоторого множества $D \in \Sigma$.

В статье содержится распространение изложенных определений на случай ненормированных мер μ, ν_x и на случай σ-конечной меры μ, а также ряд других замечаний. В. А. Рохлин

2076. К теории Уорда — Данжуа функций множества. Пок, Рютовиц (Essai d'une théorie de Ward — Denjoy pour fonctions de cellule. Pauc Christian Y. Rutovizt Denis), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 20, 1956—1958 (франц.)

Пусть μ — борелевская мера, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств некоторого множества R, содержащей R. Пусть $\mathfrak{J}$ — непустое семейство множеств $I \in \mathfrak{B}$ с конечными положительными мерами. Отмечается, что при некоторых условиях для аддитивной функции $\psi(I)$ множества $I \in \mathfrak{B}$ существует μ_0-измеримая функция f на E_0 (μ_0 — мера, являющаяся продолжением μ, E_0 — некоторое множество) такая, что $\psi(I)$ разлагается на сумму μ_0-интеграла от f по $I \mathcal{E}$ (где $\mathcal{E}$ — некоторое множество) и некоторого интеграла Беркиллэ по I. П. И. Романовский

2077. О дифференцировании аддитивных функций множества. Фикера (Sulla derivazione delle funzioni additive d'insieme. Fichera Gaetano), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 2, 366—397 (итал.)

Семейство $\{I\}$ абстрактных множеств называется полукольцом или элементарным семейством, если выполняются условия: 1) оно замкнуто относительно пересечения, т. е. содержит пересечение любых двух его множеств; 2) пусть I' и I'' — множества семейства, причем $I' \subset I''$; тогда существует конечное число попарно непересекающихся множеств $I_1, I_2, \ldots, I_n$ семейства, для которых $I'' \setminus I' = \bigcup_1^n I_k$ и сумма $\bigcup_0^h I_k$, где $I_0 = I'$, при любом $h \leqslant n$ принадлежит $\{I\}$. Сумма любого конечного числа множеств семейства $\{I\}$ называется множеством типа (p).

Пусть $\mu(I)$ и $F(I)$ — действительные неотрицательные аддитивные функции, определенные на элементарном семействе $\{I\}$, причем $\mu(I)$ вполне аддитивная (мера). Для фиксированного I_0 из $\{I\}$ через $\Theta[F, I_0]$ обозначается класс всевозможных действительных функций $f(x)$ на I_0, обладающих свойствами: 1) $f(x)$ μ-суммируема на I_0, $f(x) \geqslant 0$ $(x \in I_0)$; 2) $\int_I f(x)\, d\mu \leqslant F(I)$ для любой части I множества I_0, принадлежащей семейству $\{I\}$.

Рассматривается функционал $J_{I_0}(f) = \int_{I_0} f(x)\, d\mu$ для любой $f(x) \in \Theta[F, I_0]$. Если он имеет максимум в $\Theta[F, I_0]$, то $F(I)$ называется μ-дифференцируемой (дифференцируемой относительно меры μ) на множестве I_0, а функция $f(x)$, для которой достигается максимум, называется μ-производной (производной относительно μ) и обозначается через $F'(x)$ или $dF/d\mu$. Для аддитивной функции $F(I)$ со значениями любого знака μ-производная определяется равенством $F'(x) = p_F'(x) - q_F'(x)$, где $p_F(I)$ и $q_F(I)$ — положительная и отрицательная вариации функции $F(I)$, предполагаемые ограниченными.

Следующие определения и теоремы относятся к аддитивным функциям ограниченной вариации, определенным на элементарном семействе $\{I\}$, и к неотрицательной мере $\mu(I)$, определенной на этом же семействе. Функция называется μ-сингулярной на $I_0 \in \{I\}$, если ее μ-производная на I_0 μ-эквивалентна нулю (последнее понятие аналогично понятию равенства нулю почти всюду). Функция $F(I)$ называется μ-абсолютно непрерывной, если для каждого I_0 из $\{I\}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma > 0$, $\sigma = \sigma(J_0)$ такое, что для каждого множества $P \subset I_0$ типа (p) с $\mu(P) < \sigma$ выполняется неравенство $|F(P)| < \varepsilon$.

Главные результаты автора состоят в следующем, где $F(I)$ — аддитивная функция ограниченной вариации.

I. Каждая аддитивная функция ограниченной вариации μ-дифференцируема на любом множестве I_0 из $\{I\}$.

II (Теорема Лебега—Радона—Никодима). Для того чтобы функция $F(I)$ при любом фиксированном $I_0 \in \{I\}$ допускала представление $F(I) = \int_I f(x)\, d\mu$, где $I \subset I_0$, $I \in \{I\}$, $f(x)$ μ-суммируема на I_0, необходимо и доста-

точно, чтобы $F(I)$ была μ-абсолютно непрерывна. В этом случае разность $f(x) - dF/d\mu$ μ-эквивалентна нулю.

III (Разложение Лебега). Для любого фиксированного $I_0 \in \{I\}$ имеет место разложение $F(I) = F^*(I) + \int_I (dF/d\mu)\, d\mu$, где $I \subset I_0$, $F^*(I)$ μ-сингулярна на I_0; второе слагаемое есть μ-абсолютно непрерывная функция множества. Такое разложение функции $F(I)$ на μ-сингулярную и μ-абсолютно непрерывную части единственно.

Автор указывает, что эти результаты, повидимому, являются новыми, тогда как аналогичные результаты для вполне аддитивных функций множества хорошо известны. В. М Дубровский

2078. К вопросу о предельном переходе под знаком интеграла Лебега. Лейфман Л. Я., Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 2, 134—141

Известная теорема Лебега утверждает, что сходящуюся (почти всюду или хотя бы по мере) последовательность суммируемых функций f_n заведомо можно интегрировать, если она обладает суммируемой мажорантой. Автор замечает, что последнее условие можно ослабить, а именно достаточно потребовать, чтобы суммируемой мажорантой обладала какая-нибудь последовательность функций g_n, изоморфных функциям f_n в смысле абстрактной теории меры. Это видоизмененное условие подробно изучается; в частности доказывается, что оно действительно шире условия Лебега, но все еще не является необходимым для возможности предельного перехода под знаком интеграла.

В. А. Рохлин

2079. Об одном предположении Штейнхауса. Реньи (H. Steinhaus egy sejtéséről. Rényi Alfréd), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, **3**, № 1, 37—44 (венг.)

Статья автора (РЖМат, 1954, 5097) на венгерском языке.

2080. Об одной работе Янга. Геринг (A note on a paper by L. C. Young. Gehring F. W.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 1, 67—72 (англ.)

Янг (Young L. C., Proc. London Math. Soc., 1937, **43**, 449—467) доказал теорему: Пусть $0 < \beta < 1$ и функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ с периодом 1 удовлетворяет условию

$$\int_0^1 |f[\varphi(t+h)] - f[\varphi(t)]|\, dt \leqslant h^\beta \quad (h \geqslant 0), \qquad (1)$$

какова бы ни была монотонная функция $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$ $(-\infty < t < \infty)$. Тогда $f(t)$ имеет конечную α-вариацию на $[0, 1]$ при любом $\alpha < \beta$ (относительно определения α-вариации см. РЖМат, 1956, 499).

Автор показывает, что условие (1) недостаточно для того, чтобы $f(x)$ имела конечную β-вариацию на $[0, 1]$. Далее доказывается теорема: Пусть $0 < \beta \leqslant 1$ и $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ — измеримая действительная функция с периодом 1. Для того чтобы β-вариация $f(x)$ на любом интервале длины 1 не превосходила 1, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\{\int_0^1 |f[\varphi(t+h)] - f[\varphi(t)]|^{1/\beta} dt\right\}^\beta \leqslant h^\beta \quad (h \geqslant 0),$$

какова бы ни была монотонная функция $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$. Б. И. Коренблюм

2081. Приближение несобственных интегралов суммами по кратным иррациональных чисел. Леман (Approximation of improper integrals by sums over multiples of irrational numbers. Lehman R. Sherman), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 1, 93—102 (англ.)

Пусть α — положительное иррациональное число. Кратные α числа α, 2α, 3α, ... равнораспределены по mod 1. Если $f(x)$ — ограниченная функция, интегрируемая по Риману в интервале $(0, 1)$ и периодическая с периодом 1, то по теореме Вейля

$$\lim_{N \to \infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Автор, используя разложение числа α в бесконечную непрерывную дробь, обобщил этот результат на случай, когда $f(x)$ есть функция, несобственно интегрируемая в интервале $(0, 1)$. Д. Г. Гребенюк

2082. Точки-пределы и точки непрерывности. Кнастер, Мёдушевский, Урбаник (Points-limites et points de continuité. Knaster B., Mioduszewski J., Urbanik K.), Colloq. math., 1955, **3**, № 2, 164—169 (франц.)

Рассматриваются заданные на метрическом полном пространстве $\mathscr{X}$ функции, значения которых принадлежат метрическому сепарабельному пространству $\mathscr{Y}$. Точка $x \in \mathscr{X}$ называется точкой-пределом функции f, определенной на $E \subset \mathscr{X}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество $U \subset \mathscr{X}$, что $x \in \bar{E} \cap U$ ($\bar{E}$ — замыкание E) и $\delta\{f[E \cap U \setminus (x)]\} < \varepsilon$, где δ обозначает диаметр. Точка x называется точкой-односторонним пределом этой функции, если существует такое открытое множество $V \subset \mathscr{X}$, что x является точкой-пределом функции f на $E \cap V$. Функция f называется функцией первого класса, если множество $f^{-1}(Y)$ является F_σ для всякого $Y \subset \mathscr{Y}$.

Изучаются соотношения между следующими условиями:

I. На всяком замкнутом множестве F функция f имеет точку непрерывности относительно множества F.

II. На всяком совершенном множестве F функция f имеет точку-односторонний предел относительно F.

III. Функция f является функцией первого класса.

Доказывается: условия I, II и III эквивалентны, если $\mathscr{X}$ полно; из I следуют II и III для любого $\mathscr{X}$.

Ставится проблема: не влечет ли свойство II за собой III и в случае неполноты метрического $\mathscr{X}$.

Б. М. Гагаев

2083. О распределении разрывов функции действительного переменного. Фрода (Asupra distribuţiei discontinuităţilor funcţiilor reale. Froda Al.), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1955, **5**, № 1, 31—36 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматривается классификация точек разрыва функций $f(P)$ ($P \in \Delta$, Δ — область n-мерного евклидова пространства), основанная на понятии смежных колебаний трансфинитных порядков $\omega_0^\alpha(f, P)$, определяемых трансфинитной индукцией: $\omega_0^0(f, P)$ есть обычное колебание f в точке P (без учета значения f в P); $\omega_0^\alpha(f, P) = \omega_0^0(\omega_0^{\alpha-1}, P)$, если α 1-го рода; $\omega_0^\alpha(f, P) = \doteq \lim \omega_0^{\alpha'}(f, P)$ при $\alpha' \to \alpha$, $\alpha' < \alpha$, если α 2-го рода.

П. И. Романовский

2084. Дескриптивное исследование непрерывных функций двух действительных переменных. Равец (A descriptive analysis of continuous functions of two real variables. Ravetz J. R.), Quart. J. Math., 1955, **6**, № 21, 9—26 (англ.)

Уточняются теоремы Степанова и Хаслам-Джонса для производных чисел, аналогичные теореме Данжуа о производных числах Дини. Производные числа определяются следующим образом. Пусть $f(z)$ — функция двух действительных переменных, причем $z = x + iy$. Пусть

$$\delta^\mu(\rho, z_0) = \sup_{0 < r < \rho} r^{-1} [f(z_0 + re^{i\mu}) - f(z_0)],$$

$$\partial^\mu f(z_0) = \lim_{\rho \to 0} \delta^\mu(\rho, z_0).$$

Число $\partial^{\mu} f(z_0)$ называется верхней линейной производной $f(z)$ в точке z_0 по направлению μ. Пусть, далее, $S_{\mu}(\rho, \eta)$ — область, состоящая из точек $z = re^{i\vartheta}$, для которых $0 < r < \rho$, $\mu - \eta < \vartheta < \mu + \eta$. Положим

$$B^{\mu} f(z_0) = B^{\mu}(\rho, \eta, z_0) =$$

$$= \sup_{h \in S_{\mu}(\rho, \eta)} |h|^{-1} [f(z_0 + h) - f(z_0)],$$

$$\Delta^{\mu}(\eta, z_0) = \lim_{\rho \to 0} B^{\mu}(\rho, \eta, z_0), \quad D^{\mu} f(z_0) = \lim_{\eta \to 0} \Delta^{\mu}(\eta, z_0).$$

Число $D^{\mu} f(z_0)$ называется верхней прямой производной $f(z)$ в точке z_0 по направлению μ. Аналогично определяются нижние производные $\partial_{\mu} f(z_0)$ и $D_{\mu} f(z_0)$. Доказываются следующие теоремы, в которых $f(z)$ — непрерывная функция, определенная в плоской области R.

1. Существуют открытые множества U и V, сумма которых всюду плотна на R, со следующими свойствами: для каждой точки $z_0 \in V$ и для всех направлений ϑ производные $D^{\vartheta} f(z_0)$ и $D_{\vartheta} f(z_0)$ непрерывны, ограничены и равны соответственно $\partial^{\vartheta} f(z_0)$ и $\partial_{\vartheta} f(z_0)$; для каждой точки z_1 множества W, резидуального на U (т. е. $U \setminus W$ 1-й категории на U), существует замкнутая дуга $\Omega(z_1)$, содержащая полуокружность, и такая, что для ϑ из $\Omega(z_1)$

$$D^{\vartheta} f(z_1) = -D_{\vartheta + \pi} f(z_1) = +\infty.$$

2. Пусть μ — фиксированное направление. Тогда в R существуют открытые множества H и J, сумма которых всюду плотна на R, со следующими свойствами: для каждой точки $z_0 \in H$

$$D^{\mu} f(z_0) = \partial^{\mu} f(z_0), \quad D_{\mu + \pi} f(z_0) = \partial_{\mu + \pi} f(z_0);$$

для каждой точки z_1 множества, резидуального на J,

$$D^{\mu} f(z_1) = D^{\mu + \pi} f(z_1) = +\infty, \quad D_{\mu} f(z_1) = D_{\mu + \pi} f(z_1) = -\infty.$$

3. В предположениях теоремы 2 множество точек z_0, для которых $\partial^{\mu} f(z_0) \neq -\partial_{\mu + \pi} f(z_0)$, есть плоское множество первой категории на R. Р. С. Гутер

2085. **Об одной непрерывной функции без производной. Томич** (O једној непрекидној функцији без извода. Томић М.), Билтен друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1954, 5, 16—18 (серб.; резюме франц.)

Обобщается пример Вейерштрасса непрерывной функции, не имеющей производной. П. И. Романовский

2086. **О непрерывно дифференцируемых отображениях открытых множеств. Роднянский А. М.,** Матем. сб., 1955, 36(78), № 2, 233—262

Изучаются топологические и метрические свойства дифференцируемых отображений открытых ограниченных множеств G евклидова пространства в пространство того же числа измерений. В § 1 доказывается ряд свойств степени указанных отображений, в § 2 рассматриваются граничные свойства отображений с знакопостоянным якобианом, множество нулей которого не содержит внутренних точек.

Теорема 4. Граница образа открытого множества G содержится в образе границы: $[f(G)]_g \subseteq f(G_g)$ (E_g обозначает границу множества E).

Теорема 5. Пусть U — некоторая компонента множества $G \setminus f^{-1}[f(G_g)]$. Тогда ее образ $f(U)$ совпадает с некоторой компонентой O открытого множества $R^n \setminus f(G_g)$.

Теорема 6. Для почти всех точек $y \in O$ (см. теорему 5) их полный прообраз $f^{-1}(y)$ содержит в точности $|\gamma(O)|$ точек ($\gamma(O)$ — степень отображения на компоненте O).

Основные результаты § 2 были ранее опубликованы автором без доказательств (Докл. АН СССР, 1950, **72**, № 1, 15—17). В § 3 дается интегральное представление степени отображения, которое применяется к выводу формулы замены переменного в кратном интеграле. Эти результаты, так же как и результаты § 1, были опубликованы ранее без доказательств (РЖМат, 1954, 1600). Л. Д. Кудрявцев

2087. **О лебеговой площади. Федерер** (On Lebesgue area. Federer Herbert), Ann. Math., 1955, **61**, № 2, 289—353 (англ.)

Рассматривается двумерная площадь отображений плоских множеств в евклидово пространство E_n. Доказывается важное в теории лебеговой площади неравенство, доказанное Чезари для случая $n = 3$,

$$L_2(f) \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} L_2(P_n^{(i,j)} \circ f).$$

Здесь f — непрерывная функция, отображающая конечно триангулируемое подмножество плоскости E_2 в евклидово пространство E_n, L_2 — двумерная лебегова площадь, $P_n^{(i,j)}$ — проекция пространства E_n в E_2, определяемая формулой $P_n^{(i,j)}(x) = (x_i, x_j)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Уточняются также некоторые результаты Чезари относительно отображений квадрата в E_3 (РЖМат, 1955, 3142).

Примечание референта. Неравенства, аналогичные рассматриваемому автором, использовались А. С. Кронродом и А. Г. Витушкиным (РЖМат, 1955, 649, 1701). Р. С. Гутер

2088. **О классах $C\{M_n\}$ бесконечно дифференцируемых функций действительного переменного. Пастидес** (On the classes $C\{M_n\}$ of infinitely differentiable real functions. Pastides Nicolas), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 2, 212—220 (англ.)

Класс $C\{M_n\}$ функций, определенных на промежутке $I = [a, b]$, есть класс бесконечно дифференцируемых на I функций, каждой из которых отвечает число k такое, что $|f^n(x)| < k^n M_n$ для всех n и $x \in I$. $\{M_n\}$ — заданная последовательность положительных чисел, характеризующая данный класс. Эти классы рассматривались ранее рядом авторов (Прингсгейм, Адамар, Бернштейн, Карлеман, Мандельбройт и др.). В частности, если $M_n = n!$, то, согласно Прингсгейму (Pringsheim A., Math. Ann., 1914, 75), класс $C\{M_n\}$ будет классом функций, аналитических на I. Автор исследует условия замкнутости классов $C\{M_n\}$.

Рассматривается последовательность $\{f_p(x)\}$ функций, принадлежащих к классу $C\{M_n\}$, сходящаяся к некоторой функции $F(x)$. Пусть $k_{p,n}$ есть для данной функции $f_p(x)$ точная нижняя грань чисел k, удовлетворяющих неравенству $|f_p^{(q)}(x)| < k^q M_q$ для всех $q \leqslant n$, и $\mu_n = \overline{\lim}_{p \to \infty} k_{p,n}$.

Основной результат следующий: Если каждая последовательность $k_{p,n}$ при фиксированном n ограничена, то необходимым и достаточным условием принадлежности $F(x)$ к классу функций $f_p(x)$ является ограниченность последовательности $\{\mu_n\}$.

Если положить $k_p = \lim_{n\to\infty} k_{p,n}$, то получаем следствие: Если последовательность $\{k_p\}$ ограничена, то $F(x)$ принадлежит к тому же классу $C\{M_n\}$, что и функции $f_p(x)$. Обратное предложение, как показывает приведенный автором пример, неверно.

В случае аналитических функций доказываются следующие теоремы: 1. Если последовательность $\{f_p(z)\}$ аналитических на I функций такова, что существует область D, заключающая внутри себя отрезок I, в которой последовательность сходится равномерно, то последовательность $\{k_p\}$ ограничена. 2. Если для последовательности $\{f_p(x)\}$ аналитических на I функций последовательность $\{k_p\}$ ограничена, то существует область, содержащая I, в которой все функции $f_p(z)$ голоморфны.

В заключение приводится пример, где последовательности $k_{p,n}$ при фиксированном n неограничены, но тем не менее предельная функция $F(x)$ принадлежит к тому же классу, что и функции $f_p(x)$. И. Г. Соколов

2089. О классах бесконечно дифференцируемых функций. Лалагю (Sur des classes de fonctions indéfiniment dérivables. Lalaguë Pierre), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 10, 1041—1043 (франц.)

Сформулирован ряд результатов о классах бесконечно дифференцируемых функций, примыкающих к исследованиям Мандельбройта и других авторов (Мандельбройт С., Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, М., Изд-во ин. лит., 1955, гл. VI).

Пусть $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность положительных конечных или равных $+\infty$ чисел, среди которых имеется бесконечная подпоследовательность конечных, содержащая M_1. Положим

$$M_n^0 = \sup_{r\geqslant n} r^n/S(r),\ S(r) = \max_{n\leqslant r} r^n/M_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

и, если $M_n^{1/n} \to \infty$,

$$M_n^c = \sup_{r\geqslant 1} r^n/T(r),\ T(r) = \max_{n\geqslant 1} r^n/M_n \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $C_{dR}^{\mp 1}\{M_n\}$ — совокупность всех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, для которых выполняются соотношения

$$\sup_x |f(x)| e^{\pm Cx} < \infty,$$

$$|f^{(n)}(x)| < k_f^n M_n e^{\mp Cx} \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Типичные результаты:

1. Если $\underline{\lim} M_n^{1/n} = 0$, то $f(x) \equiv 0$ — единственная функция класса $C_{dR}^{-1}\{M_n\}$.

2. Если $\underline{\lim} M_n^{1/n} > 0$, то классы $C_{dR}^{-1}\{M_n\}$ и $C_{dR}^{-1}\{n^{-n}(n^n M_n)^c\}$ эквивалентны.

3. Классы $C_{dR}^1\{M_n\}$ и $C_{dR}^1\{n^{-n}(n^n M_n)^0\}$ всегда эквивалентны.

Аналогичные утверждения справедливы и для некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций на всей оси.

Во второй части заметки исследуется, когда из принадлежности функции $f(x)$ к некоторому классу вытекает принадлежность $f(\cos\vartheta)$ к тому или иному классу, и наоборот (см. также РЖМат, 1955, 165).

Ю. М. Березанский

2090 К. Мемуар о дифференцировании и его обращении. Данжуа (Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse. Denjoy Arnaud, Paris, Gauthier-Villars, 1954, VII + 380 p., 2700 fr.) (франц.)

Содержатся результаты, опубликованные автором около сорока лет тому назад в различных журналах. Книга состоит из 3-х частей: 1. О производных числах непрерывных функций (стр. 1—136); 2. О суммируемых производных (стр. 137—224); 3. О тотализации несуммируемых производных чисел (стр. 225—320 и 321—376).

П. Л. Ульянов

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

2091. Одна теорема о кардинальных числах. Ньюнс (A theorem on cardinal numbers. Newns W. F.), Edinburgh Math. Notes, 1954, № 39, 4—5 (англ.)

Доказывается следующая теорема, представляющая усиленную форму теоремы Кантора: Класс всех подклассов любого класса A, мощности которых не меньше мощности класса A $\backslash(x), x \in A$, имеет мощность большую чем мощность самого A. При доказательстве ее аксиома выбора не применяется. Б. С. Содномов

2092. Геометрическое доказательство равномощности множеств точек двух двумерных выпуклых фигур. Нилов Г. Н., Уч. зап. Кабардинск. гос. пед. ин-та, 1955, № 6, 31—32

Наглядно доказывается равномощность двух плоских открытых (последнее не оговорено) выпуклых множеств, а также еще другим способом равномощность плоскости и открытого квадрата. И. П. Натансон

2093. О бесконечном множестве. Ли Дя Гон (무한 집합에 대하여. 리재곤), 우리 조국 (Ури цогук), 1954, № 12, 31—37 (кор.)

Популярно объясняется и доказывается ряд свойств бесконечных множеств. Лим Рюн Чиль

2094. Квазирассеянные элементы (Трансфинитная нумерация. I). Кондо (Les eléments quasi-clairsemés (L'énumération transfinie. I). Kondô Motokiti), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 2, 66—69 (франц.)

Изучается структура счетных упорядоченных множеств. Вводится понятие квазирассеянного множества. Для подмножества E множества рациональных чисел R определяются квазирассеянные плотные, составные и сингулярные элементы и формулируется ряд предложений относительно этих элементов.

Р. Ю. Мацкина

2095. Простейшие элементы (Трансфинитная нумерация. II). Кондо (Les eléments primitifs (L'énumération transfinie. II). Kondô Motokiti), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 5, 341—344 (франц.)

Продолжение статьи автора (реф. 2094), в которой было введено понятие квазирассеянного множества и рассматривалась его структура. Здесь определяются простейшие и квазипростейшие элементы квазирассеянного множества E вида $(a, b)E$ различных порядков и формулируется следующая основная теорема: Каждое квазирассеянное непустое множество E является суммой конечного или счетного числа простейших, либо квазипростейших элементов каких-либо порядков, таких, что $E_i E_j = 0 (i \neq j)$, и множество всех этих элементов упорядочено согласно естественному порядку крайних точек этих элементов.

В конце статьи вводится понятие дважды рассеянного множества. Р. Ю. Мацкина

2096. О расширении абстрактного алгебраического тела по обобщенному способу Кантора. Никодим, Никодим (Sur l'extension des corps algébriques

abstraits par un procédé généralisé de Cantor. Nikodým Otton Martin, Nikodým Stanislawa), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **17**, № 6, 334—339 (франц.)

После изложения нужных сведений из теории порядковых и кардинальных чисел рассматривается следующий способ построения расширений произвольного алгебраического тела C. Пусть I — линейно упорядоченное алгебраическое тело и A — упорядоченное множество, пусть, кроме того, каждому $x \in C$ поставлен в соответствие некоторый элемент $|x|$ из I так, что: если 1) $x \neq 0$, то и $|x| \neq 0$; 2) $|0| = 0$, 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ и 4) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. Обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ элементов тела C (обозначенная всеми индексами α из A) называется фундаментальной, если для каждого отличного от нулевого элемента $\varepsilon \in I$ существует такое $\alpha \in A$, что для всех $\alpha' \geqslant \alpha$ и $\alpha'' \geqslant \alpha$ всегда $|x_{\alpha'} - x_{\alpha''}| \leqslant \varepsilon$. Указывается, что с помощью таким образом определенных фундаментальных последовательностей можно построить некоторое (I, A)-расширение тела C. Приводятся две теоремы о поведении фундаментальных последовательностей в некотором достаточно широком случае.

Ю. М. Смирнов

2097. **Некоторые замечания, относящиеся к теории множеств. IV. Эрдёш** (Some remarks on set theory. IV. Erdös Paul), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 2, 169—173 (англ.)

Даются обобщения некоторых теорем Серпинского и Марчевского из теории множеств. Приведем некоторые из них.

1. Если справедлива континуум-гипотеза, то для любого разложения множества всех прямых плоскости на два непересекающихся семейства L_1 и L_2 существует такое разложение самой плоскости на два непересекающихся множества A_1 и A_2, что A_i $(i = 1, 2)$ пересекается с каждой прямой из L_i по счетному или конечному множеству. Для того чтобы было справедливо и обратное утверждение, необходимо и достаточно, чтобы семейства прямых L_1 и L_2 удовлетворяли следующему условию: одно из них, пусть L_1, должно быть несчетным, а другое — иметь мощность континуума, причем для каждой точки p плоскости среди прямых, не содержащих p, должно быть либо несчетно много прямых из L_1, либо $m > \aleph_1$ прямых из L_2.

2. Если справедлива континуум-гипотеза, то для произвольного семейства мощности $\aleph_1$ множеств S_λ, состоящих из действительных чисел, удовлетворяющих тому условию, что множество всех действительных чисел не представимо в виде суммы счетного числа множеств вида $a_i + S_\lambda$, найдется такое множество A мощности $\aleph_1$, что множество всех действительных чисел нельзя представить в виде $A + S_\lambda$ (для любых двух множеств A и B, состоящих из действительных чисел, $A + B$ есть множество всех чисел вида $a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$).

3. Если счетноаддитивная мера так определена на некотором поле подмножеств множества M, что M можно представить в виде суммы счетного числа множеств конечной меры, то всякое несчетное семейство множеств положительной меры содержит несчетное подсемейство попарно пересекающихся множеств.

Ставится ряд вопросов, связанных с излагаемым материалом.

Ю. М. Смирнов

2098. **Относительно одной проблемы теории множеств. Фодор** (A halmazelmélet egyik problémájáról. Fodor Géza), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, **5**, № 1, 57—59 (венг.)

Вариант статьи автора (РЖМат, 1955, 4957) на венгерском языке.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

2099. **Одна проблема о рядах Фурье. Такахаси** (A problem on Fourier series. Takahashi Takehito), 東京大學地震研究所彙報 (Токё дайгаку дзисин кэнкюдзё ихо, Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo Univ.), 1954, **32**, № 2, 147—153 (англ.; резюме япон.)

Рассматривается задача: пусть a_n, b_n — коэффициенты Фурье данной функции $f(x)$ и $\varphi(n)$ — данная последовательность; требуется найти функцию $g(x)$, коэффициенты Фурье которой равны соответственно $\varphi(n)\,a_n$, $\varphi(n)\,b_n$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Приводится решение ее для случаев: $\varphi(n) = r^n$ $(|r| < 1)$ и $\varphi(n) = n^m$ $(m \geqslant -1$, целое). При этом решение $g(x)$ получается, вообще говоря, как обобщенная функция в смысле Л. Шварца. Оно годится и тогда, когда $f(x)$ — обобщенная функция. Имеются опечатки.

А. А. Шнейдер

2100. **Две теоремы об асимптотическом поведении тригонометрических рядов. Аљанчић, Бојанић, Томић** (Два става о асимптотском понашању тригонометриских редова. Аљанчић С., Бојанић Р., Томић М.), Зб. радова Српска АН, 1955, **43**, 15—26 (серб.; резюме франц.)

Пусть $L(t)$ — функция с медленным ростом, т. е. определенная для $t \geqslant 0$ положительная функция такая, что при всяком фиксированном $\lambda > 0$ $L(\lambda t)/L(t) \to 1$ при $t \to \infty$. Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть $0 < \alpha < 2$ и $L(t)$ — произведение двух монотонных функций с медленным ростом. Тогда ряд $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu)\,\nu^{-\alpha} \sin \nu x$ сходится при $0 < x < 2\pi$ и при $x \to +0$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin(\alpha\pi/2)}\, x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Если $L(t)$ — выпуклая стремящаяся к нулю при $t \to \infty$ функция с медленным ростом, то при $x \to +0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu) \sin \nu x \sim x^{-1} L(x^{-1}).$$

В. К. Дзядык

2101. **Некоторые вопросы A-интегрирования. Ульянов П. Л.**, Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 6, 1077—1080

Излагаются результаты, сформулированные в РЖМат, 1956, 313.

2102. **О множествах точек сходимости рядов Фурье. Целлер** (Über Konvergenzmengen von Fourierreihen. Zeller Karl), Arch. Math., 1955, **6**, № 4, 335—340 (нем.)

Доказывается теорема: Пусть C — любое множество типа F_σ на $I = [0, 2\pi)$ и $D = I \setminus C$. Тогда существует такой ряд Фурье, который сходится для $x \in C$ и расходится для $x \in D$ (и притом имеет там неограниченные частные суммы). Аналогичная теорема для случая степенного ряда и любого множества типа F_σ на единичной окружности была доказана Херцогом и Пираняном (Herzog F., Piranian G., Duke Math. J., 1949, **16**, 529—534).

Примечание референта. Для случая тригонометрического ряда та же проблема была решена С. Б. Стечкиным (Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 2, 149), но построенный им ряд не является рядом Фурье.

Н. К. Бари

2103. **Равномерная сходимость рядов Фурье. III. Сато** (Uniform convergence of Fourier series. III.

Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 9, 809—813 (англ.)

Рассматриваются вопросы равномерной сходимости рядов Фурье в точке. Пусть $f(t)$ — 2π-периодическая функция с коэффициентами Фурье a_n и b_n. Доказывается: Если a_n и b_n имеют порядок $n^{-1}e^{\lg^{\alpha}n}$, где $0<\alpha<1$, и $f(t)-f(t')=o\{(\lg|t-t'|^{-1})^{-\alpha}\}$ $(t, t'\to 0)$, то ряд Фурье функции $f(t)$ сходится равномерно в точке $t=0$, т. е. при $x_n\to 0$ $s_n(x_n)\to f(0)$, где $s_n(x)$ — частные суммы ряда Фурье.

Теорема 2. Если $\alpha>1$, а

$$f(t)-f(t')=o\{(\lg\lg|t-t'|^{-1})^{-\alpha}\} \quad (t, t'\to 0)$$

и a_n, b_n имеют порядок $n^{-1}e^{(\lg\lg n)^{\alpha}}$, то ряд Фурье функции $f(t)$ сходится равномерно в точке $t=0$.

Аналогичного типа теорема доказывается для случая, когда функция $f(t)$ принадлежит некоторому классу $\varphi(n)$.

Примечание референта. На стр. 811, при доказательстве теоремы 2, число β выбирается как наименьшее число >1, для которого $e^{\beta(\lg\lg n)^{\alpha}}$ является нечетным числом. Нетрудно убедиться, что $\beta=1+$ $+O\{(\lg\lg n)^{-\alpha}e^{-(\lg\lg n)^{\alpha}}\}$ и, следовательно, оценка для K на стр. 812, строка 7 сверху, несправедлива. Но все рассуждения автора проходят, если выбирать, например, $\beta>2$ и чтобы $e^{\beta(\lg\lg n)^{\alpha}}$ было нечетным числом.

То же замечание справедливо и для теоремы 1. В статье имеются опечатки. И. Л. Ульянов

2104. Неаналитические функции абсолютно сходящихся рядов Фурье. Рудин (Nonanalytic functions of absolutely convergent Fourier series. Rudin Walter), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 4, 238—240 (англ.)

Теорема Винера—Леви утверждает, что если $f(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta}$ абсолютно сходится и функция φ аналитична в каждой точке множества значений функции $f(\theta)$, то ряд Фурье функции $\varphi\{f(\theta)\}$ также абсолютно сходится. Автор устанавливает существенность в теореме Винера—Леви требования аналитичности функции φ в каждой точке множества значений $f(\theta)$.

Теорема 2. Пусть φ — непрерывная функция на замыкании плоской области D и аналитическая в D. Предположим, что t — граничная точка области D и L — спрямляемая дуга, имеющая t в качестве одного из концов, расположенная в D так, что $\varphi'(w)$ неограничена на $L\cap D$. Тогда существует функция f с абсолютно сходящимся рядом Фурье, удовлетворяющая следующим условиям: 1) значения $f(\theta)$ принадлежат D при $\theta\neq 0$, а $f(0)=t$; 2) ряд Фурье функции $\varphi\{f(\theta)\}$ не сходится абсолютно.

Рассматриваются также аналогичные вопросы относительно интегралов Фурье. М. Ф. Тиман

2105. О функциях, локально представимых в виде суммы абсолютно сходящегося тригонометрического ряда. Кахан (Sur les fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes. Kahane Jean-Pierre), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 1, 36—37 (франц.)

Пусть A — класс функций, равных в окрестности каждой точки сумме некоторого абсолютно сходящегося тригонометрического ряда.

1. Приводится пример функции $f(x)\in A$, для которой $|f(x)|\notin A$. Этот пример дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный Боасом (Boas R. P., Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, № 1, 97).

2. Для любой функции $\omega(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, не являющейся линейной, существует такая функция $f(x)\in A$, что $f(\omega(x))\notin A$. Этот результат для класса периодических функций из A в предположении, что $\omega(x)$ дважды дифференцируема, был получен референтом (РЖМат, 1955, 5143).

3. Формулируется проблема: определить классы B и C так, чтобы $g(h(x))\in A$ для любых функций $g(x)\in B$ и $h(x)\in C$.

а) Пусть A_{α} — класс функций из A, удовлетворяющих условию Липшица с показателем α. Если функция $g(x)$ дифференцируема p раз, где $p>2+1/\alpha$, и функция $h(x)\in A_{\alpha}$, то $g(h(x))\in A_{\alpha}$.

б) Пусть $h(x)$ — периодическая функция из класса A с периодом 2π:

$$h(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_{\nu}e^{i\nu x}, \quad \sum|c_{\nu}|<\infty.$$

Тогда существует зависящий от функции $\Pi_{\nu}(1+|c_{\nu}|u)$ неквазианалитический класс $C\{M_n\}$, состоящий из функций $g(x)$ с $|g^{(n)}(x)|\leqslant CM_n$ $(n=0, 1, \ldots, C$ — постоянная), такой, что из $g(x)\in C\{M_n\}$ следует $g(h(x))\in A$. Все результаты приводятся без доказательств. З. Л. Лейбензон

2106. О чезаровской суммируемости рядов Фурье. Кинукава (On the Cesaro summability of Fourier series. Kinukawa Masakiti) Tôhoku math. J., 1954, **6**, № 2—3, 109—120 (англ.)

Пусть $f(t)$ — интегрируемая функция периода 2π, s — некоторое число, $\alpha\geqslant 1$, $-1<\rho\leqslant 0$,

$$\varphi_x(t)=\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2s,$$

$$\Delta_u^{(m)}\varphi(t)=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{m+\nu}\binom{m}{\nu}\varphi(t+\nu u),$$

$$\beta=\alpha-2\rho(\alpha-1)(1+\rho)^{-1}, \quad \gamma=\alpha-\rho(\alpha-1),$$

$$\delta=1-\rho(\alpha-1)(1+\rho)^{-1}.$$

Ряд Фурье функции $f(t)$ в точке $t=x$ будет суммироваться методом (C, ρ) к значению s при выполнении одной из четырех пар условий:

$$1) \quad \psi(t)\equiv \mathrm{Var}_{[0,t]}[u^{\alpha}\varphi(u)]=O(t),$$

$$\varphi_1(t)\equiv\int_0^t\varphi(u)\,du=o(t^{\beta});$$

$$2) \quad \eta_{\rho,\alpha}^{(m)}\equiv\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{u\to 0}}\,u^{\rho}\int_{(ku)^{1/\alpha}}^{\pi}t^{-(1+\rho)}|\Delta_u^{(m)}\varphi(t)|\,dt=0,$$

$$\varphi_1(t)=o(t^{\gamma});$$

$$3) \quad \psi(t)=O(t), \quad \varphi_1^{*}(t)=\int_0^t|\varphi(u)|\,du=o(t^{\delta}/\ln t^{-1});$$

$$4) \quad \eta_{\rho,\alpha}^{(m)}=0, \quad \varphi_1^{*}(t)=o(t^{\gamma-\alpha+1}/\ln t^{-1}).$$

При этом условия 1) (условия 2)) являются достаточными также и в случае $0<\rho<1$. Этот результат есть обобщение признака Юнга (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.-Л., ГОНТИ, 1939), а также соответствующих теорем Харди и Литлвуда (Hardy G. H., Littlewood J. E., Proc. London Math. Soc., 1928, **28**, 301—311; Ann. Pisa, 1934, **3**, 43—62; см. также Sunouchi G., Tôhoku Math. J., 1951, **3**, 216—219; 1952, **4**, 187—193, Math. Japonicae, 1948, **1**, 41—44). А. Ф. Тиман

2107. Об ортогональных рядах. Тандори (Über orthogonale Reihen. Tandori Károly), Acta scient. math., 1955, **16**, № 1—2, 74—76 (нем.)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система на $[a,b]$. Рассматривается ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \qquad (1)$$

где $\sum_0^\infty a_n^2<\infty$. Пусть $s_n(x)$ — его частные суммы и $\sigma_n^{(\alpha)}(|s_\nu-f|^2;\ x)$ — чезаровские средние порядка α для последовательности $\{|s_\nu(x)-f(x)|^2\}$ $(\nu=0,\ 1,\ \ldots)$. Зигмунд доказал, что $\sigma_n^{(1)}(|s_\nu-f|^2,\ x)\to 0$ $(n\to\infty)$ почти всюду на $[a,\ b]$, если ряд (1) суммируем $(C,\ 1)$ к $f(x)$ почти всюду на $[a,\ b]$. Автор, желая перенести этот результат на случай α, $0<\alpha<1$, доказывает теорему: Если ряд (1) суммируем $(C,\ 1)$ к функции $f(x)$ почти всюду на $[a,\ b]$, то почти всюду на $[a,\ b]$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{2^n}^{(\alpha)}(|s_\nu-f|^2;\ x)=0\ (0<\alpha<1).$$

Н. К. Бари

2108. О сильной суммируемости рядов Фурье. Тандори (Über die starke Summation von Fourierreihen. Tandori Károly), Acta scient. math., 1955, **16**, № 1—2, 65—73 (нем.)

Доказывается следующая теорема: Пусть $f(x)$ имеет период 2π и $f(x)\in L[0,\ 2\pi]$, тогда во всякой точке x, в которой

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3+hk}\int_{-h}^{h}|f(x+u)-$$

$$-f(x)|\,du\int_{u-k}^{u+k}|f(x+v)-f(x)|\,dv=0 \qquad (1)$$

равномерно по $k>0$, будет выполняться соотношение

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu(f;\ x)-f(x)|^2=0,$$

где $s_\nu(f;\ x)$ — значение в точке x частной суммы порядка ν ряда Фурье для функции $f(x)$.

Показывается, что условие (1) выполняется почти всюду и что всякая точка, в которой выполнено (1), будет точкой Лебега для функции $f(x)$. Указывается (без формулировок соответствующих результатов), что аналогичным методом может быть рассмотрен вопрос о сильной суммируемости порядка $2m$ (m — целое положительное).

В статье имеются неточности. Так, допущена ошибка в формулировке леммы 2 (принадлежащей Марцинкевичу). При оценке (18) величины $\mathfrak{J}_2$ ошибочно сделана ссылка на условие (12) и интегрирование по частям. Кроме того, есть несколько опечаток в формулах.

А. А. Шнейдер

2109. О сильной суммируемости рядов Фурье. Салем (On strong summability of Fourier series. Salem R.), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 2, 393—403 (англ.)

Пусть $s_n(x)$ — частная сумма порядка n ряда Фурье функции $f(x)$ с периодом 2π. Доказываются две теоремы.

I. Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность целых положительных чисел, удовлетворяющая условиям: 1) $n_k=O(k^A)$, 2) $(n_{k+1}-n_k)/n_k>\varepsilon/k$, 3) существует последовательность $\{k_\nu\}$ такая, что $k_{\nu+1}/k_\nu\geqslant R>1$ и $n_{k_{\nu+1}}/n_{k_\nu}<B$, где A, $\varepsilon>0$, R и B — постоянные. Если $f(x)\in L^s(s>1)$, то в каждой точке x, где

$$\int_0^\eta|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|^s\,dt=o(\eta),$$

будет выполняться для всякого положительного r соотношение

$$\lim_{k\to\infty}k^{-1}\sum_{i=1}^{k}|s_{n_i}(x)-f(x)|^r=0.$$

II. Пусть M_n — максимум $|s_n(x)|$ на $[0,\ 2\pi]$. Тогда существует непрерывная функция $f(x)$, для которой величины $n^{-1}\sum_1^n M_i$ неограничены. (Автором доказано несколько больше: для последовательности $\omega(n)$ с $\omega(n)\to\infty$ и $\omega(n)=o(\log n)$ существует непрерывная $f(x)$, для которой величины $[n\omega(n)]^{-1}\sum_1^n M_i$ неограничены.)

По поводу условий, наложенных в теореме I на последовательность $\{n_k\}$, автор делает следующие замечания: при замене условия 1) на $n_k=O(2^{k^\alpha})$ $(\alpha>1/2)$ и даже на $\log n_k/k^{1/2}\to\infty$ теорема оказывается неверной. Если условие 2) выкинуть, то теорема также окажется неверной.

А. А. Шнейдер

2110. Об одной проблеме Литлвуда. Салем (On a problem of Littlewood., Salem R.), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 3, 535—540 (англ.)

Литлвуд поставил вопрос, будет ли для любых различных чисел $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ существовать такая постоянная величина A, что

$$\int_0^{2\pi}|e^{m_1ix}+\cdots+e^{m_nix}|\,dx>A\lg n.$$

Автор доказывает следующее более слабое предложение:

Пусть m_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$, — возрастающая последовательность положительных целых чисел, для которой $m_n=O(\lg n)$. Тогда при $n\to\infty$

$$\overline{\lim}\int_0^{2\pi}|\cos m_1x+\cdots+\cos m_nx|\,dx/(\lg n)^{1/2}>0.$$

Н. К. Бари

2111. О почти сходящихся тригонометрических рядах. Меньшов Д. Е., Матем. сб., 1955, **37(79)**, № 2, 265—292

Последовательность $f_0(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$ измеримых функций, конечных почти всюду на $[a,\ b]$, называется почти сходящейся на $[a,\ b]$ к функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[a,\ b]$, если она обладает свойствами: а) можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на $[a,\ b]$; б) если некоторая подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ сходится к конечной функции $\varphi(x)$ на каком-либо множестве E положительной меры, то $\varphi(x)=f(x)$ почти всюду на E. Тригонометрический ряд называется почти сходящимся на $[-\pi,\ \pi]$ к функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi,\ \pi]$, если последовательность его частных сумм почти сходится к $f(x)$ на этом отрезке.

Доказывается теорема: Каковы бы ни были три функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, измеримые и конечные почти всюду на $[-\pi,\ \pi]$, любой тригонометрический ряд можно разбить на сумму трех тригонометрических рядов так, чтобы i-й тригонометрический ряд почти сходился на $[-\pi,\ \pi]$ к $f_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$.

Эта теорема была сформулирована без доказательства в работе автора (Докл. АН СССР, 1945, **49**, 79—82). По определению, последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ конечна по мере на $[a,\ b]$, если для любого $\varepsilon>0$ найдутся положительное M и натуральное N та-

кие, что $mE[|f_n(x)|>M]<\varepsilon$ для $n>N$. Ряд конечен по мере, если конечна по мере последовательность его частных сумм.

Приведенную выше теорему автор дополняет так: Если заданный тригонометрический ряд конечен по мере и имеет коэффициенты, стремящиеся к нулю, то и те три тригонометрических ряда, на которые мы его разбиваем, можно выбрать так, чтобы их коэффициенты стремились к нулю. Вопрос о том, можно ли освободиться от требования конечности по мере, остается открытым. Н. К. Бари

2112. Приближение периодических непрерывных функций многих переменных тригонометрическими многочленами. Токарчук (Наближення періодичних неперервних функцій багатьох змінних тригонометричними многочленами. Токарчук М. Т.), Наук. зап. Черкаськ. пед. ін-ту, 1954, 5,3 —38 (укр.)

Строятся многомерные аналоги различных процессов приближения непрерывных 2π-периодических функций при помощи тригонометрических многочленов (интегралов Джексона, Валле-Пуссена, Дирихле, Фейера, Бернштейна — Рогозинского, сумм Валле-Пуссена, а также соответствующих интерполяционных сумм) и рассматривается вопрос о скорости сходимости этих процессов. Интерполяционная сумма, соответствующая интегралу Джексона, ранее не вводилась и для одномерного случая. Имеются ошибки, например: 1) в целом ряде мест не учтено, что $t-x$ не есть периодическая функция, что приводит к неверным оценкам (см. (4.4), (5.5), (6.4), (10.5), (10.6)); 2) единственные функции, удовлетворяющие условию (8.7), суть постоянные, в силу чего теорема 2 § 8 и теорема 2 § 9 бессодержательны; 3) неверно, что (11.1) и (11.2) одно и то же; 4) все рассуждения § 15 неверны.

И. П. Натансон, Г. И. Натансон

2113. Об одной теореме Леви об абсолютной сходимости рядов Фурье. Жак И. Е., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 107—112

Переносится на случай функций двух переменных теорема Леви (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939, § 6.51) об абсолютной сходимости рядов Фурье. И. А. Киприянов

2114. Суммирование с ограничением и локализация двойных тригонометрических рядов. Беркович, Госселин (Restricted summation and localization of double trigonometric series. Berkovitz Leonard D., Gosselin Richard P.), Duke Math. J., 1955, 22, № 2, 243—251 (англ.)

Двойной ряд $\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{m,n}$ называется суммируемым (R, α, β) с ограничением, если

$$\sigma_{M,N}^{(\alpha,\beta)}=\frac{4\alpha\beta}{M^{2\alpha}N^{2\beta}}\int_0^M\int_0^N\Big(\sum_{|m|\leqslant u,\ |n|\leqslant v}a_{m,n}\Big)\times$$

$$\times(M^2-u^2)^{\alpha-1}(N^2-v^2)^{\beta-1}\,uv\,du\,dv$$

стремится к определенному конечному пределу, когда $M, N\to\infty$ так, что $A\leqslant M/N\leqslant B$, где A и B — положительные фиксированные постоянные ($A\leqslant B$). Известно, что изучение локального поведения двойных тригонометрических рядов обычно связывают с тем или иным методом суммирования. В реферируемой работе используется метод суммирования $(R\ \alpha, \beta)$ с ограничением. Приведем некоторые из полученных результатов.

Теорема 1. Пусть

$$T_1=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}a_{m,n}e^{i(mx+ny)},\quad T_2=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_m e^{imx}\qquad(1)$$

— тригонометрические ряды, удовлетворяющие условиям: 1) $a_{m,n}=o\{(|m|+1)^{\gamma}(|n|+1)^{\delta}\}$, $\gamma>-1$, $\delta>-1$, $\gamma+\delta\geqslant-1$; 2) $\alpha_m=O\{(|m|+1)^{-(3+2\langle\beta\rangle)}\}$, где $\beta=\gamma+\delta+1$ и $\langle\beta\rangle$ означает наименьшее целое число $\geqslant\beta$; 3) $d^jT_2(x)/dx^j=0$ для всех $x\in X\subset[0, 2\pi]$, где $T_2(x)$ — сумма второго ряда из (1) и $j=0, 1, \ldots, 2\langle\beta\rangle$. Тогда формальное произведение рядов (1)

$$T_3=\sum A_{m,n}e^{i(mx+ny)},$$

$$A_{m,n}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}a_{p,n}\alpha_{m-p}$$

существует и суммируемо (R, β, β) с ограничением к нулю, равномерно для всех точек (x, y) с $x\in X$. Если коэффициенты α_m зависит от некоторого параметра и условия 2) и 3) выполняются равномерно относительно него, то и суммируемость (R, β, β) ряда T_3 также будет равномерной относительно параметра.

Пусть далее $X=[a, b]\subset[0, 2\pi]$, $Y=[c, d]\subset[0, 2\pi]$, $X'=[a', b']\subset(a, b)$, $Y'=[c', d']\subset(c, d)$ и $D_n^{(k)}(t)$ — продифференцированное k раз ядро Дирихле n-го порядка. Пусть еще

$$F(x, y)=F_1(x, y)+\frac{x^K}{K!}F_2(y)+\frac{y^L}{L!}F_3(x)+a_{0,0}\frac{x^Ky^L}{K!\,L!},$$

где $F_1(x, y)=\sum'_{m,n=-\infty}^{\infty}\frac{a_{m,n}}{(im)^K(in)^L}e^{i(mx+ny)}$,

и аналогично для $F_2(y)$ и $F_3(x)$, причем $a_{m,n}=o\{(|m|+1)^{\gamma}(|n|+1)^{\delta}\}$ с $\gamma>-1$, $\delta>-1$, $\gamma+\delta\geqslant-1$, $K=[\gamma]+2$, $L=[\delta]+2$. Обозначим через

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\in X'\\ 0, & x\notin X\end{cases},\quad \varphi(y)=\begin{cases}1, & y\in Y'\\ 0, & y\notin Y\end{cases}$$

такие функции с периодом 2π, что $\psi(x)$ имеет $K+3\langle\beta\rangle+3$, а $\varphi(y)$ имеет $L+3\langle\beta\rangle+3$ непрерывных производных на всей оси. Тогда справедлива

Теорема 5. Разность

$$\sum_{m,\,n=-M,\,-N}^{M,N}a_{m,n}e^{i(mx+ny)}-\frac{(-1)^{K+L}}{\pi^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F(u, v)\lambda(u, v)D_M^{(K)}(x-u)\,D_N^{(L)}(y-v)\,du\,dv$$

суммируема (R, β, β) с ограничением к нулю, равномерно для $(x, y)\subseteq\{X'\times Y'\}$, где $\lambda(u, v)=\psi(u)\varphi(v)$.

В работе имеются опечатки. Например: на стр. 245, строка 5 сверху, напечатано T вместо T_2; в условии (ii) теоремы 2 напечатано a вместо α; на стр. 248 в формуле (6) вместо знака $=$ напечатано $-$. П. Л. Ульянов

2115. Локализация кратных сопряженных тригонометрических рядов. Шапиро (Localization of conjugate multiple trigonometric series. Shapiro Victor L.), Ann. Math., 1955, **61**, № 2, 368—380 (англ.)

Пусть

$$\sum_m a_m e^{i(m, x)}\qquad(1)$$

— n-кратный тригонометрический ряд, т. е. $m=\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ — целочисленная точка n-мерного про-

странства, $x=\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ и $(m, x)=\mu_1\xi_1+\ldots+\mu_n\xi_n$. Ряд (1) называется сферически суммируемым (C, η) в точке x_0, если

$$\sigma_R^{(\eta)}(x_0)=\frac{2\eta}{R^{2\eta}}\int_0^R\Big\{\sum_{|m|\leqslant r}a_m e^{i(m, x_0)}\Big\}(R^2-r^2)^{\eta-1}r\,dr$$

$$(\eta>0)$$

сходится к конечному пределу при $R\to\infty$. Два ряда называются сферически равносуммируемыми (C, η), если их разность сферически суммируема (C, η).

Доказывается следующая основная теорема 1: Пусть

$$T_1=\sum_m a_m e^{i(m, x)},\quad T_2=\sum_m b_m e^{i(m, x)} \qquad (2)$$

— n-кратные тригонометрические ряды, коэффициенты которых имеют порядок $o(|m|^\gamma)$, где γ — целое и $\geqslant -(n-1)$. Пусть далее $K(x)$ — некоторое сферическое гармоническое ядро, а

$$\overline{T}_1=\sum_m a_m\overline{K}(m)e^{i(m, x)},\quad \overline{T}_2=\sum_m b_m\overline{K}(m)e^{i(m, x)} \qquad (3)$$

— тригонометрические ряды, сопряженные соответственно рядам (2), где функция $\overline{K}(x)$ является преобразованием Фурье функции $K(x)$ в смысле главного значения. Тогда, если $F_1(x)-F_2(x)\in C^{(2\omega+n+2)}$ в области $D\subset\{0\leqslant\xi_1\leqslant 2\pi,\ \ldots,\ 0\leqslant\xi_n\leqslant 2\pi\}$, то ряды (3) равномерно сферически равносуммируемы $(C, \gamma+n-1)$ в широком смысле для каждой замкнутой области, содержащейся в D, где

$$F_1(x)=a_0|x|^{2\omega}/K_\omega+$$
$$+\sum_{m\neq 0}(-1)^\omega(a_m|m|^{-2\omega})e^{i(m, x)}$$

при $\omega=[(n+\gamma)/2]+1$, $K_\omega=2^{2\omega}\omega!\Gamma(n/2+\omega)/\Gamma(n/2)$, и аналогично для $F_2(x)$. Запись $F(x)\in C^{(j)}$ в области D означает, что $F(x)$ имеет в области D j непрерывных производных. В работе имеются опечатки.

П. Л. Ульянов

2116. О некоторых локальных свойствах ортогональных многочленов. Геронимус Я. Л., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 2, 185—188

1. Пусть многочлены $P_n(z)$, $n=0, 1, \ldots$ (n — степень многочлена) ортонормированы на окружности $|z|=|e^{i\varphi}|=1$, $\varphi\in[0, 2\pi]$, относительно интегрального веса $\sigma(\varphi)$, причем неубывающая функция $\sigma(\varphi)$ удовлетворяет условиям: а) $\lg\sigma'(\varphi)\in L(0, 2\pi)$, б) на отрезке $l\subset[0, 2\pi]$ функция $\sigma(\varphi)$ абсолютно непрерывна, $\sigma'(\varphi)\geqslant m>0$ и $\sigma'(\varphi)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $1/2<\alpha\leqslant 1$; тогда в каждой точке φ_0 отрезка l_0, лежащего внутри l, имеем $|P_n(e^{i\varphi_0})|\leqslant A$, $n=0, 1, \ldots$ (m и A — постоянные).

2. При условиях предыдущей теоремы справедлива асимптотическая формула, полученная впервые Сегё при более ограничительных условиях: $P_n(e^{i\varphi_0})=\pi(e^{i\varphi_0})+\varepsilon_n$, $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ (относительно функции $\pi(e^{i\varphi})$ см. статью автора: Докл. АН СССР, 1952, **83**, № 1, 5—8).

3. Результаты 1,2 переносятся на многочлены $\varphi_n(x)$, $n=0, 1, \ldots$, ортонормированные на отрезке $[-1,1]$ относительно интегрального веса $\psi(x)$.

4 (Локальное видоизменение теоремы Короуса). Пусть система многочленов $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}$ ортонормирована на отрезке $[-1,1]$ относительно интегрального веса $\psi^{(1)}(x)=k(x)\psi(x)$, где $0<m\leqslant k(x)\leqslant M$ при $x\in[-1,1]$; пусть, кроме того, на отрезке $l\subset[-1,1]$ функция $k(x)\in\mathrm{Lip}\,1$. Тогда, если в точке x_0, лежащей внутри l, имеем $|\varphi_n(x_0)|\leqslant C_1$, $n=0, 1, \ldots$, то $|\varphi_n^{(1)}(x_0)|\leqslant C_2$, $n=0, 1, \ldots$ Аналогичное заключение справедливо, если $\psi'(x)\leqslant C$ и $k(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $1/2<\alpha\leqslant 1$ (m, M, C, C_1, C_2 — постоянные).

5. Если на отрезке $l\subset[-1,1]$ имеем $\psi'(x)\leqslant C$, многочлены $\varphi_n(x)$, $n=0, 1, \ldots$, ограничены в точке x_0, лежащей внутри l, то для каждой функции $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $1/2<\alpha\leqslant 1$, ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ в точке x_0 сходится к $f(x_0)$. Если же многочлены $\varphi_n(x)$ ограничены на всем отрезке l, а функция $f(x)$ удовлетворяет на l условию Дини—Липшица

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant N|\lg|x_2-x_1||^{-1-\lambda},\ \lambda>0,$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ во всех точках x, лежащих внутри l.

В. Ф. Николаев

2117. О почленном дифференцировании ряда по ортогональным многочленам. Фрёйд (Über das gliedweise Differenzieren einer orthogonalen Polynomreihe. Freud G.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 1—2, 221—226 (нем.; резюме русс.)

Пусть $\{p_n(x)\}$ — система ортонормированных многочленов на $(-1,1)$ с весом $w(x)\in L$. Если $f(x)$ имеет непрерывную производную k-го порядка, то, дифференцируя почленно ряд Фурье $f(x)$ по этой системе $f(x)\sim\Sigma c_\nu p_\nu(x)$, получим

$$f^{(k)}(x)\sim\sum c_\nu p_\nu^{(k)}(x). \qquad (1)$$

Изучается вопрос, когда ряд (1) сходится абсолютно к $f^{(k)}(x)$.

1. Если $w(x)\geqslant m>0$ $(-1\leqslant a<x<b\leqslant 1)$ и $\omega(\delta, f^{(k)})$ — модуль непрерывности $f^{(k)}(x)$, то при условии $\Sigma_{n=1}^\infty n^{-1/2}\omega(n^{-1}, f^{(k)})<\infty$ ряд (1) сходится абсолютно и равномерно во всяком интервале (a', b'), целиком лежащем внутри (a, b).

2. Если $w(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, кроме того, $w(x)\leqslant W(1-x^2)^{-1/2}$, где W — постоянная, то заключение теоремы 1 сохранится при выполнении условия

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1/2}\omega^{(2)}(n^{-1}, g^{(k)})<\infty,$$

где $g(\vartheta)=f(\cos\vartheta)$ и $\omega^{(2)}(\delta, g^{(k)})$ — модуль непрерывности функции $g^{(k)}(\vartheta)$ в метрике L^2. Н. К. Бари

2118. Замечание по поводу сильной суммируемости ортогональных рядов. Алексич (Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen. Alexits G.), Acta scient. math., 1955, **16**, № 1—2, 127—129 (нем.)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная ортонормированная система на (a, b), $\sigma_n^\alpha(x)$ — n-е чезаровское среднее (C, α) для частных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^\infty c_n\varphi_n(x). \qquad (1)$$

Ряд (1) называется почти всюду сильно суммируемым (C, α), если существует функция $s(x)$, для которой почти всюду

$$\sum_{m=1}^n[s(x)-\sigma_m^{(\alpha-1)}(x)]^2=o(n).$$

Ряд (1) называется почти всюду очень сильно сумми-

руемым (C, α), если для любой возрастающей последовательности $\{\nu_m\}$ имеем почти всюду

$$\sum_{m=1}^{n} [s(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)]^2 = o(n)$$

(исключительное множество может меняться вместе с $\{\nu_m\}$).

Теорема. Пусть $\{\lambda_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, для которой ряд $\Sigma n^{-1}\lambda_n^{-1}$ сходится, а последовательность $\{n/\lambda_n\}$ монотонно возрастает. Если ряд (1) почти всюду суммируем методом Абеля, то при выполнении условия $c_n^2 = O(|n\lambda_n]^{-1})$ этот ряд почти всюду сильно суммируем (C, α) для всех $\alpha > 1/2$.

Следствие. Если $c_n^2 = O([n\lambda_n (\lg \lg n)^2]^{-1})$, то ряд (1) почти всюду сильно суммируем (C, α), $\alpha > 1/2$.

Н. К. Бари

2119. Приложение функционального анализа к полиномам наименьшего отклонения. Вороновская Е. В., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 1, 5—8

Рассматриваются последовательность моментов

$$\mu_k = \int_0^1 t^k dg(t) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

где $g(t)$ — функция ограниченной вариации на $[0,1]$, и линейный функционал $F(f) = \int_0^1 f(t)dg(t)$ в пространстве C с нормой $N = \mathrm{Var}_{[0,1]} g(t)$. Функция $\varphi(x) \in C$, для которой $F(\varphi) = N$ и $\max_{[0,1]} |\varphi(x)| = 1$, называется экстремальной функцией последовательности (1).

Теорема. Для того чтобы среди экстремальных функций отыскался полином $P_n(x) \not\equiv \pm 1$, необходимо и достаточно, чтобы $g(t)$ была ступенчатой с конечным числом скачков $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ в точках разрыва $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ на $[0,1]$, причем всякий полином $P(x)$, для которого выполняются условия: $\max_{[0,1]} |P(x)| = 1$, $|P(\sigma_k)| = 1$, $P(\sigma_k)\,\delta_k > 0$, является экстремальным.

Любой конечный отрезок чисел

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \qquad (2)$$

определяет линейный функционал $F_n(\Sigma_0^n p_i x^i) = \Sigma_0^n p_i \mu_i$ с нормой N_n на пространстве полиномов не выше n-й степени. Задача продолжения F_n на пространство полиномов не выше $(n+1)$-й степени с сохранением нормы равносильна задаче отыскания числа μ_{n+1} так, чтобы отрезок $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu_{n+1}$ определил линейный функционал F_{n+1} с той же нормой N_n. Число μ_{n+1} продолжает отрезок «наилучшим образом» и должно принадлежать «интервалу наилучшего продолжения» отрезка (2). Отрезок (2) называется абсолютно монотонным, если, продолжая его наилучшим образом, получим абсолютно монотонную последовательность $(\mu_i)_0^\infty$. Если отрезок (2) не абсолютно монотонный, то ему соответствует единственная последовательность моментов

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \overset{*}{\mu}_{n+1}, \overset{*}{\mu}_{n+2}, \ldots, \qquad (3)$$

полученная последовательным наилучшим продолжением, и его параметры связаны с точками разрыва («истинными узлами») $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_s \leqslant 1$ интегрирующей функции $g(t)$ последовательности (3) формулами $\mu_k = \Sigma_{i=1}^s \delta_i \sigma_i^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. В истинных узлах экстремальный полином равен ± 1. Если $s > n/2 + 1$, то экстремальный полином отрезка единственный (и отрезок называется отрезком II класса).

Теорема. Для каждого параметра μ_k $(k > 0)$ отрезка (2) существует «критический» интервал (μ_k', μ_k'') такой, что экстремальный полином отрезка есть $\pm T_n(x) = \pm \cos n \arccos(2x - 1)$ тогда и только тогда, когда $\mu_k \notin (\mu_k', \mu_k'')$.

Пусть $\{Q_n(x)\}$ — множество экстремальных полиномов всех отрезков $\{(\mu_i)_0^n\}$ II класса. Если каждой из точек $(\sigma_i)_1^s$ отрезка $[0,1]$, в которой $Q_n(x) = \pm 1$, отнести знак $Q_n(x)$, то полученная система чисел $\overset{+}{(\sigma_i)}_1^s$ есть «распределение полинома $Q_n(x)$». Пусть p — число интервалов (σ_k, σ_{k+1}), у которых знаки, отнесенные к σ_k и σ_{k+1}, одинаковы («интервал повторения»). Систему чисел n, s, p автор называет паспортом полинома $Q_n(x)$ и обозначает $[n, s, p]$. Если отрезки $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \theta$ с любым $\theta \in [\alpha, \beta]$ являются отрезками II класса, то коэффициенты экстремального полинома $Q_n(x, \theta) = \Sigma_0^n q_k(\theta) x^k$ этого отрезка — непрерывные функции от θ.

Отрезок $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \theta$ $(\theta \in [\alpha, \beta] \subset [\mu_k', \mu_k''])$ называется определяющим отрезком для семейства полиномов данного паспорта $[n, s, p]$, если: 1) при любом $\theta \in [\alpha, \beta]$ отрезок принадлежит II классу; 2) все семейство экстремальных полиномов $R_n(x, \theta)$ имеет один и тот же паспорт $[n, s, p]$; 3) любой полином паспорта $[n, s, p]$ входит в семейство $R_n(x, \theta)$. Например, отрезок $1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \theta$ $(\rho > 1)$ — определяющий для полиномов Е. И. Золотарева.

Утверждается, что задача В. А. Маркова (О функциях, наименее уклоняющихся от нуля, СПБ, 1892) эквивалентна задаче отыскания экстремального полинома $Q_n(x)$ заданного отрезка $(\mu_i)_0^n$, а задача А. П. Пшеборского (Сообщ. Харьковск. матем. о-ва, 1913, 14, 65) приводится к задаче В. А. Маркова.

Доказательства не приводятся, но некоторые теоремы доказаны в предыдущих работах автора (Тр. Ленингр. индустр. ин-та, разд. физ.-матем., 1937, 4, 22—33; 1938, 5, 14—20; Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1941, 3, 23—33). С. И. Зуховицкий

2120. Экстремальные полиномы некоторых простейших функционалов. Вороновская Е. В., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 2, 193—196

Продолжение работы автора (реф. 2119). Изучаются полиномы, принадлежащие паспортам $[n, n, 0]$ и $[n, n, 1]$. Отметим следующие теоремы:

Теорема. Отрезок $(\mu_i)_0^n = 0_0, 0_1, \ldots, 0_{n-2}, -1_{n-1}, \theta$, когда θ меняется в своем критическом интервале $-(n+1)/2 < \theta < -(n-1)/2$, определяет семейство экстремальных полиномов, принадлежащих паспорту $[n, n, 0]$. Если $Q_n(x, \theta)$ — экстремальные полиномы, соответствующие числам промежутка $-n/2 < \theta < -(n-1)/2$, то при $-(n+1)/2 < \theta < -n/2$ экстремальные полиномы имеют вид $(-1)^{n-1} Q_n(1-x, \theta)$. Все семейство полиномов паспорта $[n, n, 0]$ исчерпывается полиномами вида $\pm Q_n(x, \theta)$ и $\pm Q_n(1-x, \theta)$.

Теорема. Если $Y_n(x, \sigma) = x^n - \sigma x^{n-1} + \ldots (0 < \sigma < +\infty)$ — полином, наименее уклоняющийся от нуля на $[-1,1]$ (задача Е. И. Золотарева: Полн. собр. соч., 1932, в. 2), и $L(\sigma)$ — его уклонение, то имеем тожде-

ство двух семейств: $\{Q_n(x,\theta)\}\equiv\{[L(\sigma)]^{-1}Y_n(2x-1,\sigma)\}$ и, кроме того, $\theta=[2L'(\sigma)]^{-1}L(\sigma)-(n+\sigma)/2$.

Приводятся также некоторые теоремы о полиномах паспорта $[n, n, 1]$, причем утверждается, что эти полиномы решают следующую экстремальную задачу: из всех полиномов n-й степени со старшим коэффициентом 1, принимающих в точке $\sigma\,(0<\sigma<1)$ заданное значение A, найти тот, который на отрезке $[0,1]$ наименее уклоняется от нуля. Указывается, что полиномы, изученные Н. И. Ахиезером (Изв. Физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те, 1928, 3, 1—69), имеют паспорт $[n, n-1, 0]$. Доказательства не приводятся. С. И. Зуховицкий

2121. Полиномы наименьшего отклонения в свете функционального анализа. Вороновская Е. В., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 254—255

Тезисы доклада на заседании Ленинградского общегородского математического семинара, излагающего содержание двух работ автора (реф. 2119, 2120). В тезисе 3 опечатка: должно быть $2\leqslant s$. С. И. Зуховицкий

2122. Многочлены, минимальные в p-й степени на конечной системе действительных точек. Моцкин, Уолш (Least pth power polynomials on a real finite point set. Motzkin T. S., Walsh J. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 1, 67—81 (англ.)

Пусть $f(x)$ — функция, заданная на конечном множестве E точек $x_1<x_2<\ldots<x_m$. За меру отклонения многочлена $p_n(x)$ порядка n от $f(x)$ принимается величина

$$\sum_1^m \mu_k\,|\,f(x_k)-p_n(x_k)\,|^p,\quad p>0,\ \mu_k>0.$$

Показывается, что при заданном n задача нахождения многочлена $p_n(x)$, наименее уклоняющегося от произвольной функции $f(x)$, сводится к задаче разыскания многочлена

$$T_{n+1}(x)=x^{n+1}+a_1^*x^n+\cdots+a_n^*x+a_{n+1}^*,$$

экстремального в том смысле, что

$$\sum_{k=1}^m \mu_k\,|\,T_{n+1}(x_k)\,|^p=\min_{a_i}\sum_{k=1}^m \mu_k\,|\,x_k^{n+1}+\sum_{i=1}^{n+1}a_i x_k^{n+1-i}\,|^p.$$

Затем изучаются свойства нулей экстремальных многочленов. По определению, точки $x_1<x_2<\ldots<x_{n+2}$ разделяются точками $\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\ldots\leqslant\xi_{n+1}$, если $x_1\leqslant\xi_1\leqslant x_2\leqslant\xi_2\leqslant\ldots\leqslant\xi_{n+1}\leqslant x_{n+2}$. В таком случае, если положить $\pi_k(x)=\Pi_{j\neq k}(x-x_j)$, $k=1, 2, \ldots, n+2$, то точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ тогда и только тогда будут разделяться нулями некоторого многочлена $P_{n+1}(x)$, когда этот многочлен представим в виде $P_{n+1}(x)=\Sigma_1^{n+2}\lambda_k\pi_k(x)$, где $\lambda_k\geqslant 0$, $\Sigma\lambda_k=1$.

Доказывается:

1. Если при $p=1$ через $T_{n+1,\,i}(x)$ обозначить те из экстремальных многочленов $T_{n+1}(x)$, все нули которых являются простыми и принадлежат E, то тогда множество всех экстремальных многочленов представимо в виде

$$\sum_i \lambda_i T_{n+1,\,i}(x),\ \text{где}\ \lambda_i\geqslant 0,\ \sum\lambda_i=1, \qquad (1)$$

т. е. это есть множество всех многочленов, нули которых разделяют некоторую систему точек $x_1'<x_2'<\ldots<x_{m_1}'$ из E.

В частности, показывается, что если $n+1=m-1$, то при данном i λ_i в (1) может быть отличным от нуля только тогда, когда $\mu_i\,|\,\omega'(x_i)\,|=\min_j\{\mu_j\,|\,\omega'(x_j)|\}$, где $\omega(x)=\Pi_{l=1}^m(x-x_l)$.

2. Если $p>1$, то для каждого n существует единственный многочлен $T_{n+1}(x)$, причем нули $T_{n+1}(x)$ строго разделяются нулями $T_n(x)$.

3. При $0<p<1$ все $n+1$ нулей $T_{n+1}(x)$ принадлежат E. Этим же свойством обладают также обобщенные экстремальные полиномы $T_{n+1}(x)=\Sigma_1^{n+1}a_\nu^*\psi_\nu(x)$, построенные исходя из произвольной чебышевской на E системы функций $\psi_1(x), \psi_2(x)\ldots\ldots, \psi_{n+1}(x)$. В. К. Дзядык

2123. Построение полиномов от нескольких переменных, наименее уклоняющихся от заданной функции. Гребенюк Д. Г., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, № 15, 111—121

Продолжение работы автора (РЖМат, 1953, 1144), где исследовались полиномы от нескольких переменных, коэффициенты которых связаны несколькими линейными зависимостями, наименее уклоняющиеся в некоторой области от заданной непрерывной функции.

Даются способы построения этих полиномов для случая двух переменных и двух линейных зависимостей с иллюстрацией их на примере построения полинома степени $\leqslant 2$, коэффициенты которого связаны двумя линейными зависимостями, наименее уклоняющегося от функции $\varphi(x,y)=\sqrt{x+y+3}$ в прямоугольнике с вершинами $(-1,1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ С. И. Зуховицкий

2124. О двух квазианалитических классах функций на вещественной оси. Джрбашян М. М., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1955, 8, № 1, 3—14 (резюме арм.)

Пусть $A_\sigma f(x)$ — величина наилучшего приближения на всей оси ограниченной функции $f(x)$ при помощи целых функций конечной степени $\sigma>0$. Обобщая теорему С. Н. Бернштейна (Собр. соч., т. II, 1954, 379), автор доказывает, что если функция $f(x)$ ограничена на всей оси и удовлетворяет условиям: а) для некоторой последовательности чисел $\sigma_1<\sigma_2<\ldots<\sigma_n<\ldots$, $\lim\sigma_n=\infty$, $A_{\sigma_n}f(x)\leqslant Be^{-b\sigma_n}$, где B и b — постоянные, не зависящие от σ; б) $f(x)=0$ на некотором отрезке действительной оси, — то тогда $f(x)\equiv 0$ на всей оси. Из-за определяемости такой функции $f(x)$ на всей числовой прямой ее значениями на некотором отрезке прямой автор называет эту функцию квазианалитической.

Без доказательства приводятся утверждения:

1) Если $\sup\{\sigma_{n+1}/\sigma_n\}<\infty$, то функция $f(z)$, удовлетворяющая условию а), голоморфна и ограничена в некоторой полосе $|\operatorname{Im} z|<a$.

2) Если $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{-1}\ln\sigma_{n+1}=R\geqslant 0$, то $f(x)$ имеет на всей оси производные до порядка $[1/R]$ включительно.

Затем в качестве аппарата приближения рассматриваются рациональные функции

$$R_{n,m}(z)=P_{n+m}(z)/[\Pi_1^n(z-\lambda_k)\Pi_1^m(z-\mu_k)],$$

где $P_{n+m}(z)$ — любой многочлен степени $\leqslant n+m$; $\lambda_k=\alpha_k^*+i\alpha_k$, $\mu_k=\beta_k^*+i\beta_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, причем удовлетворяются условия:

$$\alpha_k^*|\leqslant R,\ |\beta_k^*|\leqslant R,\ \alpha_k\geqslant c,\ \beta_k\geqslant c>0\ (k=1, 2, \ldots),$$

$$\sum_1^\infty\alpha_k^{-1}=+\infty,\ \sum_1^\infty\beta_k^{-1}=+\infty,$$

и доказывается, что если для ограниченной на всей оси функции $f(z)$ при любых натуральных m и n су-

ществует рациональная функция $R_{n,m}(z)$ такая, что

$$\sup |f(x) - R_{n,m}(x)| \leqslant A \exp(-bU_{n,m}),$$

где A и b — постоянные и $U_{n,m} = \min\{\Sigma_1^n \alpha_k^{-1}, \Sigma_1^m \beta_k^{-1}\}$, то тогда функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в некоторой полосе $|\operatorname{Im} z| < a$. Рассмотрен также случай, когда m и n пробегают некоторые подпоследовательности натуральных чисел. В. К. Дзядык

2125. Об интерполировании с помощью целых рациональных функций. **Мюллер** (Über Interpolation mittels ganzer rationaler Funktionen. Müller Max), Math. Z., 1955, **62**, № 3, 292—309 (нем.)

Пусть $\{x_i\}_{i=0}^s$ — множество точек сегмента $[a, b]$; $\{\alpha_i\}_{i=0}^s$ — множество натуральных чисел с $\Sigma_0^s \alpha_i = n+1$, $\max\{\alpha_i\}_{i=0}^s = k$; $H_n(f, x)$ — интерполяционный многочлен Эрмита, однозначно определяющийся из условий $H_n^{(\beta)}(f, x_\sigma) = f^{(\beta)}(x_\sigma)$ ($\beta = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1$, $\sigma = 0, 1, \ldots, s$). Известно, что

$$H_n(f, x) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} f^{(\alpha)}(x_\sigma) L_{\sigma\alpha}(x),$$

где многочлены степени n $L_{\sigma\alpha}(x)$ однозначно определяются из равенств $L_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\tau) = \delta_{\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta}$; $\sigma, \tau = 0, 1, \ldots, s$, $\alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1$, $\beta = 0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1$. Основная часть работы посвящена выяснению вида ядра $K_r(t, x)$ при представлении остатка $R_n(x) = f(x) - H_n(f, x)$ в виде

$$R_n(x) = \int_a^b f^{(r)}(t) K_r(t, x)\, dt,$$

где r — любое натуральное число, удовлетворяющее неравенствам $k - 1 \leqslant r \leqslant n + 1$. Для $K_r(t, x)$ дано представление

$$K_r(t, x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sgn}(x-t)}{(r-1)!}(x-t)^{r-1} - \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} \frac{\operatorname{sgn}(x_\sigma - t)}{(r-1-\alpha)!}(x_\sigma - t)^{r-1-\alpha} L_{\sigma\alpha}(x)\right]. \quad (1)$$

В случае лагранжевой интерполяции и $r = n+1$ формула (1) имеется у Ковалевского (Kowalewski G., Dtsch. Math., 1938, **3**, 275—280). Пусть $B_r(t)$ — полином Бернулли степени r со старшим коэффициентом 1. Вводится функция $\mathfrak{B}_r(t) = B_r(t - [t])$, где $[t]$ — целая часть числа t. Тогда

$$K_r(t, x) = Q_r(t, x) - \frac{(t-a)^{r-1}}{r!}\mathfrak{B}_r\left(\frac{x-t}{b-a}\right) + \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} \frac{(b-a)^{r-1-\alpha}}{(r-\alpha)!}\mathfrak{B}_{r-\alpha}\left(\frac{x_\sigma - t}{b-a}\right) L_{\sigma\alpha}(x), \quad (2)$$

где $Q_r(t, x) \equiv 0$ при $r \leqslant n$ и $Q_{n+1}(t, x) = \frac{1}{(n+1)!\,(b-a)} \Pi_{j=0}^{s} (x - x_j)^{\alpha_j}$

В случае лагранжевой интерполяции формула (2) имеется у Вегнера (Wegner U., Dtsch. Math., 1935, **1**, 103—107, 352—358) Положим $L_{\sigma\alpha} \int_a^b L_{\sigma\alpha} = (x)\, dx$, $R_n = \int_a^b R_n(x)\, dx$. Тогда $R_n = \int_a^b f^{(r)}(t)\, \psi_r(t)\, dt$, где для $\psi_r(t)$ справедливы представления:

$$\psi_r(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{(a-t)^r + (b-t)^r}{r!} - \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} L_{\sigma\alpha} \frac{\operatorname{sgn}(x_\sigma - t)}{(r-1-\alpha)!}(x_\sigma - t)^{r-1-\alpha}\right], \quad (3)$$

$$\psi_r(t) = C_r + \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} \frac{(b-a)^{r-1-\alpha}}{(r-\alpha)!} L_{\sigma\alpha}\left(\frac{x_\sigma - t}{b-a}\right), \quad (4)$$

где $C_r = 0$ при $1 \leqslant r \leqslant n$, $C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!\,(b-a)} \times \int_a^b \Pi_0^s (x - x_i)^{\alpha_i} dx$. В случае лагранжевой интерполяции формула (4) имеется у Виртингера (Wirtinger W., Z. angew. Math. und Mech., 1933, **13**, 166—168). Формула (3) находится у Кнешке (Kneschke A., J. reine und angew. Math., 1949, **187**, 115—128). Д. Л. Берман

2126 К. Академик С. Н. Бернштейн и его работы по конструктивной теории функций. **Ахиезер Н. И.**, Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1955, 112 стр.

Имеется список трудов С. Н. Бернштейна (275 назв.).

2127 Д. Экстремальные полиномы конечных функционалов. **Вороновская Е. В.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1955

2128 Д. О некоторых задачах приближения функций посредством целых функций и полиномов. **Мамедов Р. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. гос. пед. ин-т, Баку, 1955

См. также: 1862, 1932, 1933, 2064, 2131, 2172, 2225, 2226, 2296, 2346, 2347

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2129. Соотношения между коэффициентами аналитической функции и ее обратной функции. **Кантц** (Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer analytischen Funktion und ihrer Umkehrfunktion. Kantz Georg), Monatsh. Math., 1955, **59**, № 1, 27—33 (нем.)

Для двух взаимно обратных функций приводится явное выражение производной порядка n одной из них через производные другой. Т. И. Краснощекова

2130. Характеристическое свойство аналитических функций. **Мак-Лафлин, Тайтус** (A characterization of analytic functions. McLaughlin J. E., Titus C. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 3, 348—351 (англ.)

Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство непрерывно дифференцируемых отображений области D с неотрицательным якобианом, который может обращаться в нуль только вместе со всеми частными производными; пусть еще $\mathfrak{F}$ вместе с каждой парой отображений f_1 и f_2 содержит $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ (λ_1, λ_2 — действительные постоянные).

Доказывается теорема: Если $\mathfrak{F}$ содержит две аналитические функции f_1 и f_2, для которых $\operatorname{Im} \overline{f_1'} f_2' \neq 0$ в D, то $\mathfrak{F}$ является линейным векторным пространством сех аналитических функций.

Доказательство опирается на две алгебраические леммы:

1. Пусть $\mathfrak{S}$ — векторное пространство матриц

$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a и b — действительные числа. Тогда $\mathfrak{S}$ изоморфно совокупности комплексных чисел и обладает свойством (P): $\det C \geqslant 0$ для всех $C \in \mathfrak{S}$ и $\det C = 0$ только, если $C = 0$. Пространство $\mathfrak{S}$ является максимальным векторным пространством, обладающим свойством (P).

2. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое векторное пространство в пространстве всех действительных матриц второго порядка, обладающее свойством (P). Тогда $\mathfrak{M}$ либо одномерно и эквивалентно совокупности скаляров, либо двумерно и эквивалентно пространству $\mathfrak{S}$.

Первая из лемм элементарна, вторая основывается на теореме Сколема — Нётер (Вейль Г., Классические группы, М., 1947, 378). Б. В. Шабат

2131 **Множества расходимости рядов Тейлора и тригонометрических рядов. Эрдёш, Херцог, Пиранян** (Sets of divergence of Taylor series and of trigonometric series. Erdös Paul, Herzog Fritz, Piranian George), Math. scand., 1954, **2**, № 2, 262—266 (англ.)

Множество точек E на единичной окружности $C(|z| = 1)$ называется множеством логарифмической меры нуль, если оно может быть покрыто множеством дуг l_j с длинами $L_j (L_j < 1,\ j = 1, 2, \ldots)$ такими, что сумма ряда $\Sigma_1^\infty |\ln L_j|^{-1}$ сколь угодно мала. Доказаны следующие теоремы для $E \subset C$ и

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n. \qquad (1)$$

1. Если множество E имеет логарифмическую меру нуль, то существует функция $f(z)$, непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и такая, что последовательность частичных сумм ряда (1) равномерно ограничена на C и расходится на E.

2. Если множество E типа F_σ и логарифмической меры нуль, то существует функция $f(z)$, непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и такая, что последовательность частичных сумм ряда (1) равномерно ограничена на C, расходится на E и сходится на $C \setminus E$.

3. Если множество $E = F_1 \cup F_2$, где E_1 типа F_σ и логарифмической меры нуль, а E_2 типа G_δ, то существует ряд Тейлора, который расходится на E и сходится на $C \setminus E$.

Аналогичные теоремы доказаны и для тригонометрических рядов. Н. А. Давыдов

2132. **О действительных характеристиках степенных рядов. Кёслер** (Über reelle Charakteristiken von Potenzreihen. Kössler Milos), Чехосл. матем. ж., 1954, **4**, № 3, 274—282 (нем.; резюме русс.)

Пусть

$$w = f(z) = z + \sum_2^\infty (a_k + ib_k) z^k \qquad (1)$$

— степенной ряд с положительным радиусом сходимости. Нетрудно видеть, что для достаточно малых r функция

$$A(r) = \max_{0 \leqslant \varphi < 2\pi} u(re^{i\varphi}), \qquad (2)$$

где $u(re^{i\varphi}) = \operatorname{Re} f(re^{i\varphi})$, разлагается в степенной ряд по степеням r с действительными коэффициентами:

$$A(r) = r + C_2 r^2 + C_3 r^3 + \ldots \qquad (3)$$

Рассматривается вопрос, как по заданной в виде степенного ряда (3) функции $A(r)$ найти такой степенной ряд (1), чтобы при достаточно малых r имело место соотношение (2). Пусть $\varphi_1(r)$ — значение φ, при котором $u(re^{i\varphi_1}) = A(r)$. Устанавливается, что $\varphi_1(r)$ при достаточно малом r определяется степенным рядом

$$\varphi_1(r) = \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \cdots \qquad (4)$$

и имеет место основное соотношение

$$rA'(r) = re^{i\varphi_1} f'(re^{i\varphi_1}), \qquad (5)$$

позволяющее решить поставленную задачу. Показывается, что при отыскании $f(z)$ по заданной функции $A(r)$ можно для $\varphi_1(r)$ брать произвольный степенной ряд вида (4) с действительными коэффициентами и положительным радиусом сходимости; тогда функция $f(z)$, определенная в результате решения уравнения (5) по описываемой в работе схеме, будет удовлетворять при достаточно малом r соотношению (2). Следовательно, степенных рядов (1), для которых при достаточно малых r $A(r)$ определяется одним и тем же рядом (3), несчетное множество. Задача, подобная рассмотренной выше, ставится затем для других действительных характеристик степенного ряда: $B(r) = \min_{0 \leqslant \varphi < 2\pi} u(re^{i\varphi})$, $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $m(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|$, и показывается, что решение этих задач легко сводится к решению задачи для $A(r)$.

Приводятся примеры различных классов функций, имеющих одну и ту же характеристику $A(r)$.

Г. Ц. Тумаркин

2133. **Об абсциссе суммируемости ряда Дирихле. Боруэйн** (On the abscissae of summability of a Dirichlet series. Borwein D.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 68—71 (англ.)

Ряд $\Sigma_1^\infty c_n$ наз. (R, l, k)-суммируемым, если существует $\lim_{t \to \infty} C_l^k(t)\, t^{-k}$, где $C_l^k(t) = \Sigma_{l_n < t} c_n (t - l_n)^k$, а $\{l_n\}$ — заданная монотонная последовательность с $l_n \to \infty$. Если сходится интеграл

$$\int_A^\infty \left| \frac{d}{dt} [C_l^k(t)\, t^{-k}] \right| dt \quad (A > 0),$$

то ряд $\Sigma_1^\infty c_n$ называется $|R, l, k|$-суммируемым. Бозанке (Bosanquet L. S., J. London Math. Soc., 1947, 22, part 3, № 87, 190—195) доказал, что если σ_k — абсцисса (R, l, k)-суммируемости ряда Дирихле $\Sigma a_n l_n^{-s}$, а $\bar{\sigma}_k$ — абсцисса $|R, l, k|$-суммируемости того же ряда, то при $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство $\bar{\sigma}_k \leqslant \sigma_k + D$, где $D = \overline{\lim}_{n \to \infty} \ln n / \ln l_n$. Остин (Austin M. C., J. London Math. Soc., 1952, 27, part 2, № 106, 189—198) показал справедливость более общего неравенства $\bar{\sigma}_{k+x} \leqslant \sigma_k + (1 - x) D$ для любого $k \geqslant 0$, если $0 < x \leqslant 1$, а также и при $x = 0$, если $k \neq k_0$, где k_0 — нижняя грань множества значений k, для которых $\sigma_k < \infty$.

В реферируемой статье доказывается, что неравенство $\bar{\sigma}_k \leqslant \sigma_k + D$ имеет место при всяком $k \geqslant 0$ без исключения. Г. Л. Лунц

2134. **О значении арифметических свойств показателей в ряде Дирихле. Мандельбройт** (Influence des propriétés arithmétiques des exposants dans une série de Dirichlet. Mandelbroit S.), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1954, **71**, № 3, 301—320 (франц.)

Устанавливаются результаты, примыкающие к ранее опубликованным автором (РЖМат, 1953, 679). Смысл их состоит в том, что если функция

$$f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it,\ \lambda_{n+1} - \lambda_n > h > 0) \qquad (1)$$

из полуплоскости сходимости P_c: $\operatorname{Re} s = \sigma > c$ продолжима определенным образом в полуплоскость P_a: $\sigma > a$ ($a < c$) и вблизи особых точек из этой полуплоскости растет не быстрее некоторой функции $A(t)$ при $t \to \infty$, то тогда среди дробных частей (λ_n) показателей λ_n имеются группы равных, причем число элементов в группе зависит от роста $A(t)$ и при некоторых условиях может быть бесконечным.

Пусть R, $P_c \subset R \subset P_a$, — такая область, что имеется функция, аналитическая и однозначная в R, которая совпадает с $f(s)$ в P_c. Если существует среди таких областей R наибольшая область R_a (она содержит в себе все R), то говорят, что $f(s)$ допускает однозначное продолжение в P_a. Множество $S_a^f = P_a - R_a$ называется при этом особым множеством $f(s)$ в P_a. Пусть (при любом $\varepsilon > 0$) в точках R_a, отстоящих от S_a^f на расстоянии $\geqslant \varepsilon$, $f(s) = O[A(|t|)]$ $(t \to \infty)$, говорят, что $f(s)$ в P_a вблизи особых точек растет не быстрее $A(t)$.

Пусть $S_a^{f,*}$ — замыкание множества точек $\alpha + 2k\pi i$, где α — произвольная точка из S_a^f, а k — произвольное целое; Σ — пересечение $S_a^{f,*}$ с прямой сходимости $\sigma = c$. Если Σ не совпадает со всей прямой сходимости, то говорят, что $f(s)$ продолжима по модулю $2\pi i$ через прямую сходимости, в противном случае прямая сходимости называется для $f(s)$ купюрой по модулю $2\pi i$.

Пусть Ω — множество дробных частей (λ_n) показателей λ_n (если $\omega \in \Omega$, то имеется одно или несколько таких λ_n, что $(\lambda_n) = \omega$); Λ_ω — множество всех λ_n, для которых $(\lambda_n) = \omega$; $\lambda^{(\omega)}$ — наименьший элемент в Λ_ω; $\nu^{(\omega)}$ — число элементов в Λ_ω; $\delta^{(\omega)}$ — расстояние от $\omega \neq 0$ (предполагается, что $\omega \in \Omega$ является изолированной точкой в Ω) до других точек Ω.

Теорема 1. Пусть 1) функция $f(s)$, определенная рядом (1), допускает однозначное продолжение в полуплоскость P_a ($a < c$) и в этой полуплоскости вблизи особых точек растет не быстрее неубывающей функции $A(t)$ ($t > 0$), удовлетворяющей условию $\int^\infty t^{-2} \ln A(t)\, dt < \infty$; 2) $f(s)$ продолжима по модулю $2\pi i$ через прямую сходимости; 3) множество Ω содержит в себе последовательность $\{\omega_n\}$ изолированных точек ω_n, причем

$$\lim_{n \to \infty} h(\lambda^{(\omega_n)} / \delta^{(\omega_n)}) / \delta^{(\omega_n)} = 0, \qquad (2)$$

где $h(x) = \int_x^\infty t^{-2} \ln A(t)\, dt$; 4) в каждом Λ_{ω_n} существует такое λ_{m_n}, что $\lambda_{m_n}^{-1} \ln |a_{m_n}| \to c$ при $n \to \infty$. Тогда имеем $\overline{\lim}_{n \to \infty} \nu^{(\omega_n)} / \lambda^{(\omega_n)} > 0$.

Если $f(s)$ ограничена вблизи особых точек в P_a, то тогда $A(t) = 1$, $h(x) \equiv 0$ и условие (2) автоматически выполняется. В этом случае заключение теоремы будет справедливым без указания на условие (2). В этом состоит теорема II. Из нее в качестве следствия можно получить (автор этого не отмечает) теорему, приведенную в вышеуказанном реферате.

Теорема III. Если при условиях теоремы I для бесконечного множества значений n $\nu^{(\omega_n)} < \infty$, то существует по крайней мере одна точка S_a^f, расположенная на прямой сходимости $\sigma = c$, которая не принадлежит никакой изолированной части S_a^f по модулю $2\pi i$. При этом множество S называется изолированной частью S_a^f по модулю $2\pi i$, если оно обладает свойствами: $S \subset S_a^{f,*}$ и существует замкнутая простая кривая Жордана, содержащаяся в $P_a - S_a^{f,*}$ и содержащая внутри себя множество S. А. Ф. Леонтьев

2135. Простые базисные множества полиномов. Михаил (Simple basic sets of polynomials. Mikhail M. N.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 3,647—653 (англ.)

Пусть $\{p_n(z)\}$ и $\{q_n(z)\}$ — базисные множества полиномов, причем p_n и q_n имеют степень n. Доказываются следующие теоремы (определения и обозначения см. РЖМат, 1955, 693):

1. Если порядок $\{p_n(z)\}$ есть ω и $|p_{nn}| = O(n^h)$, то для порядка ω^* обратного множества $\{p_n(z)\}^*$ имеем: $\omega / 2 \leqslant \omega^* \leqslant 2\omega$.

2,3. Если порядок $\{p_n(z)\}$ есть ω_p, порядок $\{q_n(z)\}$ — ω_q, причем $\omega_p > 2\omega_q \geqslant 0$ и $|q_{nn}| = O(n^h)$, то для порядка ω_u множества $\{p_n(z)\}$ $\{q_n(z)\}$ имеем: $\omega_p + 2\omega_q \geqslant \omega_u \geqslant \omega_p - 2\omega_q$; если же $\omega_q > 2\omega_p \geqslant 0$ и $|p_{nn}| = |q_{nn}| = O(n^h)$, то $\omega_p + 2\omega_q \geqslant \omega_u \geqslant \omega_q / 2 - \omega_p$.

4. Если $|p_{nn}| = O(n^h)$ и $C \leqslant 1$, то данное базисное множество и множество, ему обратное, эффективны в одной и той же области.

5. Если $|q_{nn}| = O(n^h)$, то множество-произведение и множество-частное эффективны на $|z| = R$, где $R \geqslant \max(b_p, b_q)$.

2136. Бесконечные матрицы, связанные с базисными множествами полиномов. Вермс (Infinite matrices associated with basic sets of polynomials. Vermes Paul), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 182 (англ.)

Рассматривая базисные множества полиномов

$\{p_n(z) = (z + \alpha^n)^n\}$ и $\{q_n(z) = (z + a_j)^n\}$, $n \equiv j \pmod h$,

автор находит точное выражение для обратных матриц к матрицам коэффициентов $P = (p_{nk})$ и $(Q = q_{nk})$ этих множеств. Находятся порядок и тип базисных множеств, которые, как отмечает автор, были известны и ранее. Имеется перечень некоторых предшествующих работ. С. Я. Хавинсон

2137. Об одном обобщении лемм Шварца и Левнера. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г., Уч. зап. Харьковск. ун-та, **40**, Зап. матем. отд. физ.-матем. фак. и харьковск. матем. о-ва, 1952, **23**, 95—101 (журнал вышел из печати в 1954 г.)

Определяется класс функций $S(a, \infty)$, регулярных в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, действительных и регулярных на интервале $(-\infty, a)$ и $\operatorname{Im} F(z) > 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$.

Теорема. Для того чтобы существовала функция $F(z) \in S(a, \infty)$, удовлетворяющая условиям:

$$F(z_\alpha) = w_\alpha \quad (\operatorname{Im} z_\alpha \geqslant 0,\ \alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

$$F(i) = iT \quad (T > 0),$$

необходимо и достаточно, чтобы при любых ξ_α

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n+1} \frac{w_\alpha - \overline{w}_\beta}{z_\alpha - \overline{z}_\beta} \xi_\alpha \overline{\xi}_\beta \geqslant 0,$$

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} \frac{\Omega_\alpha - \overline{\Omega}_\beta}{z_\alpha - \overline{z}_\beta} \xi_\alpha \overline{\xi}_\beta \geqslant 0, \qquad (1)$$

где $\Omega_\alpha = (w_\alpha - T z_\alpha)(z_\alpha - a)(1 + z_\alpha^2)^{-1}$.

Если при некоторой нетривиальной системе чисел ξ_α одна из форм (1) обращается в нуль, то

$$F(z) = \mu z + \Sigma \lambda_k (1 + t_k z)(t_k - z)^{-1},$$

где $\mu \geqslant 0$, $\lambda_k \geqslant 0$, $a_n < t_1 < \ldots < t_n < \infty$. При $a = -\infty$ второе условие (1) отпадает и получается теорема, которая впервые была доказана Пиком в несколько более узкой формулировке (Pick G., Math. Ann., 1916, 77).

Следствие. Для принадлежности $F(z)$ классу $S(a, \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы принадлежали $S(-\infty, \infty)$ функции $F:(z)$ и

$$[F(z) - \operatorname{Re} F(i)] \frac{z - a}{1 + z^2} + \frac{\operatorname{Im} F(i)}{1 + z^2}(1 + az).$$

При $n = 1$ из основной теоремы получается теорема: Если $F(z) \in S(a, \infty)$, $F(i) = i$ и ζ — точка в полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > 0$, то точка $\omega = F(\zeta)$ лежит в круговом сегменте, ограниченном прямолинейным отрезком d, соединяющим точки ζ, $(1 + a\zeta)/(a - \zeta)$, и дугой c окружности, проходящей через эти точки, с центром на мнимой оси и образующей с отрезком d угол $\varphi = \pi - \arg(\zeta - a)$.

Если $\omega \in c$, то $F(z) = (1 + \lambda z)/(\lambda - z)$, и если $\omega \in d$, то $F(z) = z(1 - \mu) + \mu(1 + az)/(a - z)$ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$.

Из этой теоремы получаются леммы Шварца и Левнера. Наоборот, эту теорему можно получить из указанных двух лемм. Б. Я. Левин

2138. **Исчисление поверхностных разностей в теории функций. Грунский** (Flächendifferenzenrechnung in der Funktionentheorie. Grunsky H.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 114—115 (нем.)

Пусть $\mathfrak{P}$ — многоугольник на плоскости z с вершинами z_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, $f(z)$ функция, определенная в $\overline{\mathfrak{P}}$. Поверхностная разность (Flächendifferenz) $\Delta_{\mathfrak{P}} f$ определяется формулой

$$\Delta_{\mathfrak{P}}(f) = (i/2) \sum_{\nu=1}^{n} (\varepsilon_{\nu-1}^{-2} - \varepsilon_\nu^{-2}) f(z_\nu),$$

где ε_ν $(|\varepsilon_\nu| = 1)$ — направление стороны $\overline{z_\nu z_{\nu+1}}$. Из формулы

$$\iint_{\mathfrak{P}} f''(z)(dz) = \Delta_{\mathfrak{P}} f(z),$$

где (dz) — элемент площади, $f(z)$ — функция, аналитическая в $\mathfrak{P}$, получается «формула суммирования Эйлера», если соответствующим образом определить «полиномы Бернулли». Доказательства не приводятся.

А. Х. Турецкий

2139. **Интерполяционная задача Абеля-Гончарова и свойства некоторых операторных уравнений в пространствах аналитических функций. Евграфов М. А.**, Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 208—210

Решается задача о возможно более точном определении класса целых функций $F(z)$, представимых во всей плоскости интерполяционным рядом Абеля—Гончарова

$$F(z) = \sum_0^\infty F^{(n)}(\lambda_n) P_n(z), \quad P_n(z) = \int_{\lambda_0}^{z} \cdots \int_{\lambda_{n-1}}^{z_{n-1}} dz_1 \ldots dz_n \quad (1)$$

в случае, когда $\lambda_n = n^{1/\rho}$. По заданному ρ определяется область G_ρ: $|\zeta_\rho(z)| < a_\rho$, где $a_\rho = \rho$ при $\rho < 1$, $a_\rho = e^{1/\rho - 1}$ при $\rho \geqslant 1$, $\zeta_\rho(z) = w_\rho(z)\, e^{w_\rho(z)/\rho}$, $z = \rho^{-1/\rho} \times w_\rho(z)[1 + w_\rho(z)]^{1/\rho - 1}$, $w_\rho(0) = 0$, и функция $\Phi_\rho(z)$:

$$\Phi_\rho(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_\rho z n^{-1/\rho}) \quad \text{при} \quad \rho < 1, \quad c_\rho^\rho = \pi / \sin \pi\rho,$$

$$\Phi_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n/\rho + 1)} \quad \text{при} \quad \rho \geqslant 1.$$

Доказывается, что целая функция, представимая в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(\zeta)\, \Phi_\rho(z\zeta)\, d\zeta, \quad (2)$$

где $f(\zeta)$ регулярна вне G_ρ и контур c обходит область G_ρ, может быть разложена в ряд (1) с узлами $\lambda_n = n^{1/\rho}$, и наоборот, функция, выражаемая рядом (1), сходящимся со скоростью геометрической прогрессии, может быть представлена интегралом (2).

Далее формулируется полученный отсюда результат о распределении значений последовательных производных целой функции и указывается, что менее точные результаты можно получить в случае узлов $\lambda_n = \lambda(n)$, $n\lambda'(n)/\lambda(n) \to \rho^{-1}$. Доказательства не приводятся. Имеется опечатка: стр. 208, строка 4 снизу, в правой части равенства вместо 0 нужно θ. М. Г. Хапланов

2140. **Об интерполировании функций, аналитических в полуплоскости. Трошин Г. Д.**, Матем. сб., 1955, 36(78), № 1, 39—56

В классе функций $f(z)$, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 0$ и удовлетворяющих при больших $\operatorname{Re}(z)$ условию $|f(z)| < e^{a \operatorname{Re}(z)}$, где a — постоянная (для разных функций, вообще, разная), решается интерполяционная задача: указать условия, которым должны удовлетворять узлы λ_n, $-\alpha \leqslant \arg \lambda_n \leqslant \alpha < \pi/2$, $\lambda_n \to \infty$, для того чтобы по любой системе чисел $\{a_n\}$ такой, что $|a_n| < e^{a \operatorname{Re}(\lambda_n)}$, можно было найти в рассматриваемом классе функцию $f(z)$ со свойством $f(\lambda_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказывается (теорема 1), что этими условиями (необходимыми и достаточными) являются:

$$\sum_1^\infty |\lambda_n|^{-1} < \infty, \quad (1)$$

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} |\lambda_n|^{-1} \ln |\Phi'(\lambda_n)|^{-1} < \infty, \quad (2)$$

где $\Phi(z) = \prod_1^\infty (1 - z/\lambda_n)/(1 + z/\overline{\lambda_n})$. В случае, когда условие (2) не выполняется, ставится задача: определить, при каких ограничениях, налагаемых на $\{a_n\}$, интерполяционная задача разрешима. Эти ограничения (теорема 2) заключаются в том, что в некоторой области: $|\arg z| < \mu$, $|z| > R$, должна сходиться последовательность полиномов Дирихле

$$\sum_1^n a_k (1 + \lambda_k)^1 [T'_{1,\infty}(\lambda_k)]^{-1} T_{n+1,\infty}(\lambda_k)\, e^{-\lambda_k z},$$

где $T_{p,q}(z) = (1 + z)^{-2} \prod_{s=p}^{q} (1 - z/\lambda_s)/(1 + z/\overline{\lambda_s})$.

Приведенные результаты как по характеру, так и по методу доказательства аналогичны результатам, полученным референтом для класса целых функций конечного порядка (Докл. АН СССР, 1948, 61, № 5, 785—787; 1949, 66, № 2, 153—156; Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 39). А. Ф. Леонтьев

2141. **О функциональном уравнении $E_r(f) = \Sigma_0^p P_i(x) f(x + \omega_i) = 0$. Гермэнеску** (Asupra ecuaţiei funcţionale $E_r(f) = \Sigma_0^p P_i(x) f(x + \omega_i) = 0$.

Ghermanescu M.), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1954, 4, № 7—8, 341—343 (рум.; резюме русс., франц.)

2142. К конформному отображению односвязных однолистных областей. Хейнхольд (Zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender schlichter Gebiete. Heinhold Jose), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 120 (нем.)

Рассматриваются однозначные аналитические функции, конформно отображающие одну часть единичного круга на какую-либо другую его часть с условием увеличения расстояний в метрике Пуанкаре. В общих чертах указывается, что проблема приближенного конформного отображения области на круг может быть сведена к итерации таких функций. И. Е. Базилевич

2143. О методе последовательных конформных отображений. Фильчаков П. Ф., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 1, 25—28

Известный метод последовательных конформных отображений разрабатывается применительно к численному определению функции, отображающей данную односвязную область B на полуплоскость. После отображения B на область B_1, принадлежащую нижней полуплоскости H, для аппроксимации функции, отображающей B_1 на H, используются последовательности функций $z_{n+1}(z_n)$ и областей B_n такие, что $B_n \subset H$, B_n сходятся к H как к ядру, $z_{n+1}(z_n)$ отображает нижнюю полуплоскость с тем или другим не пересекающимся с B_n полуэллиптическим вырезом (или с вертикальным разрезом) на нижнюю полуплоскость и вместе с тем B_n на B_{n+1}. В качестве примера приведено численное решение задачи о фильтрации под одношпунтовой плотиной при бесконечной глубине водопроницаемого слоя.

П. П. Куфарев

2144. Зависимость между уравнением Лёвнера и уравнением $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{w - \lambda(t)}$. Попова Н. В., Изв. АН БССР, 1954, № 6, 97—98

Зависимость между уравнением Лёвнера и уравнением $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{w - \lambda(t)}$. Попова (Залежнасць паміж ураўненнем Лёўнера і ураўненнем $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{w - \lambda(t)}$. Папова Н. В.), Весці АН БССР, 1954, № 6, 92—93 (белорус.)

Уравнение

$$dv/dt_1 = [v - \lambda(t_1)]^{-1} \operatorname{Im} \lambda = 0 \qquad (1)$$

играет для функций, однолистных в полуплоскости, такую же роль, как уравнение Лёвнера

$$dw/dt = w(w + \mu)/(w - \mu) \qquad (2)$$

для функций, однолистных в круге. В статье устанавливается, что, как и следовало ожидать, между уравнениями (1) и (2) имеется связь. Показывается, что если $e^{i\alpha}$ — интеграл уравнения (2) и

$$db/dt = -2be^{i\alpha}(e^{i\alpha} - \mu)^{-2},$$

$$b > 0,\ da/dt = -(d\alpha/dt)(db/dt),$$

то преобразованием

$$w = e^{i\alpha}\frac{v - a - bi}{v - a + bi},\quad t_1 = -2\int (db/dt)^2\,dt$$

уравнение (2) переводится в уравнение (1).

П. П. Куфарев

2145. К вопросу о свойствах функций, однолистных в полуплоскости. Попова Н. В., Сб. науч. тр. Белорус. политехн. ин-та, 1954, № 44 (6), 480—483

Оценивается вторая производная от функции $w(z)$, конформно отображающей полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на однолистную область в той же полуплоскости:

$$|w''(z)| \leqslant \frac{2 \operatorname{Im} w}{\operatorname{Im}^2 z} \ln \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z}.$$

При доказательстве используется аналогичное уравнению Лёвнера уравнение $dw/dt = A[w - \lambda(t)]^{-1}$, $\operatorname{Im} \lambda(t) = 0$, интегралами которого, рассматриваемыми как функции начального значения $w_0 = z$, как было показано автором (Уч. зап. Новосибирск. пед. ин-та, 1949, № 8), можно аппроксимировать функции рассматриваемого класса. П. П. Куфарев

2146. Об одном классе однолистных функций. Гальперин И. М., Тр. Киевск. автомоб.-дор. ин-та, 1955, № 2, 189—191

Пусть K — класс функций $f(z) = z + \sum_2^\infty a_k z^k$, $a_1 = 1$, однолистных и регулярных в $|z| < 1$, отображающих круг $|z| < 1$ на выпуклые области. Обобщается результат референта (Докл. АН СССР, 1951, 78, № 2, 209—211), именно: функции

$$\Phi_{\alpha\lambda,\beta\mu}(z) = (\lambda e^{i\alpha} + \mu e^{i\beta})^{-1}[\lambda e^{i\alpha} f(z) + \mu e^{i\beta} z f'(z)],$$

$$\lambda,\ \mu > 0,\ |\alpha - \beta| < \pi/2,$$

однолистны в $|z| < 1$, если $f(z) \in K$. Для этих функций приводятся структурная формула, точные оценки коэффициентов, оценки модуля функции и ее производной (последние оценки только для случая $\alpha = \beta = 0$). Б. Н. Рахманов

2147. О конформном отображении многосвязных областей. Уолш (Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes. Walsh Joseph L.), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 23, 1572—1574 (франц.)

Доказывается следующая теорема, имеющая приложения в теории аппроксимации аналитических функций (РЖМат, 1955, 5736):

Пусть D — многосвязная область плоскости z, граница которой состоит из кривых Жордана $B_1, \ldots, B_\mu$, $C_1, \ldots, C_\nu$, не имеющих попарно общих точек. Существует конформное отображение D на область Δ плоскости Z, взаимно однозначное и непрерывное в замкнутых областях $\overline{D}$ и $\overline{\Delta}$, где Δ определяется неравенствами

$$1 < \left| \frac{A(Z - a_1)^{M_1} \ldots (Z - a_\mu)^{M_\mu}}{(Z - b_1)^{N_1} \ldots (Z - b_\nu)^{N_\nu}} \right| < e^{1/\tau}\ (\tau > 0);$$

числа M_j и N_j могут быть иррациональными. Образы кривых B_j и C_j отделяют соответственно a_j и b_j от области Δ. И. Е. Базилевич

2148. Симметризация и однолистные функции в кольце. Кубо (Symmetrization and univalent functions in an annulus. Kubo Tadao), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 1, 55—67 (англ.)

Рассматривается класс $\mathfrak{F}$ правильных и однолистных в кольце $D(0 < Q < |z| < 1)$ функций $w = f(z)$, $|w| \geqslant Q$, отображающих D на двусвязные области так, что окружность $|z| = Q$ переходит в окружность $|w| = Q$. Методом симметризации, принадлежащим Пойа и Сегё (Pólya G., Szegö G., C. r. Acad. sci., 1950, 230, 25—27), доказываются для этих функций теоремы 1 и 2, аналогичные соответственно теоремам Дженкинса (РЖМат, 1954, 2920) и Гудмана (Goodman R. E., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 363—369).

для функций, правильных и однолистных в круге $|z|<1$.

Теорема 1. Пусть $L(f, r)$ — мера множества точек окружности $|w|=r$ $(Q<r<1)$ не покрытых значениями функции $f(z)\in\mathfrak{F}$ в кольце D. Тогда справедливо точное неравенство $L(f, r)\leqslant 2r\delta_1(r)$, в котором $\delta_1(r)$ неявно определяется следующим образом.

Известно (Komatu Y. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 1943, 25, 1—42), что функция $w=H_q(z, p)=z\theta(qz/p)/\theta(pz/q)$, $\theta(z)=\Sigma_{n=-\infty}^{+\infty}q^{n^2}z^n$, отображает кольцо $q<|z|<1$ на круг $|w|<1$ с разрезом по дуге окружности $|w|=p>0$, причем середина этой дуги лежит в точке p, а концы ее w_1 и w_2 имеют $\arg w_i=\pm\delta(p, q)$. Известна также функция $w=f_0(z, q)$ (Grötzsch H., Leipziger Berichte, 1928, 80, 367—376, 497—502), отображающая кольцо D на кольцо $q<|w|<1$ с разрезом по радиусу от точки $w=1$ до точки $w=\omega_q$. Доказывается, что из уравнения $Q\omega_q q^{-1}=r$ определяется единственным образом $q=q(r)$. Тогда $\delta_1(r)$ в теореме 1 имеет смысл $\delta_1(r)=\delta(Qr^{-1}, q(r))$.

Теорема 2. Пусть c — фиксированное число, $|c|>Q$, и функция $w=f(z)\in\mathfrak{F}$ не принимает в кольце D значений ξ, удовлетворяющих неравенству $|\xi-c|\leqslant R$. Тогда справедлива точная оценка $R\leqslant R_0=|c|/\omega_q-Q/q$, где q и ω_q определяются из соотношений $c=Q\omega_q(1-q^2)/[q(1-\omega_q^2)]$ и $f_0(1, q)=\omega_q$.

Доказываются также аналогичные теоремы для подкласса ограниченных в кольце D функций $f(z)\in\mathfrak{F}$: $|f(z)|<M$, а также функций $f(z)\in\mathfrak{F}$, подчиненных условию $\operatorname{Re} f(z)>-c\,(c>0)$, и некоторых других.

И. Е. Базилевич

2149. Некоторые теоремы единственности в теории симметризации. Дженкинс (Some uniqueness results in the theory of symmetrization. Jenkins James A.), Ann. Math., 1955, 61, № 1, 106—115 (англ.)

Доказываются четыре теоремы. Последнюю из них не приводим из-за громоздкости предварительных условий.

Пусть D — ограниченная однолистная двусвязная область w-плоскости, дополнение которой состоит из двух невырожденных континуумов C_1 и C_2, из которых один и только один, например C_1, ограниченный. Применяя к области D процесс круговой симметризации относительно точки $w=0$, превращаем ее в однолистную ограниченную двусвязную область D^*, причем континуумы C_1 и C_2 превращаются соответственно в C_1^* и C_2^*.

Пусть функция $w=f(z)$ осуществляет взаимно однозначное конформное отображение области D на круговое кольцо $r_1<|z|<r_2$ так, что окружности $|z|=r_1$ соответствует компонента границы области D, принадлежащая C_1. Положим $M(D)=(2\pi)^{-1}\ln(r_2/r_1)$ (модуль двусвязной области D). Пусть $f^*(z)$ и $M(D^*)$ — соответствующие величины для D^*. Тогда, как было установлено ранее, $M(D^*)\geqslant M(D)$. В реферируемой работе доказана

Теорема 1. Равенство $M(D)=M(D^*)$ имеет место тогда и только тогда, когда $f^*(z)=e^{i\alpha}f(e^{i\beta}z)$, где α и β — действительные (т. е. когда D^* получается из D вращением на некоторый угол относительно центра симметризации $w=0$).

Пусть Q — односвязная однолистная область w-плоскости, граница которой содержит две дуги окружности $|w|=R_0$, а все остальные точки Q вместе с точками границы, не принадлежащими упомянутым дугам, лежат в области $|w|>R_0$. Отобразим область Q на прямоугольник с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4, перенумерованными в положительном направлении обхода, так, чтобы дугам окружности $|w|=R_0$ соответствовали стороны A_1A_2 и A_3A_4 прямоугольника. Обозначим $A_1A_2/A_2A_3=m(Q)$ и пусть отображающая функция есть $w=\psi(z)$. Подвергая Q круговой симметризации относительно точки $w=0$, получаем область Q^*, аналогичную Q, но симметричную относительно оси $\operatorname{Im} w=0$. Через $m(Q^*)$ и $\psi^*(z)$ обозначим соответствующие величины для Q^*. Тогда $m(Q^*)\geqslant m(Q)$.

Теорема 2. Равенство $m(Q^*)=m(Q)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\psi^*(z)=e^{i\alpha}\psi(z)$, где α — действительное (т. е. когда область Q^* получается простым вращением области Q^* на некоторый угол α относительно точки $w=0$).

Пусть E — однолистная односвязная область гиперболического типа в w-плоскости, содержащая точку $w=0$. Пусть $c(t)$ — линия уровня функции Грина области E с полюсом в $w=0$, непрерывно зависящая от действительного параметра $t>0$, причем так, что при $t\to 0$ она стягивается в точку $w=0$. Известно, что при $t\to 0$ линия $c(t)$ приближается по форме к окружности. Пусть $D(t)$ — двусвязная область, граница которой состоит из границы B области E и линии $c(t)$. Подвергнем $D(t)$ круговой симметризации относительно точки $w=0$ и пусть она при этом превратится в область $D^*(t)$ с границей, состоящей из компонент B^* и $c^*(t)$, соответствующих B и $c(t)$. Пусть, наконец, E^* — односвязная область с границей B^*, содержащая точку $w=0$. Область E^* получается из E посредством круговой симметризации относительно точки $w=0$. Если E^* не получается из E простым вращением вокруг точки $w=0$, то $M(D^*(t))>M(D(t))$. Автор доказывает более точный результат:

Теорема 3. Если E^* не получается из E вращением вокруг точки $w=0$, то существует такая константа $k>0$, что для всех t, достаточно близких к нулю, выполняется неравенство $M(D^*(t))\geqslant M(D(t))+k$.

В статье есть ссылки на 11 работ, из которых 5 принадлежат автору.

В. А. Зморович

2150. Заметка о распределении нулей экстремальных полиномов. Уолш, Эванс (Note on the distribution of zeros of extremal polynomials. Walsh J. L., Evans J. P.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 5, 332—337 (англ.)

Пусть E — ограниченное множество в плоскости z. Как известно, для последовательности $\{p_n(z)\}$ многочленов Чебышева, наименее уклоняющихся от нуля на E, выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}[\max|p_n(z)|,\ z\in E]^{1/n}=\tau(E), \qquad (1)$$

где $\tau(E)$ — трансфинитный диаметр множества E. То же соотношение (1) верно и для некоторых других последовательностей многочленов. Обозначим через K дополнение к E и предположим K связным. Пусть $G(z)$ — функция Грина для K с полюсом $z=\infty$. Функция $w=\varphi(z)=\exp[G(z)+iH(z)+\ln\tau(E)]$ (где $H(z)$ — гармоническая сопряженная с $G(z)$) отображает конформно (но не обязательно взаимно однозначно) K на область $|w|>\tau(E)$, причем $\varphi(\infty)=\infty$.

Доказывается теорема: Пусть E — ограниченное замкнутое множество с положительным трансфинитным диаметром $\tau(E)$, $\{p_n(z)\}$ — последовательность многочленов, для которой имеет место (1). Тогда на $K-(\infty)$ функция $G(z)+\ln\tau(E)=\ln|\varphi(z)|$ есть точная гармоническая мажоранта последовательности $|p_n(z)|^{1/n}$ и каждой ее подпоследовательности. Пусть D — замкнутая ограниченная подобласть, лежащая внутри K, и d_n — число нулей $p_n(z)$ в ней. Тогда $\lim_{n\to\infty}d_n/n=0$.

То же соотношение справедливо для области D, ограниченной аналитической кривой C, содержащей точки K и точки E, причем последние являются устранимыми особенностями $G(z)$. Если $C \subset K$ — замкнутая аналитическая кривая, внутри которой лежит c_n нулей многочлена $p_n(z)$, то

$$\lim_{n\to\infty} c_n/n = \frac{1}{2\pi}\int_C (\partial G/\partial \nu)\, ds = \omega(\infty, B, K),$$

где ν — внешняя нормаль к C, а $\omega(\infty, B, K)$ — гармоническая мера относительно области K и точки $z=\infty$ той части B границы K, которая попадает внутрь C.

С. Я. Хавинсон

2151. Оценка роста функций, определенных рядами Дирихле. Дайсон (The rate of growth of functions defined by Dirichlet series. Dyson F. J.), Ann. Math., 1954, **60**, № 3, 437—446 (англ.)

Пусть C_k — класс функций

$$\varphi(s) = \sum_0^\infty \lambda_n^{-s} \quad (s = \sigma + it,\ \lambda_n > 0) \qquad (1)$$

(ряд сходится при $\sigma > 0$), удовлетворяющих условиям: 1) $\varphi(s) - (s-1)^{-1}$ — целая функция, 2) $\varphi(-2n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, 3) $|\varphi(s)| < A\Gamma(r)(2\pi k)^{-r}$, $|s| = r \geqslant 2$, $k > 0$. Известно (Beurling A., Arkiv mat., 1950, **1**, 295), что для $1/2 < k < 1$ класс C_k содержит только две функции $\zeta_1(s) = \zeta(s)$ (дзета-функция Римана) и $\zeta_{1/2}(s) = (2^s - 1)\zeta(s)$, где $\zeta_\alpha(s) = \Sigma_0^\infty (n+\alpha)^{-s}$. Эти две функции обладают, таким образом, минимальным ростом среди функций (1), удовлетворяющих условиям 1) и 2). Рассматривается класс E функций (1), удовлетворяющих лишь условиям 1) и 3). Показывается, что в этом классе функции $\zeta_\alpha(s)$ обладают минимальным ростом в том смысле, что для них

$$L(\varphi) = \varliminf_{r\to 1} (1-r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[\frac{(2\pi)^{m+1}\varphi(-m)}{m!}\right]^2 = 2,$$

а для других функций из E $L(\varphi) \geqslant 2$. Оказывается, что если $1/4 \leqslant \alpha \leqslant 3/4$ и $|\varphi(-m)| \leqslant |\zeta_\alpha(-m)|$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, то или $\varphi(s) = \zeta_\alpha(s)$ или $\varphi(s) = \zeta_{1-\alpha}(s)$.

А. Ф. Леонтьев

2152. Точный порядок целых функций. Аспейтия (El orden precisado en las funciones enteras. Azpeitia A. G.), Rev. mat. hisp.-amer., 1954, **15**, № 3, 83—103 (исп.)

Продолжение более ранней статьи автора (РЖМат, 1955, 4378).

Пусть $f(z) = \Sigma_0^\infty c_n z^n$ — целая функция конечного порядка $\rho > 0$. При помощи «точного порядка» $\rho(r)$ $(0 < r < \infty)$ функции $f(z)$ (реф. 4378) обобщаются формулы, определяющие в классической теории тип роста функции через ее коэффициенты c_n. Предполагается, что функция $\rho(r)$ удовлетворяет следующим условиям: а) она дважды кусочно-дифференцируема на $(0, \infty)$; б) $\lim \rho(r) = \rho$; в) $\lim r\rho'(r)\ln r = 0$; г) $\lim r^2\rho''(r)\ln r = 0$ (пределы берутся при $r \to \infty$). Тогда функция $x = r^{\rho(r)}$ имеет обратную $r = \Phi(x)$ (по крайней мере, начиная с достаточно больших значений r и x).

Основная теорема. Для существования конечных положительных пределов при $r \to \infty$

$$\varliminf r^{-\rho(r)} \ln M(r) = A,\ \lim r^{-\rho(r)} \ln M(r) = B$$

(где $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \Phi(n) = (Ae\rho)^{1/\rho},$$

$$\lim_{n\to\infty} |c_{n_i}|^{1/n_i} \Phi(n_i) = (B'e\rho)^{1/\rho},$$

где $A \geqslant B' \geqslant B$ и $\varlimsup_{i\to\infty} n_{i+1}/n_i < \infty$.

Доказательство теоремы, а также некоторых простых следствий из нее основано на рассмотрении функций сравнения

$$\Gamma(z, \alpha) = \sum_n \alpha^{n/\rho}\Phi^{-n}(n)\, z^n,$$

зависящих от $\alpha > 0$, в роли которого выступают $(A \pm \varepsilon)e\rho$, $(B \pm \varepsilon)e\rho$. $\Gamma(z, \alpha)$ есть целая функция порядка ρ, регулярного роста, обобщенного типа $\alpha/\rho e$ (т. е. $\ln\Gamma(r, \alpha)/r^{\rho(r)} \to \alpha/\rho e$ при $r \to \infty$). Кроме того, она «ньютонова», т. е. для нее все точки плоскости (ξ, η) с координатами $\xi = n$, $\eta = -\ln[\alpha^{n/\rho}/\Phi^{-n}(n)]$ принадлежат, начиная с достаточно большого n, ее многоугольнику Ньютона (Valiron G., Lectures on the general theory of integral functions, Toulouse, 1923; Полиа Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, ч. 2, 1938, отдел IV, глава 1, задача 41).

В работе имеется много опечаток. Например, стр. 84, строка 7 сверху, в правой части формулы пропущен множитель $\varphi(x)$, а в формуле строки 8 в знаменателе вместо 1 нужно слагаемое $\varphi(x)$; стр. 95, последняя строка, вместо знака $<$ нужно $>$.

М. К. Фаге

2153. Уточнение теоремы Данжуа — Карлемана — Альфорса для одного класса целых функций. Зейберт (Eine Verschärfung des Satzes von Danjoy — Carleman — Ahlfors für eine Klasse von ganzen Funktionen. Seibert Peter), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 171—172 (нем.)

Рассматриваются целые функции, римановы поверхности которых имеют над конечной w-плоскостью единственную косвенно критическую трансцендентную особую точку над $w = 0$. Для того чтобы порядок целой функции был $\geqslant 1$, достаточно, чтобы

$$\varliminf_{n\to\infty} (\ln \ln h_n^{-1})/\ln n > 1, \qquad (1)$$

где h_n — модули алгебраических точек ветвления, занумерованные в порядке возрастания модулей их прообразов в z-плоскости. Доказательство не приводится.

Примечание референта. Если дополнительно предположить, что нули целой функции вещественны, то из одной теоремы референта (РЖМат, 1955, 3725), вместо условия (1), получается более точное условие

$$\sum_{i=1}^\infty \{\min_{n\geqslant i} (\ln h_n^{-1})\}^{-1} < \infty.$$

А. А. Гольдберг

2154. Об определении целой функции по ее ряду Тейлора. Клуни (On the determination of an integral function from its Taylor series. Clunie J.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 32—42 (англ.)

Пусть $f(z) = \Sigma_0^\infty a_n z^n$ — целая функция, $M(r, f)$, $\mu(r, f)$ и $N = N(r, f)$ — соответственно ее максимум модуля, максимальный член и центральный индекс для $|z| = r$. Тогда, если $k = o(N)$, то за пределами некоторого круга

$$\left|f(z) - \sum_{n=N-k}^{N+k} a_n z^n\right| <$$

$$< K\frac{N\ln^2 N}{k} \exp\left\{-\frac{\lambda(N)k^2}{2N\ln^2 N}\right\}\mu(|z|, f),$$

где K — положительная константа.

Если $N(r, f) > K$ и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} qN^{-1}\ln N \leqslant 1-\varepsilon,$$

то за пределами некоторой совокупности интервалов изменения $|z|$

$$N(r, f) \leqslant N(r, f^{(q)}) \leqslant N(r, f) + 2q\lambda\,[N(r, f)]\,[\ln^2 N(r, f)],$$

где $\lambda(t)$ — действительная положительная функция с $\lim_{t\to\infty}\lambda(t) = 1$.

Доказывается ряд других теорем подобного типа для произвольных целых функций и для целых функций конечного порядка. В основе доказательств лежит исследование ряда $\Sigma_2^\infty \exp(n/\ln n)\, z^n$, играющего роль функции сравнения. А. Ф. Тиман

2155. **Целые функции, представимые лакунарными степенными рядами. Эрдёш, Макинтайр** (Integral functions with gap power series. Erdös P., Macintyre A. J.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, **10**, № 2, 62—70 (англ.)

Пусть

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^{\lambda_n}, \qquad (1)$$

где $\{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, есть целая функция. Положим $M(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|$, $m(r) = \min_{|z|=r}|f(z)|$, $\mu(r) = \max_n |a_n| r^n$. Известно (Polya G., Math. Z., 1929, **29**, 549—640), что если при $n\to\infty$ $\underline{\lim}\ln(\lambda_{n+1}-\lambda_n)/\ln\lambda_n > 1/2$, то при $r\to\infty$

$$\overline{\lim}\, m(r)/M(r) = \overline{\lim}\,\mu(r)/M(r) = 1. \qquad (2)$$

Авторы усиливают теорему Пойа, доказывая, что равенство (2) будет иметь место, если $\Sigma_{n=0}^\infty(\lambda_{n+1}-\lambda_n)^{-1} < \infty$. Этот результат является точным в смысле, что если $\Sigma_{n=0}^\infty(\lambda_{n+1}-\lambda_n)^{-1} = \infty$, то существует целая функция вида (1) такая, что

$$\overline{\lim}\,\mu(r)/M(r) \leqslant 1/2,\ \overline{\lim}\, m(r)/M(r) \leqslant 1/2.$$

Далее доказываются два предложения, обобщающие полученный результат в двух направлениях:

1. Если $\Sigma_{n=0}^\infty(\lambda_{n+h}-\lambda_n)^{-1} < \infty$, где h — натуральное число, то $\overline{\lim}\,\mu(r)/M(r) \geqslant (2h-1)^{-1}$. Если же $\Sigma_{n=0}^\infty(\lambda_{n+h}-\lambda_n)^{-1} = \infty$ для каждого натурального h, то

$$\lim \mu(r)/M(r) = \lim m(r)/M(r) = 0.$$

2. Если при $n\to\infty$ $\Sigma_{k=0}^n(\lambda_{k+1}-\lambda_k)^{-1} = o(\ln\lambda_n)$ и функция $f(z)$ конечного порядка или если $\Sigma_{k=0}^n(\lambda_{k+1}-\lambda_k)^{-1} = O(\ln\lambda_n)$ и функция $f(z)$ нулевого порядка, то имеет место равенство (2). Н. А. Давыдов

2156. **Универсальное произведение Бляшке. Хейнс** (A universal Blaschke product. Heins Maurice), Arch. Math., 1954, **6**, № 1, 41—44 (англ.)

Как известно, существует универсальная целая функция $g(z)$ такая, что для произвольной целой функции $f(z)$ найдется последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что $\{g(z+n_k)\}$ будет равномерно сходиться к $f(z)$ во всякой конечной части плоскости z (см., например, Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.— Л., 1950, 287).

Рассматривается класс аналитических в круге $|z|<1$ функций, ограниченных по модулю 1, и ставится для него вопрос о существовании универсальной функции, входящей в этот же класс. При этом естественно, что вместо евклидовых сдвигов плоскости z, как это было в случае целых функций, для аналитических функций в единичном круге будут фигурировать неевклидовы движения. Доказывается следующая теорема, из которой вытекает положительное решение поставленного вопроса.

Существует сходящееся произведение Бляшке $b(z)$ со следующими свойствами: 1) точка $z=1$ есть единственная предельная точка для нулей $b(z)$; 2) существует монотонно возрастающая последовательность чисел $\{x_n\}_0^\infty$ с $x_0 = 0$, $\lim x_n = 1$ такая, что для каждой ограниченной аналитической в круге $|z|<1$ функции $f(z)$ с модулем не большим 1 найдется подпоследовательность $\{x_{n(k)}\}_0^\infty$, для которой $\left\{b\left(\frac{z + x_{n(k)}}{1 + x_{n(k)}z}\right)\right\}$ будет сходиться равномерно к $f(z)$ в $|z|<1$ при $k\to\infty$. Г. Ц. Тумаркин

2157. **О множествах радиальных предельных значений аналитических функций. Коллингвуд** (On the radial cluster sets of analytic functions. Collingwood Edward Foyle), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 91—92 (англ.)

Пусть $E(f; e^{i\theta})$ — множество всех радиальных предельных значений в точке $e^{i\theta}$, мероморфной в круге $|z|<1$ функции $f(z)$. Точка $a \in E(f; e^{i\theta})$, если $f(r_n e^{i\theta}) \to a$ для какой-нибудь последовательности, $\{r_n\}$, $r_n < r_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$. Дополнение множества E обозначим через CE. Множество N называется метрически плотным в интервале α, если пересечение $N \cap \beta$ положительной меры для каждого интервала $\beta \subset \alpha$. Формулируется без доказательства теорема:

Пусть $f(z)$ — мероморфная в круге $|z|<1$ функция, $M(\theta)$ — множество второй категории на дуге α окружности $|z| = 1$, $N(\theta)$ — множество, метрически плотное в α. Если $\bigcap_{e^{i\theta}\in M(\theta)} CE(f; e^{i\theta})$ есть непустое множество и если число $b \in \bigcap_{e^{i\theta}\in N(\theta)} E(f; e^{i\theta})$, то $f(z) \equiv b$.

Указаны ее следствия. Эта теорема содержит в себе теорему Н. Н. Лузина и И. И. Привалова. Н. А. Давыдов

2158. **О множествах максимальной неопределенности аналитических функций. Коллингвуд** (Sur les ensembles d'indétermination maximum des fonctions analytiques. Collingwood Edward F.), C. R. Acad. sci., 1955, **240**, № 15, 1604—1606 (франц.)

Пусть функция $f(z)$ мероморфна в $|z|<1$. По определению, $a \in C(f)$, если существует последовательность z_n $|z_n|<1$, $|z_n|\to 1$, такая, что $f(z_n)\to a$, $a \in C_E(f)$, если, кроме того, $z_n \in E$, где E — некоторое множество в $|z|<1$. Множества $C(f, e^{i\theta})$ и $C_E(f, e^{i\theta})$ определяются аналогично, лишь требуется дополнительно, чтобы $z_n \to e^{i\theta}$. Множество E называется множеством максимальной неопределенности $f(z)$ в целом (в точке $e^{i\theta}$), если $C_E(f) = C(f)$ ($C_E(f, e^{i\theta}) = C(f, e^{i\theta})$). Доказывается, что в качестве множества максимальной неопределенности $f(z)$ в $e^{i\theta}$ можно выбрать: а) некоторую последовательность $\{z_N\} \to e^{i\theta}$, $|z_N| < |z_{N+1}|$; б) некоторую кривую, оканчивающуюся в $e^{i\theta}$, на которой $|z|$ строго возрастает. В качестве множества максимальной неопределенности в целом можно выбрать: а) некоторую последовательность $\{Z_N\}$, $|z_N| \nearrow 1$; б) некоторую спираль, на которой $|z| \nearrow 1$. Последний результат используется

для построения мероморфной в $|z|<1$ функции $\varphi(z)$, для которой $C(\varphi, 1) = C(f)$. Непонятно утверждение автора, что это дает новый метод построения функции $f(z)$, имеющей в $z=1$ наперед заданное множество $C(f, 1)$, так как известно, что за $C(f, 1)$ можно взять произвольный континуум (Weigand L., Comment. math. helv., 1949, 22, 125—149), с другой стороны, существуют континуумы, не являющиеся $C(f)$ ни для какой $f(z)$ (Потягайло Д. Б., Докл. АН СССР, 1952, 86, № 4, 661—663). А. А. Гольдберг

2159. О радиальном порядке некоторых регулярных в единичном круге функций. Цудзи (On the radial order of a certain regular function in a unit circle. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 3—4, 336—342 (англ.)

Дается сравнительно простое доказательство теоремы Зейделя и Уолша (Seidel W., Walsh J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, 52, 128—216):

Теорема 1. Пусть $w=f(z)$ регулярна и однолистна в $|z|<1$. Тогда существует множество E меры нуль на окружности $|z|=1$ такое, что если $e^{i\theta} \notin E$, то $f'(z) = o(|z-e^{i\theta}|^{-1/2})$ равномерно для фиксированного θ, когда $z \to e^{i\theta}$, оставаясь внутри любого угла с вершиной $e^{i\theta}$, стороны которого наклонены под углом $\varphi_0 < \pi/2$ к радиусу, проведенному в точку $e^{i\theta}$. Далее доказывается:

Теорема 2. Пусть $w=f(z)$ — функция, регулярная в $|z|<1$, причем $\iint_{|z|<1} |f(z)|^p\, dx\, dy < \infty$, $p>0$, $z=x+iy$. Тогда существует такое множество E на $|z|=1$ с $m(E)=0$, что если $z \to e^{i\theta}$ так же, как в теореме 1, то равномерно при фиксированном θ: $f(z) = O(|z-e^{i\theta}|^{-1/p})$, если p — целое положительное число, и $f(z) = O(|z-e^{i\theta}|^{-(1+\delta)/p})$ для любого $\delta>0$, если p — нецелое.

Доказательство теоремы 2 опирается на лемму: Если $f(z)$ удовлетворяет условию теоремы 2 и

$$A(r, \theta) = \iint\limits_{|z-re^{i\theta}|<1-r} |f(z)|^p\, dx\, dy,$$

то существует множество E на $|z|=1$ с $mE=0$ такое, что для любого $\delta>0$: $A(r, \theta) = O((1-r)^{1-\delta})$ при $r \to 1$ и $e^{i\theta} \notin E$. Г. Ц. Тумаркин

2160. Два примера к теории распределения значений. Кюнци (Zwei Beispiele zur Wertverteilungslehre. Künzi Hans), Math. Z., 1955, 62, № 1, 94—98 (нем.)

В работах о распределении значений мероморфных функций, отображающих на конечную z-плоскость риманову поверхность, состоящую из конечнолистного ядра и конечного числа концов определенной периодической структуры (периодические, двоякопериодические концы, четверть-концы), разделенных логарифмическими точками ветвления, при униформизации римановых поверхностей используются квазиконформные отображения, удовлетворяющие условиям теоремы Тейхмюллера — Виттиха (Wittich H., Math. Z., 1948, 51, 278—288). В статье указывается, что теми же методами можно униформизировать также римановы поверхности, у которых периодические концы непосредственно примыкают к двоякопериодическим концам или четверть-концам, без разделяющей логарифмической точки ветвления. Рассмотрены два примера. В первом к двоякопериодическому концу непосредственно примыкают два периодических конца, а эти последние разделены логарифмической точкой ветвления. Во втором примере четыре четверть-конца разделены четырьмя непосредственно примыкающими к ним периодическими концами, логарифмические точки ветвления отсутствуют.

В приведенной библиографии (12 названий) отсутствуют работы Тхиема Лэ-Вана (Thiem Le-Van, Comment. math. helv., 1949, 23, 26—49; Ann. scient. École norm. supér., 1950, 67, 51—98).

Замеченные опечатки: стр. 96, строка 17 сверху, вместо $\ln(3/5)$ должно быть $\ln(3/4)$; стр. 97, строки 10, 9, 8 снизу, вместо $\omega_1=1$, $\omega_2=2$, $\omega_3=3$, $\omega_4=1$, $\omega_1'=1$, $\omega_2'=3$, $\omega_3'=3$, $\omega_4'=3$, $A=1\cdot3\cdot1\cdot3\cdot(2\cdot1\cdot3\cdot3)^{-1}=1/2$ должно быть: $\omega_1=1$, $\omega_2=3$, $\omega_3=1$, $\omega_4=3$, $\omega_1'=3$, $\omega_2'=1$, $\omega_3'=3$, $\omega_4'=3$, $A=1\cdot3\cdot1\cdot3\,(3\cdot1\cdot3\cdot3)^{-1}=1/3$. А. А. Гольдберг

2161. О теории Р. Неванлинны. Андреян Кабириа (Asupra teoriei lui R. Nevanlinna. Andreian Cabiria), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1954, 6, № 2, 271—296 (рум.; резюме русс., франц.)

Обобщаются основные результаты теории Неванлинны, изложенные в главах 6 и 9 монографии «Однозначные аналитические функции». Именно, неванлинновские характеристики мероморфной функции, являющиеся функциями радиуса r семейства концентрических окружностей $|z|=r$, заменяются новыми, рассматриваемыми как функции параметра λ произвольного семейства кривых C_λ, например

$$m(\lambda, a) = m(\lambda, 1/(w-a)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_\lambda} \ln^+ |w(\zeta) - a|^{-1} \left(\frac{dG_\lambda(\zeta, z_0)}{dn}\right) ds,$$

где $G_\lambda(\zeta, z_0)$ — функция Грина области D_λ, ограниченной кривой C_λ, относительно точки z_0, d/dn — производная по внутренней нормали.

Показывается, что при некоторых ограничениях на C_λ в новых терминах сохраняются прежние формулировки теорем. При обобщении первой основной теоремы предполагается, что C_λ — простые аналитические кривые, стягивающиеся в точку z_0 при $\lambda \to \infty$, бесконечно расширяющиеся при $\lambda \to 0$ и не пересекающие друг друга. В качестве параметра λ кривой C_λ выбирается конформный радиус области D_λ относительно точки z_0. При обобщении второй основной теоремы, кроме того, на кривые C_λ налагаются еще следующие дополнительные ограничения.

Пусть Δ_t — максимум расстояния от $w=0$ до образа кривой C_λ на плоскости w при конформном отображении D_λ на круг $|w|<\lambda$, $\lambda>t$. Предполагается, что Δ_t — непрерывно дифференцируемая функция параметра t и выражение $\Delta_t/[t(d\Delta_t/dt)]$ при $t \to \infty$ либо ограничено, либо имеет логарифмический рост: $\Delta_t/(t\Delta_t') < M_1(\ln t)^h$, $t>1$, либо растет как степенная функция: $\Delta_t/(t\Delta_t') < M_1 t^h$, $t>1$, где M и h не зависят от $\lambda>t$. Предполагается еще, что

$$\int\limits_{C_\lambda^{\lambda'}} \ln^+ (dG_\lambda/dn)\, dH_\lambda = o(\ln \lambda),$$

где H_λ — гармоническая функция, сопряженная с G_λ, $C_\lambda^{\lambda'}$ — линия уровня функции Грина G_λ, соответствующая окружности $|w|=\lambda'$. Последнее условие выполняется, например, если C_λ — выпуклые области. Основное затруднение, которое приходится преодолевать, заключается в следующем: в то время как для семейства концентрических окружностей всякая окружность есть линия уровня функции Грина для любого круга семейства, в случае произвольного семейства кривых

C_λ аналогичное свойство уже не имеет места: кривые C_λ, не являются линиями уровня функции Грина для области D_λ.

Тема работы предложена Стоиловым с целью углубления связи между асимптотическими и исключительными значениями. В конце статьи приводится пример функции $w(z)=\int_0^z e^{-t^2}dt$, которая по отношению к семейству концентрических окружностей $|z|=\lambda$ имеет три асимптотических значения $w=\infty$, $\pm\sqrt{\pi}/2$, исключительных с дефектами 1, 1/2, 1/2, а по отношению к семейству окружностей $|z+\lambda|=\lambda+\sqrt{\lambda}$ имеет только два исключительных значения $w=\infty$, $-\sqrt{\pi}/2$ с дефектами 1,1. Автор указывает три работы (Dugué D., C. r., Acad. sci., 1947, 225=555—556; Valiron G., тот же журнал, 556—558; РЖМат, 1955, 702), в которых приводятся другие аналогичные примеры.

В статье довольно значительное количество опечаток. Затрудняют понимание опечатки в формулах на стр. 284, строки 3 и 5 снизу, на стр. 285, строки 2, 6, 7 сверху.

М. Г. Хапланов

2162. Ко второй основной теореме Неванлинна в теории мероморфных функций. Дингхас (Zu Nevanlinna's zweitem Fundamentalsatz in der Theorie der meromorphen Funktionen. Dinghas Alexander), Suomalais. tiedeakat. toimituks, 1953, A1, № 151, 1—8 (нем.)

Используя построенную им теорию поверхностей наложения, Альфорс доказал неравенство

$$\sum_1^q n(r,a_k)-\sum_1^q n_1(r,a_k)\geqslant(q-2)A(r)+S(r), \quad (1)$$

где $\lim\limits_{r\to R} S(r)/A(r)=0$ для всех функций параболического типа ($R=\infty$) и функций гиперболического типа ($R=1$) таких, что при $r\to 1$

$$\lim T^{-1}(r)\ln(1-r)^{-1}=0$$

(Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, гл. XIII).

Автор устанавливает справедливость неравенства (1), не обращаясь к теории поверхностей наложения (Альфорс для параболического случая получает все же более точную оценку: $S(r)=O(A(r)^{1/2+\varepsilon})$ вне исключительных интервалов ограниченной логарифмической меры) При доказательстве существенно используется метод Альфорса (Ahlfors L., Comment. phys.-math. Soc. scient. fennicae, 1935, 8, № 10; Неванлинна Р., цит. выше, п. 209).

Замеченные опечатки: стр. 5, строка 5 снизу, вместо «обращается в нуль» (verschwindet) должно быть «равен 1»; строка 3 снизу, вместо $w(z)$ должно быть $w'(z)$.

А. А Гольдберг

2163. Вполне монотонные почти периодические функции. Стулов (Total monotone fastperiodische Funktionen. Stuloff Nicolas), Proc Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 174—175 (нем.)

Формулируются новые результаты об аналитических почти периодических функциях. Аналитическая для $\mathrm{Re}\,s>0$ ($s=\sigma+it$) и непрерывная для $\mathrm{Re}\,s\geqslant 0$ функция $f(s)$ называется вполне монотонной, если $(-1)^n f^{(n)}(\sigma)\geqslant 0$ для всех $\sigma>0$ и всех $n=0,1,2,\ldots$ С каждой вполне монотонной функцией $f(s)$ сопоставляется функция $a(\Lambda)$, $\Lambda>0$, по формуле

$$a(\Lambda)=\lim_{n\to\infty}(-e/\Lambda)^n f^{(n)}(n/\Lambda).$$

Можно показать, что $a(\Lambda)$ отлична от нуля не более чем для счетного множества значений Λ и что ряд $\sum_{\Lambda>0} a(\Lambda)$ сходится. Определенные таким образом числа $\{\lambda_k\}$ и $\{a_\nu\}$ называются показателями и коэффициентами Дирихле функции $f(s)$. Аналитическая вполне монотонная функция $f(s)$, $\mathrm{Re}\,s>0$ называется почти периодической, если $\sum_{\Lambda>0} a(\Lambda)=f(0)$.

1. Вполне монотонная функция в том и только в том случае может быть представлена в виде суммы ряда Дирихле $\sum_{\Lambda>0} a(\Lambda)e^{-\Lambda s}$, $a(\Lambda)\geqslant 0$, $\Lambda>0$, $\mathrm{Re}\,s>0$, если она почти периодическая.

2. Вполне монотонная функция $f(s)$ в том и только в том случае почти периодическая в смысле автора, если она почти периодическая в смысле Бора в полосе $0<\sigma\leqslant\infty$.

3. Вполне монотонная функция $f(s)$ в том и только в том случае почти периодическая и принадлежащее ей множество $\{\lambda_\nu\}$ не имеет предельных точек на конечном расстоянии, если для каждого числа $0<\Lambda<\infty$ можно указать таких два числа $0<x_1<\Lambda$, $\infty>x_2>\Lambda$, что

$$\varlimsup(-\Lambda^{-1}e^{-\Lambda/x})^n f^{(n)}(n/x)\leqslant C$$

для $x=x_1$ и $x=x_2$.

Б. М. Левитан

2164. О существовании функции Грина уравнения $\Delta u=c(P)u$ на римановых поверхностях. Мирберг (Über die Existenz der Greenschen Funktion der Gleichung $\Delta u=c(P)u$ auf Riemannschen Flächen. Myrberg Lauri), Suomalais. tiedeakat. toimituks. (Ann. Acad. scient. fennicae), 1954, A1, № 170, 1—8 (нем.)

Развивая прежнюю работу (РЖМат, 1956, 1289), автор доказывает следующую теорему: Пусть F — произвольная открытая риманова поверхность. Тогда для каждой функции $c(P)\geqslant 0$ ($\not\equiv 0$), что и в реф. 1289, существует однозначно определенная функция Грина $G(P,Q)$ уравнения

$$\Delta u=c(P)u \quad (1)$$

с произвольным полюсом Q. Она является наименьшей среди всех функций и со следующими свойствами: u непрерывна со своими первыми и вторыми производными на $F-Q$; $u\geqslant 0$, $\Delta u=c(P)u$; $u+\ln\overline{PQ}$ ограничена в окрестности точки Q. Затем $G(P,Q)$ ограничена вне полюса. Функция $G(P,Q)$ получается из монотонно возрастающей последовательности функций Грина $G_n(P,Q)$ исчерпания $F_n\nearrow F$ с использованием леммы об устранимости гармонических нуль-множеств для ограниченных решений u уравнения (1). Доказывается также, что если точки Q_n сходятся к границе F, то из последовательности $G(P,Q_n)/G(P_0,Q_n)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к решению u уравнения (1) на всей поверхности F. Доказывается существование функции Грина и для замкнутой поверхности приведением ее к открытой поверхности путем удаления одной точки и использования указанной выше леммы. Из работы, в частности, следует, что класс открытых поверхностей, для которых по Одзава (Ozawa M., Kodai Math. Sem. Repts, 1952, № 3, 63—76) не существует функции Грина уравнения (1), — пуст.

Л. И. Волковыский

2165. О последовательностях алгебраических функций и существовании аналитических функций, имеющих произвольную область существования. Радойчич (Sur les suites des fonctions algébriques et l'existence des fonctions analytiques, ayant un domaine d'existence quelconque. Radojčič Miloš), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 158—159 (франц.)

Из ранее полученного автором распространения интегральной формулы Коши на случай любой замкнутой римановой поверхности (C. r. Acad. sci., 1927) делаются выводы, почти совпадающие с результатами Бенке и Штейна (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1948, 120, 430—461): Пусть S — любая риманова поверхность над плоскостью z, E — произвольно взятая область на S. Существуют однозначные аналитические функции на S, имеющие E областью существования.

Е. Н. Аравийская

2166. Характеристика аналитической выпуклости метрикой Келера. Грауэрт (Charakterisierung der Holomorphkonvexität durch Kählersche Metrik. Grauert Hans Wilhelm Josef), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 113—114 (нем.)

Кратко сообщается о возможности характеристики аналитической выпуклости области D пространства C^n n комплексных переменных, наряду с результатами, полученными Ока и Лелоном, также некоторыми свойствами келеровой метрики. Для некоторых специальных видов областей таким свойством является полнота келеровой метрики (РЖМат, 1955, 5000). А. В. Лебедев

2167. Об эквивалентности псевдовыпуклых областей и областей регулярности в n-мерном комплексном пространстве. Бремерман (Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen. Bremermann Hans J.), Math. Ann., 1954, 128, № 1, 63—91 (нем.)

В 1911 г. Леви доказал, что каждая область регулярности с достаточной гладкой границей есть псевдовыпуклая область, и поставил проблему: верно ли, что каждая псевдовыпуклая область является областью регулярности. Блюменталь в 1912 г. дал отрицательный ответ. В 1926 г. Бенке заметил, что аргументация Блюменталя неубедительна. Проблема оставалась открытой до 1942 г., когда она была решена в положительном смысле Ока для $n = 2$ (Oka K., Tohoku Math. J., 1942, 49).

Имеется много способов определения псевдовыпуклости. Автор берет в качестве основного определения псевдовыпуклость в смысле Картана, т. е. область D называется псевдовыпуклой, если для каждой граничной точки D существует гипершар с центром в этой точке, пересечение которого с D есть область регулярности.

Доказывается, что для любого числа переменных всякая псевдовыпуклая в смысле Картана однолистная область есть область регулярности. Решающую роль в доказательстве играет следующая лемма. Пусть D — ограниченная область в пространстве n комплексных переменных; a_1 и a_2 — действительные числа, $a_1 < a_2$; E_1 — множество всех $z = (z_1, \ldots, z_n)$ с $\mathrm{Re}\, z_1 > a_1$, E_2 — множество всех z с $\mathrm{Re}\, z_1 < a_2$ и пусть $D_1 = D \cap E_1$, $D_2 = D \cap E_2$. Если D_1 и D_2 — области регулярности, то D также является областью регулярности. Автор называет эту лемму леммой о сшивке.

И. И. Пятецкий-Шапиро

2168. Порождение модификаций комплексных многообразий посредством σ-процесса. Штолль (Die Erzeugung von Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten durch σ-Prozesse. Stoll Wilhelm), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 173—174 (нем.)

Кратко сообщается основной результат работ автора о мероморфных модификациях (в частности, РЖМат, 1956, 1296). Дается ответ на поставленный Хопфом вопрос: какие модификации 4-мерных многообразий можно произвести с помощью σ-процесса Хопфа.

А. В. Лебедев

2169. Две основные теоремы теории распределения значений для функций многих комплексных переменных (II). Штолль (Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (II). Stoll Wilhelm), Acta math., 1954, № 92, 55—169 (нем.)

Часть I см. РЖМат., 1954, 5553.

Доказывается вторая основная теорема теории распределения значений для мероморфных поверхностей. Для доказательства развивается теория, имеющая большую аналогию с соответствующей теорией для мероморфных кривых Вейля — Альфорса. Однако здесь имеется принципиально новое: во-первых, мероопределение $\partial\chi_{2n-2}$, придающее многообразию $\mathfrak{M}^{2n}$ характер «обобщенного келерова многообразия», и, во-вторых, аналитический дифференциал ∂B_{n-1}, необходимый только для доказательства второй основной теоремы. Этот дифференциал может быть выбран произвольно; в случае одного переменного ему соответствует постоянная 1. Развиваемая теория зависит от его выбора, а утверждение второй основной теоремы не зависит от dB_{n-1}. Это отличает основную теорему от всех других теорем теории мероморфных поверхностей и вводит в эту теорию новую характеристику, неизвестную для одного переменного.

В конце работы приводится таблица перехода основных понятий и функций к случаю, когда вместо многообразия $\mathfrak{M}^{2n}$ рассматривается пространство R^{2n} с евклидовым мероопределением. А. В. Лебедев

2170. Аналитические функции в неполупростых линейных алгебрах второй категории. Опыт построения в системах IV порядка. Волобельская С. Н., Тр. Харьковск. инж.-экон. ин-та, 1954, 5, 153—173

К числу алгебр, указанных в заглавии, принадлежат системы XIII и III в, по классификации Штуди (автор обозначает их соответственно через I и II), причем система I некоммутативная, а система II коммутативная. Они характеризуются соответственно таблицами умножения:

$$\begin{cases} e_0 e_i = e_i e_0 = e_i \ (i = 1, 2, 3), \\ e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3, \\ e_1^2 = -e_0, \ e_1 e_3 = -e_3 e_1 = -e_2, \ e_i e_k = 0 \ (i, k \geqslant 2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_0 e_i = e_i e_0 = e_i \ (i = 1, 2, 3), \\ e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_3, \\ e_1^2 = -e_0, \ e_1 e_3 = e_3 e_1 = e_2, \ e_i e_k = 0 \quad (i, k \geqslant 2). \end{cases}$$

Рассматриваются полиномы, дифференцируемость, интегрируемость, ряды, элементарные трансцендентные функции (аналоги формул Эйлера и Муавра), уравнения Лапласа. Возможность интегральной формулы Коши в системе II была установлена референтом (Изв. АН СССР, сер. физ.-матем., 1932, 1405—1422); для системы II автор указывает относящуюся к тому же типу формулу обобщенного интегрирования:

$$e_1 f(a) + f(a)\, e_1 = \frac{e_0}{2\pi e_1} \int \frac{e_1 f(x) + f(x)\, e_1}{e_1 (x - a) + (x - a)\, e_1} \, (e_1 dx + dx e_1).$$

В. Л. Гончаров

2171. Теория функций гиперкомплексной переменной в трехмерном пространстве. Рошкулец (O teorîe a funcţiilor de a variabilă hypercomplexă in spaţiul cu trei dimensiuni. Roşculeţ Marcel N.), Studii şi cercetări mat., 1954, 5, № 3—4, 361—401 (рум.,; резюме русс., франц.)

Эта работа тесно связана с исследованиями П. Аппеля некоторых целых трансцендентных функций, обыч-

но называемых «косинусами Аппелля», и исследованиями Эмбера (P. Humbert) этих функций в связи с решениями уравнения

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0, \qquad (1)$$

которое последний приводит к виду $\partial^3 U/\partial u\,\partial v\,\partial w=0$, где $u=x+y+z$, $v=x+jy+j^2z$, $w=x+j^2y+jz$, j — комплексный корень уравнения $j^3=1$.

Автор вводит гиперкомплексное переменное ω, значения которого принадлежат коммутативному кольцу чисел вида $\omega=x+\theta y+\theta^2 z$, где x, y, z — действительные, θ — гиперкомплексная единица, подчиненная условию $\theta^3=1$. Иначе,

$$\omega=e_1(x_1+iy_i)+e_2z_1,$$

где $e_1=(2-\theta-\theta^2)/3$, $e_2=(1+\theta+\theta^2)/3$, i — обыкновенная единица, x_1, y_1, z_1 — действительные числа.

Автор называет модулем числа ω действительное число

$$\rho\equiv\|\omega\|=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^{1/3}=[z_1(x_1^2+y_1^2)]^{1/3}$$

и находит для всякого числа ω, в случае $\rho\neq 0$ такие действительные числа φ и ψ, называемые аргументами числа ω, что

$$\omega=\rho e^{\theta\varphi+\theta^2\psi}$$

(показательная функция e^{ω} определяется с помощью степенного ряда), т. е.

$$x=\rho(\mathrm{ap}\,\varphi\,\mathrm{ap}\,\psi+\mathrm{cp}\,\varphi\,\mathrm{cp}\,\psi+\mathrm{sp}\,\varphi\,\mathrm{sp}\,\psi),$$

$$y=\rho(\mathrm{cp}\,\varphi\,\mathrm{sp}\,\psi+\mathrm{ap}\,\varphi\,\mathrm{cp}\,\psi+\mathrm{sp}\,\varphi\,\mathrm{ap}\,\psi),$$

$$z=\rho(\mathrm{sp}\,\varphi\,\mathrm{cp}\,\psi+\mathrm{cp}\,\varphi\,\mathrm{sp}\,\psi+\mathrm{ap}\,\varphi\,\mathrm{sp}\,\psi),$$

где $\mathrm{ap}\,\varphi$, $\mathrm{cp}\,\varphi$, $\mathrm{sp}\,\varphi$, . . . — «функции Аппеля». (Поверхность $\rho=\mathrm{const}$ есть «сфера Аппеля»).

Гиперкомплексная функция

$$f(\omega)\equiv P+\theta Q+\theta^2 R=e_1(P_1+iQ_1)+e_2R_1, \qquad (2)$$

где P, Q и R (P_1, Q_1 и R_1) — действительные функции от x, y и z (x_1, y_1 и z_1), называется H-голоморфной в некоторой трехмерной области D евклидова пространства x, y, z, если в этой области $f(\omega)$ — однозначная, непрерывная и имеет непрерывную производную $f'(\omega)$ (последняя определяется как такая гиперкомплексная функция вида (2), для которой имеем $df(\omega)=f'(\omega)\,d\omega$).

Доказывается, что это определение H-голоморфной функции $f(\omega)$ в области D равносильно тому, что P_1+iQ_1 — многозначная функция обычного комплексного переменного x_1+iy_1, а R_1 — функция одного переменного z_1 для значений x_1, y_1, z_1, соответствующих точкам области D (H-голоморфные функции соответствуют некоторым из векторных функций, определенных референтом (РЖМат, 1955, 3177). *Реф.*).

При этом имеем в D «условия моногенности»:

$$P'_x=Q'_y=R'_z, \qquad P'_y=Q'_z=R'_x, \quad P'_z=Q'_x=R'_y,$$

откуда следует, что в этой области P, Q и R удовлетворяют: 1) уравнению $u''_{xx}-u''_{yz}=0$ и уравнениям, полученным из него круговой перестановкой букв x, y и z, а также 2) уравнению (1).

Для H-голоморфной функции $f(\omega)$ доказываются аналоги интегральной теоремы и формулы Коши для контурных интегралов и разложение $(1-\theta)f(\omega)$ в ряд Тейлора или Лорана, и изучаются преобразования кривых $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ с помощью уравнений $X=P(x, y, z)$, $Y=Q(x, y, z)$, $Z=R(x, y, z)$, для которых определитель Якоби $\partial(P, Q, R)/\partial(x, y, z)$, равный $\|f'(\omega)\|^3$, предполагается отличным от нуля.

В статье имеются опечатки: так, на стр. 390, 14 строка снизу, напечатано $D(C, Q, R)$ вместо $D(P, Q, R)$.

В. С. Федоров

2172. О множестве нулевой емкости и бесконечных значениях потенциала. Ниномия (Sur un ensemble de capacité nulle et l'infini d'un potentiel. Ninomiya Nobuyuki), Math. J. Okayama Univ., 1953, **2**, № 99—101 (франц.)

Теорема Эванса (Evans G. C., Monatsh. Math. und Phys., 1936, **43**, 419—424) обобщена следующим образом:

Если A — пространственное множество типа G_δ, содержащееся во множестве типа F_σ, имеющем нулевую емкость порядка α $(0<\alpha<3)$, то существует такое распределение положительной массы μ на A, что потенциал порядка α

$$U^{\mu}(M)=\int MQ^{-\alpha}\,d\mu(Q)$$

будет бесконечен во всех точках A и только в них.

Если не требовать, чтобы масса μ лежала только на A, то теорема будет верна для всякого множества G_δ внешней нулевой емкости (Deny J., C. r. Acad. sci., 1947, **224**, 524—525). Н. С. Ландкоф

2173. Задача приведения к каноническому виду дифференциальных форм эллиптического типа и обобщенная система Коши — Римана. Векуа И. Н., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 2, 197—200

Дается обобщение известных результатов о приведении к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными эллиптического типа с линейной главной частью на случай, когда коэффициенты при старших производных удовлетворяют условию H. Аналогичные обобщения даются для случая приведения к каноническому виду эллиптических систем уравнений первого порядка с линейной главной частью с двумя неизвестными функциями и двумя независимыми переменными. Библ. 14 назв.

Г. Н. Положий

2174 К. Теория функций комплексного переменного. Т. I. Основные понятия и принципы. Стоилов (Teoria funcţiilor de o variabilă complexă, Vol. I. Noţiuni şi principii fundamentale. Stoilow S. Bucureşti, Ed. Acad. RPR, 1954, 308 p., 10.65 lei) (рум.)

Содержание курса.

I. Предварительные понятия. Общее представление о множествах. Множества комплексных чисел. Непрерывные и топологические преобразования. II. Функции, аналитические в области. Степенные ряды. Функции голоморфные и мероморфные. Некоторые общие теоремы о функциях, голоморфных и мероморфных в данной области. III. Дифференцируемость и голоморфность. Дифференцируемые функции и конформные отображения. Линейные преобразования. Теория Коши. IV. Аналитические функции, рассматриваемые во всей области их существования. Аналитическое продолжение. Особые точки на круге сходимости. Эффективный метод аналитического продолжения: принцип симметрии. Особенности и точки ветвления аналитических функций. V. Ряды (последовательности) голоморфных функций. Основная теорема о конформном отображении. Равномерно сходящиеся последовательности голоморфных функций. Равномерно ограниченные семейства функций. Конформное отображение односвязной области. VI. Целые и мероморфные функции. Общие положения. Функции $\sin z$, $\mathrm{ctg}\,z$, $\sigma(z)$ и $\zeta(z)$. Функция $\Gamma(s)$ и функция $\zeta(s)$ Римана.

VII. Мероморфные периодические функции. Двояко-периодические функции. Выражение двояко-периодических функций через функции σ, ζ и $\wp$. Функция $\wp(z)$ и ее связи с иными функциями, которые могут быть положены в основу теории двояко-периодических функций. Просто-периодические функции. VIII. Целые функции конечного порядка. Порядок возрастания целых функций. Приложения порядка возрастания к изучению свойств целых функций. IX. Однозначные функции. Особенности, область существования. Функции, ограниченные внутри круга. Принцип Фрагмена — Линделёфа. Граничные свойства конформного отображения. X. Многозначные аналитические функции. Область существования данной аналитической функции и функции, обратной данной. Римановы поверхности аналитических функций. Алгебраические функции. XI. Применение многозначных функций к изучению однозначных. Эллиптический интеграл первого рода и мероморфные двояко-периодические функции. Полигональные функции (конформное отображение многоугольников). Различные теоремы об однозначных функциях, вытекающие из свойства модулярной функции.

В тексте цитирован ряд работ.

2175 Д. Решение одной задачи Дирихле для двусвязных полигональных областей. К о з ы р е к И. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Томский ин-т, Томск. 1955

См. также: 1862, 1894, 2013, 2014, 2088, 2104, 2124, 2126 К, 2189, 2237, 2239, 2246, 2263, 2278, 2287, 2294, 2303, 2305, 2314, 2322, 2490

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2176. Порядок системы обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида. С а л т и к о в (Ред система обичних диференцијалних једначина општег облика. С а л т и к о в Н.), Глас Српске акад. наука, 1953, 206. Од. прир.-матем. наука, **5**, 17—19 (серб.; резюме франц.)

Доказана следующая теорема: Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_{1i})}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_{ni})}) = 0,$$

$i = 1, \ldots, n$, совместна и неприводима, и производная наивысшего порядка функции y_i содержится в i-м уравнении. Обозначим соответственно через $\mu_1, \ldots, \mu_n$ наивысшие порядки производных функций $y_1, \ldots, y_n$, относительно которых заданные уравнения разрешимы. Если по крайней мере одно из чисел μ_i равно соответствующему числу m_{ii}, то порядок рассматриваемой системы равен $\mu_1 + \cdots + \mu_n$. В. Э. Ляпце

2177. Об одном свойстве уравнений движения системы с интегралами, линейными относительно скоростей. Б о л д и н с к и й В. И., Тр. Киргизск. с.-х. ин-та, 1955, № 8, 285—289

Рассматриваются дифференциальные уравнения движения динамической системы в избыточных координатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\zeta} = E_\zeta(L), \ (\zeta = m+1, \ m+2, \ \ldots, \ n), \quad (1)$$

подчиненной m голономным связям

$$f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0, \ (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \quad (2)$$

где $L(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot q_{m+1}, \dot q_{m+2}, \ldots, \dot q_n, t) = T - V$ — кинетический потенциал,

$$E_\zeta(\ ) = \partial(\ )/\partial q_\zeta + \sum_{\mu=1}^{m} b_{\mu\zeta}\,\partial(\ )/\partial \dot q_\mu, \quad (3)$$

а коэффициенты $b_{\mu\zeta}$ берутся из формул

$$\dot q_\mu = \sum_{\zeta=m+1}^{n+1} b_{\mu\zeta}\dot q_\zeta, \ (\mu = 1, 2, \ldots, m; \ q_{n+1} = t = 1), \quad (4)$$

полученных дифференцированием уравнений связей (2) по t и разрешением относительно зависимых скоростей. Координату q_k, для которой оператор $E_k(L)$ равен нулю, автор называет циклической. По аналогии с теоремой, имеющей место для канонических уравнений в независимых переменных (Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, 1937, § 150, стр. 351—362), доказано предложение: Дифференциальные уравнения движения системы в избыточных координатах в том случае, когда координата q_k циклическая, допускают интеграл, линейный относительно скоростей. Если система (1) вообще допускает интеграл, линейный относительно скоростей, то преобразованием переменных эту систему можно привести к системе, содержащей циклическую координату. А. К. Никитин

2178. О новом типе дифференциального уравнения и новом методе интегрирования линейного, квадратичного и кубического дифференциальных уравнений. Ф р а г н е р (Über einen neuen Typ von Differentialgleichung und eine neue Methode zur Integration der linearen, quadratischen und kubischen Differentialgleichung. F r a g n e r W o l f r a m), J. reine und angew. Math., 1955, **194**, № 1—4, 180—182 (нем.)

Дается метод решения в квадратурах дифференциального уравнения

$$y' = f(x) + g(x)\,e^{-cy}, \quad (1)$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемы и число $c \neq 0$. Показано, что к уравнению (1), с помощи некоторых подстановок, сводятся линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка, уравнение Бернулли и уравнение Риккати (последнее, при известном частном решении). Приводятся также некоторые преобразования кубического дифференциального уравнения

$$y' = a(x)\,y + b(x)\,y^2 + c(x)\,y^3 \quad (2)$$

и показывается, что при выполнении условия: $a(x) \equiv b'(x)/b(x) - c'(x)/c(x)$ уравнение (2) интегрируется в квадратурах. Б. П. Демидович

2179. О решениях в замкнутом виде линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Л а т ы ш е в а К. Я., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 3, 405—408

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x)\,\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} = 0, \quad (1)$$

где $P_i(x) = \sum_{j=\pi_i}^{\sigma_i} p_{ij} x^j$, π_i, σ_i — целые числа. Число $p = 1 + k$, $k = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\sigma_i - \sigma_0}{i}$ — ранг, а число $m = 1 - \varkappa$, $\varkappa = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\pi_i - \pi_0}{i}$ — энтиранг уравнения. Показана возможность существования решений уравнения (1) в замкнутом виде: $y = e^{Q(x)} S(x)$, где для p и m целых $S(x)$ — рациональная функция, а функция $Q(x)$ может иметь вид:

$$Q(x) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{p} \frac{\tau_{p-s} x^s}{s}, & \text{если } p > 0,\ m \leqslant 0 \\ \sum_{s=1}^{m} \frac{\lambda_{m-s}}{s x^s}, & \text{если } p \leqslant 0,\ m > 0 \\ \sum_{s=1}^{p} \frac{\tau_{p-s} x^s}{s} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\lambda_{m-s}}{s x^s}, & \text{если } p > 0,\ m > 0 \\ 0, & \text{если } p \leqslant 0,\ m \leqslant 0. \end{cases}$$

Л. И. Донская

2180. Численный метод анализа линейных систем. Рагаццини, Берген (A mathematical technique for the analysis of linear systems. Ragazzini J. R., Bergen A. R.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, 2, 44—51 (англ.)

В связи с задачами теории автоматического регулирования описывается один из возможных приемов приближенного построения решения линейного дифференциального уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами и с заданной правой частью. Прием состоит в замене рассматриваемого уравнения уравнением в конечных разностях. Используя преобразование Лапласа ступенчатых функций, авторы вычисляют «дискретное преобразование» в форме

$$C^*(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + \cdots + C_n z^{-n}$$

и показывают, что коэффициенты C_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) равны приближенным значениям искомого решения в дискретные моменты времени. Описанному приему дается простая техническая интерпретация, связанная с заменой исследуемой непрерывной системы автоматического регулирования импульсной системой, содержащей генератор трехугольных импульсов. Приводится пример расчета уравнения второго порядка и высказываются некоторые соображения о точности предлагаемого метода.

М. А. Айзерман

2181. Об экспоненциальном решении дифференциальных уравнений для линейного оператора. Магнус (On the exponential solution of differential equations for a linear operator. Magnus Wilhelm), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 4, 649—673 (англ.)

В кольце R формальных степенных рядов

$$A = c_0 + \sum c_{\nu_1, \ldots, \nu_m;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m} x_{\nu_1}^{\alpha_1} \ldots x_{\nu_m}^{\alpha_m},$$

$$\nu_1, \ldots, \nu_m = 1, 2, \ldots, n$$

с коэффициентами из поля f_0 характеристики 0 и n свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, x_m$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$dY/dt = A(t) Y, \qquad (1)$$

где $A(t)$ — заданная, а $Y = Y(t)$ — искомая функция со значениями из R. Доказывается, что при соблюдении некоторых условий сходимости решение $Y(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$Y(0) = 1, \qquad (2)$$

можно записать в виде

$$Y(t) = \exp \Omega(t), \qquad (3)$$

где

$$\Omega = \int_0^t A(\tau)\, d\tau + \tfrac{1}{2} \int_0^t \left[A(\tau), \int_0^\tau A(\sigma)\, d\sigma \right] d\tau + \tfrac{1}{4} \int_0^t \left[A(\tau), \int_0^\tau \left[A(\sigma), \int_0^\sigma A(\rho)\, d\rho \right] d\sigma \right] d\tau + \cdots \qquad (4)$$

и где обозначено $[x, y] = xy - yx$. Формула (4) является континуальным аналогом известной формулы Бекера — Хаусдорфа, вывод которой в данной статье также приводится.

Далее рассматривается тот частный случай, когда $A(t)$ и $Y(t)$ в уравнении (1) являются квадратными матрицами фиксированного конечного порядка n, причем $A(t)$ есть непрерывная матричная функция от t в интервале $[0, \infty)$. Как известно, при фиксированном t_0 представление $Y(t_0) = \exp \Omega_0$ всегда возможно, если только $\det Y(t_0) \neq 0$. Доказывается, что в некоторой окрестности точки Ω_0 $2n^2$-мерного вещественного пространства тогда и только тогда существует представление $Y(t) = \exp \Omega(t)$ решения уравнения (1) с дифференцируемой функцией $\Omega(t)$, когда ни одна из разностей собственных значений матрицы Ω_0 не равна $2m\pi i$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Кроме того, выясняются условия, при которых все члены ряда (4) для решения матричного уравнения (1), начиная с некоторого, равны нулю.

В заключение рассматривается уравнение $y'' + Q(t) y = 0$, где $Q(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$. Доказывается, что если y_1, y_2 — линейно-независимые решения этого уравнения, то для матрицы $Y(t) = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{Vmatrix}$ представление $Y(t) = \exp \Omega(t)$, $\Omega(0) = 0$ с дважды непрерывно дифференцируемой при $t \geqslant 0$ функцией $\Omega(t)$ возможно тогда и только тогда, когда $(\operatorname{след} Y)^2 \leqslant 4$ для всех $t \geqslant 0$. Приводится пример уравнения, для которого это условие не выполняется.

М. А. Наймарк

2182. Заметка об особенностях дифференциальных уравнений. Сугияма (Note on singularities of differential equations. Sugiyama Shohei), Kōdai Math. Sem. Repts, 1954, № 3, 81—84 (англ.)

Исследуется дифференциальное уравнение вида

$$dz/dt = f(z, \bar{z}),$$

где z — комплексная, t — вещественная переменная, $\bar{z}$ — сопряженная с z величина, $f(z, w)$ — аналитическая функция обоих аргументов либо допускает непрерывные первые производные по каждому из них. Рассматривается поле интегральных кривых на плоскости z в окрестности начала координат в предположении, что $f(0, 0) = 0$. После нескольких общих замечаний относительно индекса начала координат и сепаратрис поля для случая, когда уравнение имеет вид

$$dz/dt = f_n(z, \bar{z}) + f_{n+1}(z, \bar{z})$$

(f_n — однородный полином степени n, f_{n+1} — порядка малости относительно $|z|$ не меньше $n+1$), автор останавливается на случаях $n = 1$, затем $f(z, \bar{z}) = z^2$, z^3, z^n, $\bar{z}^n$. Получаемые им выводы относительно харак-

тера критической точки и сепаратрис в достаточной мере очевидны. И. Б. Погребысский

2183. Сходящиеся решения обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярной особой точки. Терретин (Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. Turritin H. L.), Acta math., 1955, **93**, № 1—2, 27—66 (англ.)

Система уравнений $\tau^g\, dx/d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \tau^k X$ (τ—комплексное переменное), где $g \geqslant 0$ — целое число, A_k — постоянная матрица порядка n, неособенным преобразованием $Y = \sum_{k=0}^{w} P_k \tau^k X$, $t = \tau^{1/p}$ ($p > 0$, $\omega > 0$ — некоторые целые числа) приводится к каноническому виду:

$$t^h \frac{dY}{dt} = \left\| \delta_{ij} \left(\rho_i(t)\, I_i + J_i t^{h-1}\right) + \sum_{\nu=h}^{\infty} B_{ij\nu} t^{\nu} \right\| Y$$

($\| a_{ij} \|$ — матрица с членами a_{ij}), $i, j = 1, \ldots, m$. Здесь $B_{ij\nu}$ — постоянные, $h \geqslant 0$ — целое число, $\rho_i(t) = \sum_{k=0}^{h-1} \rho_{ik} t^k$, $\rho_i(t) \not\equiv \rho_j(t)$ ($i \neq j$) и $\rho_{ih-1} - \rho_{jh-1}$ не равно ни 0, ни целому числу, если $\rho_{ik} = \rho_{jk}$ ($k = 0, \ldots, h-2$), I_i, J_i — матрицы порядка n_i ($\sum_{i=1}^{m} n_i = n$), причем I_i — единичная матрица, а J_i — матрица из нулей, за исключением возможных единиц на прямой под главной диагональю. Из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} A_k \tau^k$ при $|\tau| < \tau_0$ следует сходимость рядов $\sum_{\nu=h}^{\infty} B_{ij\nu} t^{\nu}$ при $|t| < t_0(\tau_0)$. Решение системы (1) представляет собой столбец, соответствующий некоторому столбцу матрицы

$$Y(t) = \| t^{\alpha_{ij}} (\Gamma_{ij} + U_{ij}) \| \cdot \left\| \delta_{ij} \exp \times \left[-\sum_{\mu=1}^{h-1} \frac{\rho_{ih-\mu-1}}{\mu t^{\mu}} I_i + (I_i + J_i) \log t \right] \right\|,$$

где $\alpha_{ij} \geqslant 0$ — целые числа, $U_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{h-1} t^k (U_{ijk} + T_{ijk}(t))$, причем U_{ijk} и Γ_{ij} — постоянные, а $T_{ijk}(t)$, при выполнении одного из условий: 1) $h = 2$; 2) $h > 2$, но $\rho_{j_0} \neq \rho_{i_0}$ при $i \neq j$, являются аналитическими функциями, представляющимися в виде факториальных рядов, сходящихся в некоторых ветлеобразных областях. С другой стороны, $U_{ij}(t)$ допускают при малых значениях $|t|$ в некоторых секторах асимптотические представления вида $\sum_{k=1}^{\infty} U_{ijk} t^k$, $U_{ijk} = \text{const}$.

Г. Л. Мизернюк

2184. К теории второго метода А. М. Ляпунова. Зубов В. И., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 5, 857—859

Рассматривается динамическая система $f(p, t)$ в полном метрическом пространстве R. Замкнутое инвариантное множество F называется устойчивым по Ляпунову, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $\rho(f(p, t), F) < \varepsilon$ при $\rho(p, F) < \delta(\varepsilon)$, $t > 0$. Если для устойчивого по Ляпунову F, $\rho(f(p. t), F) \to 0$ при $t \to \infty$ и при всех достаточно малых $\rho(p, F)$, то F называется асимптотически устойчивым. Если для каждого $\eta > 0$ существует такое $T(\eta)$, что $\rho(f(p, t), F) < \eta$ при $t > T(\eta)$ для всех p, для которых $\rho(p, F) < \delta_1 < \delta(\varepsilon)$, и если для любых $r_1, \tau > 0$ и $r_1 < \delta_1$, существует такое $r_2 > 0$, что при $r_1 < \rho(p, F) < \delta_1$ и $t \in [0, \tau]$ выполняется неравенство $\rho(f(p, t), F) > r_2$, то F называется равномерно асимптотически устойчивым. Отмечается, что если F обладает компактной окрестностью и асимптотически устойчиво, то оно равномерно асимптотически устойчиво. Вводится определение: функция $V(p)$ имеет производную по t в точке p, если существует $\lim_{t \to 0} (V(f(p, t)) - V(p))/t$. Пользуясь подобным обобщением функции Ляпунова, автор устанавливает ряд необходимых и достаточных условий равномерной асимптотической устойчивости. Например, доказывается теорема 2: Если множество F равномерно асимптотически устойчиво, то при $p \in A$ (область асимптотической устойчивости множества F) существует функция $V(p)$, непрерывная вместе с dV/dt и обладающая свойствами: а) для каждого $\varkappa > 0$ существует такое $\gamma > 0$, что если $\varkappa < \rho(p, F)$ и $V(p) \to 0$ равномерно при $\rho(p, F) \to 0$, то $-1 - V(p) < -\gamma$; б) $dV/dt = \varphi(\rho(p, F))(1 + V)$, где $\varphi(\rho(p, F)) \to 0$ при $\rho(p, F) \to 0$, причем для каждого $\alpha > 0$ существует такое $\beta > 0$, что $\varphi(\rho(p, F)) > \beta$ при $\rho(p, F) > \alpha$. Далее устанавливается, что если для динамической системы $f(p, t)$ существуют функции $V(p)$ и $\varphi(p)$, удовлетворяющие условиям теоремы 2, то F будет равномерно асимптотически устойчивым. Д. М. Гробман

2185. Замечания к теореме Важевского об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений. Альбрехт (Remarques sur un théorème dé T. Ważewski relatif à l' allure asymptotique des intégrales des équations différentielles. Albrecht F.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, **2**, № 7, 317—318 (франц.)

Замечания к теореме Важевского об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений. Альбрехт Ф., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 7, 319—322

Доказывается следующая несколько измененная теорема Важевского (Ważewski T., Ann. Soc. polon. math., 1947, **20**, 279) об асимптотическом поведении решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть в открытом множестве $H \in E^2$ задана динамическая система

$$dx/dt = X(x, y),\ dy/dt = Y(x, y), \qquad (1)$$

G — область, ограниченная простыми замкнутыми кривыми Γ_1, Γ_2, и замыкание $\bar{G} \subset H$. Если множество точек выхода из G совпадает с множеством S точек строгого выхода из G и $\Gamma_1 \neq \bar{S} \neq \Gamma_2$, то система (1) имеет по крайней мере одно периодическое решение, которое может вырождаться в точку, принадлежащую $\bar{G}$.

K. Maurin

2186. Письмо в редакцию. Зубов В. И., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 3, 348

Вносится поправка к статье «К теории второго метода А. М. Ляпунова», опубликованной в докл. АН СССР, 1954, **99**, № 3. Д. М. Гробман.

2187. Оценка области асимптотической устойчивости нелинейных систем. Немыцкий В. В., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 5, 803—804

Рассматривается система

$$dx_i/dt = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_k + f_i(t, x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n, \quad (1)$$

где $a_{ik} = \text{const}$, $i, k = 1, \ldots, n$, и 1) $\operatorname{Re} \lambda_i \leqslant -b^2 \neq 0$, здесь λ_i — корни характеристического уравнения $\det |A - \lambda E| = 0$; 2) $|f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant C_R |x|$ в шаре $|x| \leqslant R$; 3) через каждую точку шара $|x| \leqslant R$ проходит хотя бы одно решение (1), определенное для всех тех значений t, для которых оно находится в шаре $|x| \leqslant R$. Пусть m — число функций f_i, отличных от нуля в шаре $|x| \leqslant R$, а $\|A\| = (\Sigma_{i,\, n=1}^{n} a_{ik}^2)^{1/2}$.

Теорема. Если для всех x, для которых $|x| \leqslant R$, постоянная $C_R < b^2 \varepsilon_{\max}^{n-1} / n^2 \sqrt{m}$, где $\varepsilon_{\max} = (n-1) \times b^2 / n \sqrt{n-1}\, \|A\|$, то все интегральные кривые (1),

выходящие из точек шара $|x| \leqslant \rho_x = \varepsilon_{\max}^{n-1} R$, будут O^+-кривыми, находящимися при $t \geqslant 0$ в шаре $|x| < R$. Для систем более частного вида автор приводит улучшенные оценки для постоянной C_R. А. Ф. Зубова

2188. **Об условиях обращения теорем А. М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений. Красовский Н. Н.**, Докл. АН СССР, 1955, 101, № 1, 17—20

Для системы

$$dx_i / dt = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

правые части которой непрерывно дифференцируемы в достаточно малой окрестности начала координат $X_i(0, \ldots, 0) = 0$, доказываются, например, следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы в окрестности точки $O(0, \ldots, 0)$ существовала функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^1$, производная которой

$$dv / dt = \sum_{i=1}^{n} X_i \partial v / \partial x_i \qquad (2)$$

в силу (1) является знакоопределенной функцией, необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность U точки O, не содержащая целиком траекторий системы (1), отличных от O.

Теорема 2. Пусть решение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ неустойчиво. Тогда для существования $v \in C^1$, принимающей в произвольной близости O положительные значения и такой, что (2) является определенно-положительной функцией в окрестности O, необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность U точки O, не содержащая целиком траекторий системы (1), кроме O.

Теорема 3. Для того чтобы решение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ было неустойчивым, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности O существовала функция $v \in C^1$, принимающая в произвольной близости O положительные значения и такая, что $dv/dt = \lambda v + w$, где функция w положительна или тождественно равна нулю, а λ — положительная постоянная. В. И. Зубов

2189. **Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Крейн М. Г.** В сб.: Памяти Александра Александровича Андронова, Изд. АН СССР, 1955, 413—498

Система, указанная в заголовке, записывается в векторной форме:

$$dx / dt = \lambda J H(t) x \quad (\lambda = 1 / \omega), \qquad (1)$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2m}), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

$$H(t) = (h_{jk}(t))_1^{2m}, \quad H(t) = H(t)^*, \quad H(t) = H(t+T).$$

Точка $\lambda = \lambda_0$ называется точкой сильной устойчивости уравнения (1), если для $\lambda = \lambda_0$ и для всех λ, достаточно близких к λ_0, все решения уравнения (1) ограничены при $-\infty < t < \infty$. Точки сильной устойчивости образуют на числовой оси систему открытых интервалов,— зоны устойчивости уравнения (1). Матрица $U(t)$ фундаментальной системы решений уравнения (1) ($U(0) = E$) будет J-унитарной ($U^* JU = J$), если $H(t)$ комплексна, и J-ортогональной ($U^t JU = J$), если $H(t)$ вещественна. Изучаются свойства J-унитарных и J-ортогональных матриц U, дается полное изложение теории мультипликаторов первого и второго рода (определения, введенные автором, см. реф. 2190); изучаются самосопряженные краевые задачи на конечном интервале для уравнения (1); оцениваются длины и местоположение зон устойчивости, дается ряд оценок центральной зоны устойчивости (т. е. зоны, включающей точку $\lambda = 0$). Ряд результатов Ляпунова, относящихся к уравнению $y'' + \lambda p(t) y = 0$ (y — скаляр), переносится на систему $y'' + \lambda P(t) y = 0$ (y — вектор, $P(t)$ — матрица, $P(t)^* = P(t)$) и на систему (1). Для случая системы (1) двух уравнений выводятся асимптотические формулы для границ зон устойчивости. Рассматриваются также некоторые другие вопросы. В процессе доказательств используется аппарат теории матриц, частично теории линейных операторов и особенно теории аналитических функций. Отметим следующие предложения:

Теорема 2.2. Если все собственные значения матрицы $J \int_0^T H(t)\, dt$ различны и лежат на мнимой оси, то найдется $l > 0$ такое, что при $-l < \lambda < l$ все решения уравнения (1) будут ограничены. (Теорема весьма просто доказывается и важна для приложений). Заключение теоремы справедливо также, если $\int_0^T H(t)\, dt > 0$ (теорема 6.4). В последующих двух теоремах предполагается выполненным условие

$$H(t) \geqslant 0, \quad \int_0^T H(t)\, dt > 0$$

и S означает любую J-унитарную матрицу.

Теорема 3.3. Пусть $\lambda_j(H)$ — собственные значения краевой задачи

$$dx / dt = \lambda J H(t) x, \quad x(T) = Sx(0). \qquad (2)$$

С увеличением матрицы $H(t)$ абсолютная величина $|\lambda_j(H)|$ уменьшается.

Теорема 3.5. Пусть $U(T, \lambda)$ — матрица фундаментальной системы решений уравнения (1) для значения $t = T$, λ_j — собственные значения краевой задачи (2). Матрица-функция $[U(T, \lambda) - S]^{-1}$ комплексного переменного λ допускает абсолютно сходящееся разложение

$$[U(T, \lambda) - S]^{-1} = \frac{1}{2} S^{-1} -$$

$$- \frac{1}{2} S^{-1} J \left\{ A_0 - \lambda A_1 + \frac{B_0}{\lambda} + \lambda \sum_{\lambda_j \neq 0} \frac{B_j}{\lambda_j (\lambda_j - \lambda)} \right\}$$

где A_0, A_1, B_j — эрмитовы матрицы, причем $A_0 \geqslant 0$, $A_1 \geqslant 0$, $B_j \geqslant 0$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В. А. Якубович

2190. **О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Гельфанд И. М., Лидский В. Б.**, Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 3—40

Система $2k$ линейных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами

$$dX / dt = IH(t) X \qquad (1)$$

(X — матрица решений, $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, E — единичная матрица, $H(t)$ — симметрическая матрица вещественных кусочно-непрерывных периодических функций периода ω) называется сильно устойчивой, если все ее решения ограничены на $(-\infty, +\infty)$ и этим свойством обладают все системы (1) с матрицами $H_1(t)$, достаточно близкими к $H(t)$. $X(t)$ нормируются условием $X(0) = E$. Собственные значения матрицы $X(\omega)$ называются мультипликаторами системы (1). Мультипликаторы, лежащие на единичной окружности, подразделяются на мультипликаторы первого и второго рода. Мультипликатор $\rho = e^{i\varphi}$ называется мультипликатором первого

(второго) рода, если на соответствующем корневом подпространстве L_ρ эрмитова форма $i^{-1}(Ix, x)$ положительно (отрицательно) определенна. (При этом оказывается, что этим мультипликаторам отвечают простые элементарные делители, т. е. L_ρ совпадает с собственным подпространством). Если же на корневом подпространстве L_ρ форма $i^{-1}(Ix, x)$ приводится к диагональному виду с m_1 положительными и m_2 отрицательными квадратами, то считается, что в точке $\rho = e^{i\varphi}$ совпало m_1 мультипликаторов первого и m_2 мультипликаторов второго рода. (На L_ρ форма $i^{-1}(Ix, x)$ не вырождена, поэтому $m_1 + m_2$ равно кратности собственного значения). Для того чтобы система (1) была сильно устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все ее мультипликаторы лежали на единичной окружности и среди них не было бы кратных разного рода. Достаточность (наряду с рядом других предложений) установлена ранее М. Г. Крейном (реф. 2189).

Основной результат работы: Множество матриц, отвечающих сильно устойчивым системам (1), распадается на счетное число открытых связных подмножеств («областей устойчивости»). Каждая область устойчивости характеризуется одним из 2^k возможных типов взаимного расположения мультипликаторов первого и второго рода на единичной окружности и некоторым числом $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, которое может быть определено следующим образом: пусть $h_1, \ldots, h_k$ — произвольный базис в подпространстве, натянутом на собственные векторы, отвечающим мультипликаторам первого рода, $\theta_1, \ldots, \theta_k$ — главные значения аргументов мультипликаторов первого рода, $Z(t)$ — матрица порядка k.

$$Z(t) = \| i^{-1}(IX(t)h_\nu, h_\nu) \|, \quad 1 \leqslant \mu, \quad \nu \leqslant k.$$

Тогда $$n = (2\pi)^{-1}\left(\operatorname{Arg}\operatorname{Det} Z(t)\Big|_0^\omega - \sum_{\mu=1}^{k}\theta_\mu\right).$$

В процессе доказательств изучается группа вещественных симплектических матриц. Важную роль играет введенное авторами понятие аргумента симплектической матрицы.

В. А. Якубович

2191. Определение наибольшего значения решения некоторых линейных дифференциальных уравнений. Старжинский В. М., Науч.-исслед. тр. Всес. заочн. ин-та текстильной и легкой пром-сти, 1955, № 1, 76—85

Рассматриваются линейные однородные дифференциальные уравнения, очевидное решение которых $x = 0$ устойчиво по Ляпунову. Решается задача об оценке наибольших значений модуля решения $x(t)$ при $t > 0$. Вычислены оценки $|x(t)|$ для уравнений с постоянными коэффициентами до шестого порядка включительно. Приводится также оценка $|x(t)|$ для некоторых линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Критерии устойчивости для этих уравнений были указаны автором ранее (Старжинский В. М., Прикл. матем. и механика, 1952, т. 16, в 3). В случае нестационарных уравнений оценка $x(t)$ получается путем сравнения с решениями некоторых стационарных уравнений. В качестве примера вычислена оценка решения $x(t)$ для уравнения

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \left(1 + q\cos\frac{2\pi}{\omega}t\right)x = 0 \quad (a > 0, \quad 0 < q < 1).$$

Н. Н. Красовский

2192. О связи между устойчивостью решений дифференциальных и конечно-разностных уравнений. Скалкина М. А., Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 3, 287—294

Установлена связь между устойчивостью возмущенных решений, описываемых системой

$$dx_s/dt = X_s(t, x_1, \ldots, x_n); \quad s = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

и конечно-разностным аналогом (1)

$$x^h_{s,\,m+1} = x^h_{s,\,m} + hX_s(t_0 + mh, x^h_{1m}, \ldots, x^h_{nm}); \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

где h — шаг сетки, $x^h_{s,\,m} \equiv x^h_s(t_0 + mh)$, $x_s(t_0) = x_{s0} \in D_0$, $x^h_s(t_0) = x^h_{s0} \in D_0$, D_0 — ограниченная замкнутая область. X_s определены и непрерывны по x_j, $-\infty < x_j < +\infty$ и по t в области $[0, \infty)$ и $X_s(t; 0, \ldots, 0) = 0$. Доказаны следующие теоремы:

1. Если система (1) — асимптотически устойчивая линейная система с постоянными коэффициентами, то при достаточно малом h система (2) также асимптотически устойчива.

2. Если система (1) устойчива по первому приближению, то и система (2) при достаточно малом h устойчива по первому приближению. Пусть в системах (1), (2) X_s — периодические функции от t с периодом ω, удовлетворяющие условиям Липшица по $x_1, \ldots, x_n$ в любой ограниченной замкнутой области $D \supset D_0$; тогда

$$F_s(t \pm \omega k; x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0 \pm \omega k) = F_s(t; x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0),$$

$$F^h_s(t_0 + mh \pm \omega k; x^h_{10}, \ldots, x^h_{n0}, t_0 \pm \omega k) = F^h_s(t_0 + mh; x^h_{10}, \ldots, x^h_{n0}, t_0),$$

где F_s и F^h_s — решения (1) и (2) соответственно, поэтому автор ограничивается случаем $t_0 \geqslant 0$, $t_0 \in [0, \omega]$.

3. Если тривиальное решение (1) асимптотически устойчиво, то для всякого заданного $\varepsilon > 0$ существуют два других числа $\delta(\varepsilon) > 0$ и $h^0(\varepsilon) > 0$ таких, что всякое решение (2) с шагом, не превышающим h^0, которое в начальный момент удовлетворяет неравенству $|x^h_s(t_0)| < \delta$, при любом целом положительном m удовлетворяет неравенству $|x^h_s(t_0 + mh)| < \varepsilon$.

В заключение рассмотрены неустановившиеся движения, описываемые системами (1), (2), причем начальные значения x_{0j} берутся из полосы

$$E_0 = \begin{cases} x_{j0} \in D_0, & j = 1, 2, \ldots, n, \\ 0 \leqslant t_0 < \infty. \end{cases}$$

X_s определены и непрерывно дифференцируемы в любой бесконечной полосе $E = \{|x_s| \leqslant H, \ 0 \leqslant t < \infty\}$ удовлетворяют в ней условиям Липшица по $x_1, \ldots, x_n$, причем для $(x, t) \in E$ выполняются неравенства

$$\left|\partial X_s/\partial t + \sum_{j=1}^{n} \partial X_s/\partial X_j \, X_j\right| \leqslant N; \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Л. И. Камынин

2193. Положение системы трех последовательно соединенных математических маятников, находящихся в одной плоскости, при ее периодическом движении вокруг положения устойчивого равновесия. Брадистилов Г., Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 1, 113—118

Рассматривается плоское периодическое движение системы трех последовательно соединенных математи-

ческих маятников около положения устойчивого равновесия. Уравнения движения системы имеют вид

$$-M_\nu g \sin\varphi_\nu = M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k)\varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k)\varphi_k'^2] + \sum_{k=\nu+1}^{3} M_k a_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k)\varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k)\varphi_k'^2], \quad (1)$$

где m_1, m_2, m_3 — массы маятников, $M_\nu = \Sigma_{k=\nu}^{3} m_k$, $\nu = 1, 2, 3$. Полагая в (1) $\varphi = \lambda\varphi$, получаем систему, которая при $\lambda = 0$ обращается в линейную

$$M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k \Psi_k'' + \sum_{k=\nu+1}^{3} M_k a_k \Psi_k'' = -gM_\nu \Psi_\nu. \quad (2)$$

Для системы (2) составляется характеристическое уравнение, все корни которого отрицательны, следовательно, общий интеграл (2) имеет вид:

$$\Psi_\nu = \sum_{k=1}^{3} L_{\nu k}(c_k \cos\rho_k t + D_k \sin\rho_k t), \quad \rho^2 = g/n.$$

Исследуется расположение корней характеристического уравнения и производится анализ движения системы. Показано, что при некоторых условиях существует периодическое решение с периодом, близким к $2\pi/\rho_1$; вообще говоря, существуют периодические решения с периодами $2\pi/\rho_2$ и $2\pi/\rho_3$, $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3$. Если отношения ρ_1/ρ_2, ρ_1/ρ_3 или ρ_2/ρ_3 — целые числа, последних периодических решений может не оказаться.

Ю. А. Митропольский

2194. Вопросы устойчивости для одной системы регулирования. Т у з о в А. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 2, 43—70

Рассматриваются вопросы устойчивости решения $x = y = z = 0$ системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}y + a_{13}z + f(x),$$
$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \quad (1)$$
$$\frac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

где a_{ik} — постоянные, $f(x)$ — непрерывная нелинейная функция. Задача решается вторым методом Ляпунова; используется теорема: Если существует определенно положительная функция V такая, что $V > M$ при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > N$ и $dV/dt \leqslant 0$ в области $V < M$, причем нет движений (кроме $x_1 = \ldots = x_n = 0$), лежащих целиком при $t \geqslant 0$ в области $dV/dt = 0$, то всякое движение, начинающееся в области $V < M$, стремится к невозмущенному движению при $t \to \infty$. Если N можно указать для любого $M > 0$, то решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ асимптотически устойчиво при всех начальных отклонениях. (Аналогичная теорема была доказана в статье Е. А. Барбашина и референта. Докл. АН СССР, 1952, 86, № 3). Рассматривается двенадцать случаев, соответствующих различным соотношениям между параметрами системы (1). Для каждого из этих случаев исследуется устойчивость при малых начальных отклонениях. Указываются достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы решение $x = y = z = 0$ было асимптотически устойчивым при любых начальных отклонениях. Эти условия обобщают некоторым образом известные условия Рауса-Гурвица.

Н. Н. Красовский

2195. К теории вынужденных колебаний. Р е й с с и г (Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen. R e i s s i g R.), Math. Nachr., 1955, **13**, № 5, 309—312 (нем.)

В предположении, что система уравнений

$$\dot{u}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = f_i(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n; t), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

(где f_i — периодические по t с периодом T) при любых начальных условиях имеет единственное решение, непрерывно зависящее (на любом отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$) от начальных условий, доказана следующая теорема: Для того чтобы система имела единственное периодическое решение, а все другие решения стремились к нему при $t \to +\infty$, необходимо и достаточно выполнение условий: 1) любое решение системы ограничено при $t \geqslant 0$, 2) для любых двух решений $(u_1, \ldots, v_n)$ и $(u_1^*, \ldots, v_n^*)$ имеем $u_i^* - u_i \to 0$, $v_i^* - v_i \to 0$ при $t \to +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

А. Ф. Филиппов

2196. Заметка к теореме существования периодического решения нелинейных дифференциальных уравнений. Й о с и д з а в а (Note on the existence theorem of a periodic solution of the non-linear differential equation. Y o s h i z a w a T.), Mem. College Sci. Univ. Kyoto, 1954, **A28**, № 2, 153—159 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(t, x, y), \quad dy/dt = g(t, x, y), \quad (1)$$

где f и φ непрерывны в области $0 \leqslant t < \infty$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$.

Даны условия ограниченности решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (1) с начальными значениями $x(0) = x^0$, $y(0) = y^0$ и критерий существования периодического решения периода ω для системы (1), в которой f и g удовлетворяют условию

$$f(t, x, y) = f(t + \omega, x, y), \quad g(t, x, y) = g(t + \omega, x, y).$$

Доказывается следующее утверждение: Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывные функции в области D_1: $0 \leqslant t < \infty$, $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть R_0 — положительное число, которое может быть достаточно большим, и D_2 — область: $0 \leqslant t < \infty$, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant R_0^2$. Допустим, что существует непрерывная функция $\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая следующим условиям в области D_2: 1) $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ стремится к нулю при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \to \infty$ равномерно относительно t; 2) для положительного числа $R(R > R_0)$ существует положительное число $G(R)$ такое, что $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant G(R) > 0$, где $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$; 3) $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет локально условиям Липшица по отношению к $(x_1, \ldots, x_n)$ и внутри области D_2 имеет место

$$\varliminf_{h \to 0} \frac{1}{h} \{\Phi(t + h, x_1 + hf_1, \ldots, x_n + hf_n) - \Phi(t, x_1, \ldots, x_n)\} \geqslant 0.$$

Тогда для любого решения системы (2) $x_i = x_i(t)$ по данному положительному числу α, удовлетворяющему условию $x_1^2(t_0) + \ldots + x_n^2(t_0) \leqslant \alpha^2$ (где t_0 произвольно), можно найти число $\beta(\beta > \alpha)$ такое, что для всех значений $t \geqslant t_0$ имеет место условие: $x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) \leqslant \beta^2$.

С. Н. Шиманов

2197. Бесконечно малая деформация циклов. У р а б е (Infinitesimal deformation of cycles. U r a b e M i-

n o r u), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, **18**, № 1, 37—53 (англ.)

В системе дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(x, y), \quad dy/dt = Y(x, y) \tag{1}$$

изучается поведение замкнутых траекторий (циклов) при деформации векторного поля $F = (X, Y)$. Деформированное поле $F_1 = (X_1, Y_1)$ берется в виде

$$\begin{aligned} X_1(x, y, \varepsilon) &= X(x, y) + \varepsilon H_1(x, y) + \varepsilon^2 H_2(x, y) + \dots \\ Y_1(x, y, \varepsilon) &= Y(x, y) + \varepsilon K_1(x, y) + \varepsilon^2 K_2(x, y) + \dots, \end{aligned} \tag{2}$$

где X, Y, X_1, Y_1 аналитические по x и y. Исследование производится посредством изучения функции «последования» Пуанкаре. Для этого определяется расстояние $\rho(t; c, \varepsilon)$ от начальной точки исходного цикла C системы (1), по нормали к нему, до траектории поля (2), удовлетворяющей начальному условию $\rho(t_0; c, \varepsilon) = c$; для него получено выражение

$$\rho(t; c, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(t; c, \varepsilon),$$

где ρ_i — однородные по c и ε многочлены i-й степени, из них приведем

$$\rho_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{X^2+Y^2}} e^h \int_{t_0}^{t} e^{-h}(XK_1 - YH_1)dt + \frac{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}{\sqrt{X^2+Y^2}} e^h c,$$

причем $X_0 = X(x(t_0), y(t_0))$, $Y_0 = Y(x(t_0), y(t_0))$ и $h = \int_{t_0}^{t} (\partial X/\partial x + \partial Y/\partial y)\,dt$ по кривой C.

Сначала изучается функция $\rho(t; c, 0)$ $(\rho = \rho(t, c) = \rho(t, c, 0) = c\rho_1(t) + c^2\rho_2(t) + \dots + c^m \rho_m(t) + \dots)$ и через нее выражаются условия устойчивости и неустойчивости цикла C системы (1), а также условия существования континуума циклов и его окрестности. Исследование разбивается на случаи

I $h_0 = h(t_0 + T) \neq 0$.

II $h_0 = 0$, $\rho_2(t_0 + T) = \dots \rho_{m-1}(t_0 + T) = 0$, $\rho_m(t_0 + T) \neq 0$.

III $h_0 = 0$, $\rho_2(t_0 + T) = \dots = \rho_m(x_0 + T) = \dots = 0$.

В последнем случае в окрестности C имеется континуум циклов. Циклы деформированного уравнения изучаются посредством исследования функции

$$\Phi(c, \varepsilon) = \rho(t_0 + T; c, \varepsilon) - \rho(t_0; c, \varepsilon) = c(e^{h_0} - 1) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}} e^{h_0} I + \sum_{i=2}^{\infty} \rho_i(t_0+T; c, \varepsilon),$$

где

$$I = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-h}(XK_1 - YH_1)\,dt. \tag{3}$$

Приводятся некоторые результаты: а) в окрестности цикла типа I существует единственный цикл той же устойчивости, что и C; б) в окрестности устойчивого или неустойчивого цикла типа II существует по крайней мере один цикл, имеющий ту же устойчивость, в) если $h_0 = 0$ и $I = 0$, то циклов существует столько, сколько действительных корней c имеет уравнение $\Phi(c, \varepsilon) = 0$; точные аналитические характеристики этого случая не даны, но выяснено, что характер устойчивости циклов, вообще, меняется при чередовании корней по величине.

В заключение изучается движение циклов в зависимости от параметра для полей $F(\alpha) = \{X(x, y, \alpha), Y(x, y, \alpha)\}$. Рассматривается два случая:

1. В окрестности цикла $C(\alpha_0)$ существуют континуумы циклов в обоих полях — $F(\alpha_0)$ и $F(\alpha_0 + \delta\alpha)$. Тогда каждый цикл $C(\alpha_0)$ изменяется непрерывно от начального положения к циклу поля $F(\alpha_0 + \delta\alpha)$.

2. Существует k циклов $C(\alpha_0 + \delta\alpha)$, лежащих в окрестности $C(\alpha_0)$. Тогда k циклов $C(\alpha_0 + \varepsilon)$ изменяются непрерывно, сохраняя устойчивость, от циклов $C(\alpha_0)$ к циклам $C(\alpha_0 + \delta\alpha)$, когда ε изменяется монотонно.

Если $I \neq 0$ для точек $C(\alpha_0)$, то циклы $C(\alpha_0 + \delta\alpha)$ не могут пересекаться с $C(\alpha_0)$, в этом случае с монотонным изменением ε циклы $C(\alpha_0 + \varepsilon)$ расширяются или сужаются; поля, изученные Даффом (РЖМат, 1953, 229), удовлетворяют этому условию.

Поле называется допускающим положительное (отрицательное) продолжение, если в соседстве цикла α существует всегда по крайней мере один цикл $C(\alpha + \delta\alpha)$ при $\delta\alpha > 0$ $(\delta\alpha < 0)$. Для полей, допускающих продолжение, справедлива теорема: Если при положительной продолжаемости α' $(\alpha' < +\infty)$ есть точная нижняя грань таких α, для которых $C(\alpha)$ существует, то $C(\alpha)$ приближается неограниченно или к особой точке, или к бесконечности, когда $\alpha \to \alpha'$; аналогичное справедливо для верхней грани α' $(\alpha' > -\infty)$ при отрицательной продолжаемости поля. М. И. Минкевич

2198. О динамических системах с одной степенью свободы. Патнам (On dynamical systems with one degree of freedom. Putnam C. R.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 2, 280—283 (англ.)

Рассматривается динамическая система, определяемая на плоскости (p, q) канонической системой уравнений:

$$dp/dt = -\partial H/\partial q; \quad dq/dt = \partial H/\partial p, \tag{1}$$

причем $H(p, q)$ принадлежит классу C^2. Доказана теорема 1: Пусть Ω — инвариантное для системы (1) множество конечной положительной меры. Тогда каждая траектория Ω, за исключением множества меры 0, является либо точкой покоя, либо периодической траекторией. Если предположить дополнительно, что $\text{mes}\,\Omega \cap \Sigma > 0$ (при $\Omega \cap \Sigma \neq 0$) для любого открытого множества Σ, то каждая устойчивая траектория из Ω будет периодической. Устойчивость понимается в смысле A-устойчивости (РЖМат, 1955, 3198). Из теоремы 1 следует также, что всякая изолированная устойчивая точка покоя системы (1) является локальной точкой максимума или минимума функции $H(p, q)$.

Примечание референта. Теорема 1 является следствием теоремы Пуанкаре о возвращении и хорошо известной теоремы о периодичности любой устойчивой по Пуассону траектории на плоскости. Однако автор не делает ссылки на это последнее предложение, а дает непосредственное доказательство теоремы, использующее канонический вид системы (1). М. И. Грабарь

2199. К вопросу об оценке интегральных критериев качества регулирования нелинейных систем. Плишкин Ю. М., Автоматика и телемеханика, 1955, **16**, № 1, 19—26

Для некоторых нелинейных систем автоматического регулирования при помощи функций Ляпунова, характеризующих устойчивость системы, дается оценка сверху интегральных критериев качества регулирования $J_3 = \int_0^\infty V dt$ и $J_2 = \int_0^\infty x^2 dt$, где V — определенно-положительная квадратичная форма переменных x_i, x, $x(t)$ — кривая переходного процесса. Если переходный процесс описывается системой уравнений

$$\dot{x} = f_1(x) + ay, \quad \dot{y} = f_2(x) + by$$

$$(f_1(0) = f_2(0) = 0, \quad h_1 = f_1/x, \quad h_2 = f_2/x, \quad h_1 + b \leqslant -\varepsilon_1, \quad h_1 b - h_2 a \geqslant \varepsilon_2,$$

a, b — постоянные, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$), то $J_2 = \int_0^\infty x^2 dt \leqslant W_0 / 2\varepsilon_1\varepsilon_2$; здесь W_0 — значение функции Ляпунова при начальных условиях x_0, y_0. В случае уравнений

$$\dot{x} = f_1(x) + ay, \quad \dot{y} = bx + f_2(y)$$

($f_1(0) = f_2(0) = 0$, $h_1 = f_1 / x$, $h_2 = f_2 / y$, $h_1 + c_2 \leqslant -\varepsilon_1$, $h_2 + c_1 \leqslant -\varepsilon_2$, $h_1c_2 - ab \geqslant \varepsilon_3$ при $x \neq 0$, $h_2c_1 - ab \geqslant \varepsilon_4$ при $y \neq 0$, a, b, c_1, c_2 — постоянные, $c_1c_2 = ab \neq 0$, ε_1, ε_2, ε_3, $\varepsilon_4 > 0$)

$$J_3 = \int_0^\infty (x^2 + y^2)\, dt \leqslant \frac{W_0}{\min(2\varepsilon_1\varepsilon_3,\ 2a^2\varepsilon_2\varepsilon_4 / c_1^2)}.$$

Для уравнений $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}^{(t)} x_j$, $i = 1, \ldots, n$.

$$\varphi_{ii} \leqslant -\varepsilon_i;\ \varphi_{ij} \equiv -\varphi_{ji};\ i \neq j;\ \varepsilon_i > 1$$

$$J_3 = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n x_i^2\, dt \leqslant \frac{1}{2\min(\varepsilon_i)} \sum_{i=1}^n x_{i0}^2.$$

(Здесь нет необходимости исключать $0 < \varepsilon_i \leqslant 1$. *Реф*)

Рассматриваются и другие примеры. Работа развивает метод оценки качества регулирования, данный Фельдбаумом (Автомат. и телемеханика, 1948, **9**, № 1).

Р. А. Спасский

2200. К теории непрямого регулирования при учете сухого трения в чувствительном элементе. Петров В. В., Уланов Г. М., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 4, 611—614

Приводятся результаты исследования многолистной фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ системы

$$T_a\ddot{\varphi} = -\mu;\ \delta\eta = \varphi + \frac{\varepsilon}{2}\operatorname{sgn}\dot{\eta} \text{ при } \dot{\eta} \neq 0;$$

$$|\delta\eta - \varphi| < \varepsilon/2 \text{ при } \dot{\eta} = 0;$$

$$T_s\dot{\mu} = f(\sigma);\ \sigma = \eta - \gamma\mu;$$

$f(\sigma) = 1, 0, -1$ при $\sigma > 0$, $\sigma = 0$, $\sigma < 0$ соответственно. Указаны вид траекторий, заполняющих листы, типы циклов, появляющихся при изменении параметров, граница области устойчивости «в большом» в параметрическом пространстве.

С. А. Стебаков

2201. Вынужденные колебания при наличии вязкого и сухого трения. Оценка амплитуд. Рейссиг (Erzwungene Schwingungen mit zäher und trockener Reibung. Abschätzung der Amplituden. Reissig Rolf), Math. Nachr., 1954, **12**, № 5—6, 283—300 (нем.)

Уравнение движения осциллятора имеет вид:

$$x'' + 2Dx' + \mu\operatorname{sgn}x' + x = \Phi(\eta\tau),$$

$$\Phi(\eta\tau + 2\pi) = \Phi(\eta\tau) \qquad (1)$$

при $2\mu \geqslant M - m$, где $M = \max\Phi$ и $m = \min\Phi$, у (1) имеется устойчивое состояние равновесия в точке $x = u_0$, $M - \mu \leqslant u_0 \leqslant m + \mu$. При $2\mu < M - m$ существует единственный устойчивый предельный цикл. Даны оценки для $x = u(\tau)$ и $x' = v'(\tau)$ на предельном цикле. Так, при $D \geqslant 0$

$$m + \mu \leqslant \min u < \max u \leqslant M - \mu,\ -(M - m - 2\mu)\, e^{-D\varphi/n} \leqslant$$
$$\leqslant \min v < \max v \leqslant (M - m - 2\mu)\, e^{-D\varphi/n},$$

где $\varphi = \ln(n + D$, $n = \sqrt{D^2 - 1}$, при $D \leqslant 1$ формулы несколько сложнее.

А. И. Лурье

2202. Теорема сравнения для дифференциального уравнения свободных колебаний. Де-Кастро (Un teorema di confronto per l'equazione differenziale delle oscillazioni di rilassamento. De Castro Antonio), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 3, 280—282 (итал.)

Доказано, что уравнение

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \qquad (1)$$

имеет периодическое решение, если $f(0, 0) < 0$, $xg(x) > 0$ при $x \neq 0$; $\int_0^{\pm\infty} g(x)\, dx = +\infty$, f, g — непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица в любой ограниченной области и существует непрерывная функция $f_1(x, y)$ такая, что $f(x, \dot{x}) > f_1(x, \dot{x})$, а уравнение

$$\ddot{x} + f_1(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \qquad (2)$$

имеет периодическое решение C. При этом C охватывает периодическое решение уравнения (1). Для доказательства рассматриваются фазовые плоскости уравнений (1) и (2).

И. М. Смирнова

2203. Функции Пеано и орбитальная устойчивость дифференциального уравнения первого порядка. Литцман Отто (Peanovské funkce a orbitální stabilita diferenciální rovnice prvního řádu. Litzman Otto). Spisy vyd. přírodověd. facult. Masarykovy univ., 1953, № 3, 65—90 (чеш.; резюме русс., франц.)

Рассматривается уравнение $y' = f(x, y, s)$ (B), правая часть которого непрерывна $(x, y) \subset U$, $s \in S \equiv (c, d)$; U — область. Сначала изучается введенная автором функция $\Pi(x, \xi_\tau, \eta_\tau, M)$ — «функция Пеано по проф. Борувка» (ссылки на соответствующую работу проф. Борувка нет), которая ставит в соответствие каждому $s \subset M \subset S$ одно или несколько решений (B), проходящих через точку (ξ_τ, η_τ). Далее вводится понятие об орбитальной устойчивости решения (B): «Решение уравнения (B) орбитально устойчиво, если интегральные кривые, выходящие из окрестности основной точки, лежат вблизи интегральной кривой основного решения». Так, решение $y' = x \cdot y$, проходящее через (1,1), орбитально устойчиво (стр. 82) и автор подчеркивает, что разность ординат «близких» решений может расходиться до бесконечности. Дается весьма слабое условие орбитальной устойчивости решения уравнения (B): существует $\partial f / \partial y < -M < 0$ для всех $(x, y) \subset U$ и $\lim f_{s \to s_0}(x, y, s) = f(x, y, s_0)$ равномерно относительно $(x, y) \subset U$ (стр. 88).

М. И. Ельшин

2204. О монотонных решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений. Хартман, Винтнер (On monotone solutions of systems of non-linear differential equations. Hartman Philip. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 4, 860—866 (англ.)

Исследуется система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$x' = -f(t, x),\ f(t, 0) \equiv 0, \qquad (1)$$

где $f(t, x)$ — заданная вектор-функция независимой переменной t и вектора x, $x(t)$ — искомая вектор-функция. Неположительным (неотрицательным) вектором именуется вектор, все составляющие которого неположительны (неотрицательны).

Доказана следующая теорема: Если вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна и неотрицательна в области $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ и при любом $T > 0$ можно указать функцию $\Phi(r)$, непрерывную, положительную при $0 \leqslant r < \infty$ и удовлетворяющую условиям:

$$\int^\infty \frac{dr}{\Phi(r)} = \infty,\ x \cdot f(t, x) \leqslant \Phi(|x|^2)$$
$$\text{при } 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \geqslant 0,$$

то при любом $c > 0$ существует по крайней мере одна вектор-функция $x(t)$, удовлетворяющая при $t = 0$ условию $|x(0)| = c$ и удовлетворяющая при $0 \leqslant t < \infty$

векторному дифференциальному уравнению (1) и неравенствам $x(t) \geqslant 0$, $x'(t) \leqslant 0$.

Теорема обобщает результат, установленный ранее авторами для системы линейных дифференциальных уравнений (Amer. J. Math., 1953, 75, 731—743). При некоторых дополнительных предположениях относительно функции $f(t, x)$ показана представимость монотонного решения $x(t)$ уравнения (1) интегралом Лапласа

$$x(t) = \int_0^\infty e^{-ts} d\alpha(s), \quad d\alpha(s) \geqslant 0.$$

Отмечено также, что последовательные приближения к монотонному решению уравнения (1) являются попеременно нижними и верхними, если функция $f(t, x)$ неубывающая относительно x. И. М. Рапопорт

2205. О периодических решениях одного существенно нелинейного уравнения. Каприоли (Sulle soluzioni periodiche di una equazione fortemente nonlineare. Caprioio Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 3, 271—280 (итал.)

Определяются условия, необходимые для существования периодических решений существенно нелинейного уравнения $\ddot{x} + \frac{\omega}{\varepsilon}\varphi(x) + \omega^2 x = 0$, причем $\varphi(x) = \frac{d}{dx} f(x)$, $f(x) = x^5 + kx^3 + x$, $k > 2$. Указано, что рассуждения применимы также в случае, когда $f(x)$ — любая непрерывная полусимметричная функция, стремящаяся к ∞ при $x \to \infty$, имеющая при $x > 0$ один положительный максимум и один отрицательный минимум. Устанавливается, что при $5 < k^2$ существует одно и только одно установившееся периодическое решение (условие это совпадает с подобным условием для случая малой нелинейности). Дана формула для вычисления асимптотической величины периода этого решения при любой заданной величине параметра ε.

И. М. Смирнова

2206. Дифференциальные уравнения с точками возврата. Трикоми (Equazioni differenziali con punti di transizione. Tricomi Francesco G.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **17**, № 5, 137—141 (итал.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + [g(x) + \lambda v(x)]\, y = 0, \qquad (1)$$

где λ — параметр, $p(x) > 0$ и, кроме того, выполняются некоторые добавочные требования гладкости, которые в статье не формулируются; $v(x)$ имеет простой нуль в точке $x = x_0$. Подстановка $y = \alpha(x) z$, $v(x) = \xi\rho(x)$; $\xi = \int_{x_0}^{x} dx / \alpha^2(x) p(x)$, $\alpha(x) = [p(x)\rho(x)]^{-1/4}$ приводит уравнение (1) к виду: $\frac{d^2z}{x\xi^2} + [\lambda\xi - Q(\xi)]\, z = 0$. Положив $\mu^2 = \lambda$ и $\xi = x$, автор получает уравнение

$$\frac{d^2z}{dx^2} + [\mu^2 x - Q(x)]\, z = 0 \qquad (2)$$

и исследует асимптотическое поведение решений (2) при $\mu \to \infty$ в окрестности точки $x = 0$. Подстановка $x = 3^{-1/3}\mu^{-2/3}t$, $3^{2/3}Q(3^{-1/3}\mu^{-2/3}t) = Q^*(t)$ сводит задачу к изучению асимптотического поведения решений уравнения

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{3} tz = \mu^{-4/3} Q^*(t)\, z \qquad (3)$$

в окрестности точки $t = 0$ при $\mu \to \infty$. Независимые решения (3) представимы в виде $z_h = A_h(t) + O(\mu^{-4/3})$, $(h = 1, 2)$, где

$$A_1(t) = (\pi/3)\sqrt{t_1}\,\{J_{-1/3}[2(t_1)^{3/2}] + J_{1/3}[2(t_1)^{3/2}]\},$$

$$A_2(t) = (\pi/3)\sqrt{t}\,\{J_{-1/3}[2(t_1)^{3/2}] - J_{1/3}[2(t_1)^{3/2}]\},$$

$$t_1 = t/3.$$

Получены также и более точные асимптотические представления. И. З. Штокало

2207. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. П. Левитан Б. М., Изв. АН СССР, 1955, **19**, № 1, 33—58

Уточняются результаты предыдущей работы (РЖМат, 1954, 3321). Пусть $\theta_h(x, s, \lambda)$ и $\theta_h^*(x, s, \lambda)$ — спектральные функции операторов $L[u] = u'' - q(x)u$ и $L^*[u] = u''$, определенных на функциях $u(x)$, заданных на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ и удовлетворяющих краевому условию $u'(0) - hu(0) = 0$ (h и $q(x)$ вещественны и $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале (РЖМат, 1953, 734; 1954, 3321).

Теорема. Равномерно в каждой конечной области изменения x, s имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \to +\infty} [\theta_h(x, s; \lambda) - \theta_h^*(x, s; \lambda)] = \theta_h(x, s; -\infty)$$

откуда, в частности, следует:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} [\theta_h(0, 0; \lambda) - 2/\pi\lambda^{1/2}] = \theta_h(0, 0, -\infty) - h$$

Теорема. Пусть $f(x) \in L_2[0, \infty)$. Равномерно в каждом конечном интервале изменения x

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^\infty f(s)\left[\theta_h(x, s; \lambda) - \theta_h(x, s, -\infty) - \frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\right] ds = 0,$$

т. е. разложение $f(x)$ по собственным функциям оператора L сходится или расходится одновременно с разложением этой функции в обычный интеграл Фурье по косинусам. Аналогичные теоремы доказываются для операторов, заданных на всей оси. Кроме того, рассмотрено суммирование по Риссу спектральных функций и разложений по собственным функциям

Примечание референта. На стр. 45, пункт 2, допущен легко исправимый просчет, повлекший за собой ошибки в формулах 4.8 и 4.9. Например, формула 4.9 должна иметь вид

$$\lim_{\mu \to \infty} [\rho_h(\mu) - \frac{2}{\pi}\mu] = \rho_h(-\infty) - h.$$

В. А. Марченко

2208. Разложения по собственным функциям, связанные с сингулярными дифференциальными операторами. Эллиот (Eigenfunction expansions associated with singular differential operators. Elliott Joanne), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 2, 406—425 (англ.)

Изучается разложение по собственным функциям уравнения

$$d^2u/dx^2 + b(x)\,du/dx + c(x)\,u = \lambda u,$$
$$-\infty \leqslant r_1 \leqslant x \leqslant r_2 \leqslant \infty. \qquad (1)$$

Предполагается, что $b(x)$ непрерывна, но не обязательно ограничена в (r_1, r_2), а $c(x)$ непрерывна в $[r_1, r_2]$. Приводится классификация границ по Феллеру (Ann. Math., 1952, 55, 468—519).

I. Граница r_2 называется регулярной, если $e^{\pm B(x)} \in L(0, r_2)$, $B(x) = \int_0^x b(s)\,ds$.

II. r_2 называют отражающей границей (exit boundary), если она нерегулярна и если $e^{-B(x)} \int_0^x e^{+B(s)} ds \in L(0, r_2)$.

III. r_2 называется поглощающей границей (entrance boundary), если она нерегулярна и если $e^{B(x)} \int_0^x e^{-B(s)}\,ds \in L(0, r_2)$.

IV. r_2 называется обычной границей (natural boundary) во всех других случаях. Аналогично для r_1.

Доказывается теорема: Если r_j $(j = 1, 2)$ — регулярная граница, то для уравнения (1) в окрестности точки r_j имеет место случай предельного круга. Если r_j — обращающая или обычная граница, то для уравнения (1) в окрестности точки r_j имеет место случай предельной точки. Если r_j — поглощающая граница, то для уравнения (1) имеет место случай предельного круга тогда и только тогда, когда

$$e^{B(x)} \left[\int_0^x e^{-B(s)}\,ds\right]^2 \in L(0, r_j).$$

Доказано несколько теорем о суммировании по методу Пуассона функций, определенных на интервале $[r_1, r_2]$, например: Если ни одна из границ не является обычной, то для $f \in C[r_1, r_2]$

$$f(x) = \lim_{t \to \infty} \int_{r_1}^{r_2} f(y) \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t}\ \varphi_n(x)\,\varphi_n(y)\right] e^{B(y)}\,dy;$$

где $\varphi_n(x)$ — собственные функции уравнения (1) и λ_n — соответствующие собственные значения. Сходимость равномерна в $[r_1, r_2]$, если ни одна из границ не является поглощающей; сходимость равномерна в $[r_1', r_2']$, $r_j' \neq r_j$, если r_j — поглощающая граница.

Б. М. Левитан

2209. Об асимптотическом распределении собственных значений. Хейвуд (On the asymptotic distribution of eigenvalues. Heywood Philip), Proc. London Math. Soc., 1954, 4, № 16, 456—470 (англ.)

Устанавливаются асимптотические формулы для числа положительных и отрицательных собственных значений уравнения $y'' + \{\lambda + h(x)\}\,y = 0$ на полуоси $0 \leqslant x < +\infty$ с обычными линейными краевыми условиями при $x = 0$ и $x = +\infty$ (рассматривается случай предельного круга, когда необходимо задавать условия на бесконечности; в этом случае, как известно, спектр всегда дискретный). Пусть $E(\lambda)$ — число неотрицательных собственных значений, не превосходящих λ, $F(\mu)$ — число отрицательных собственных значений, не превосходящих μ по абсолютной величине; $p(\mu)$ — корень уравнения $h(p) = \mu$ (единственный, в силу условий, наложенных на $h(x)$). Тогда

$$E(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\{\lambda + h(x)\}^{1/2} - \{h(x)\}^{1/2}]\,dx + O(1), \quad (1)$$

$$F(\mu) = \pi^{-1} \int_0^{p(\mu)} \{h(x)\}^{1/2} dx + \pi^{-1} \int_{p(\mu)}^{\infty} [\{h(x)\}^{1/2} - \{h(x) - \mu\}^{1/2}]\,dx + O(1). \quad (2)$$

При доказательстве предполагается, что $h(0) = 0$; $h'(x) > 0$; сходится $\int^{\infty} \{h(x)\}^{-1/2}\,dx$; $h''(x)$, начиная с некоторого x, сохраняет знак; $h''(x) = 0([h'(x)]^{\gamma})$, $1 < \gamma < 4/3$; для некоторого $d < 3/2$ отношение $h'(x) / \{h(x)\}^d$, начиная с достаточно большого x, монотонно убывает.

Л. А. Чудов

2210. Об одной задаче на собственные значения для дифференциального уравнения $y^{(n)} + \lambda A(x)\,y = 0$. Зламал (Über eine Eigenwertaufgabe bei der Differentialgleichung $y^{(n)} + \lambda A(x)\,y = 0$. Zlámal Miloš), Spisy vyd. přírodověd. facult. Masarykovy univ., 1953, № 3, 91—99 (нем.; резюме русс.)

Рассматривается распределение собственных значений краевой задачи

$$y^{(n)} + \lambda A(x)\,y = 0, \quad n \geqslant 2, \quad (1)$$

$$y(a) = \cdots = y^{(k-1)}(a) = y^{(k+1)}(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = 0 \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1) \quad (2)$$

$$y(b) = 0, \quad (3)$$

где $A(x)$ непрерывна, положительна в $[a, b]$. Исследуя распределение нулей решения (1), удовлетворяющего условиям (2), автор доказывает, что задача (1), (2), (3) имеет бесчисленное множество положительных собственных значений: $0 < \lambda_0^{nk} < \lambda_1^{nk} < \lambda_2^{nk} < \ldots$ При этом

$$\frac{1}{M_2}\left[\frac{p_{nk} + \nu p_{n1}}{b-a}\right]^n \leqslant \lambda_{\nu}^{nk} \leqslant \frac{1}{M_1}\left[\frac{p_{nk} + \nu p_{nn-1}}{b-a}\right]^n, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $M_1 = \min_{x \in [a,b]} A(x)$, $M_2 = \max_{x \in [a,b]} A(x)$, p_{nk} — первый положительный корень решения уравнения $y^{(n)} + y = 0$ при условии $y(0) = \cdots y^{(k-1)}(0) = y^{(k+1)}(0) = \cdots y^{(n-1)}(0) = 0$; $y^{(k)}(0) = 1$. Собственная функция, отвечающая значению λ_{ν}^{nk}, имеет ν нулей в интервале (a, b). Частным случаем этой задачи $(k = n-1)$ занимался Сансоне (Sansone G., Ann. mat. pura ed appl., 1945, 24). Метод обобщается затем на случай уравнения вида $y^{(n)} + Q(x, \lambda)y = 0$, где $Q(x, \lambda)$ — непрерывная функция переменных x, λ при $x \in [a, b]$, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и такая, что $\lim_{\lambda \to \lambda_2 - 0} Q(x, \lambda) = \infty$ равномерно относительно $x \in [a, b]$.

В. В. Сташевская

2211. О построении обобщенного тензора Грина канонической системы дифференциальных уравнений из ассоциированных систем решений. Хёльдер (Über den Aufbau eines erweiterten Greenschen Tensors kanonischer Differentialgleichungen aus assoziierten Lösungssystemen. Hölder E.), Rocznik Polskiego towarz. mat., 1952, 12, 115—121 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x}^i = H_{y_i}, \quad \dot{y}_i = -H_{x^i} \quad (i = 1, \ldots, n; \ t^0 \leqslant t \leqslant t');$$

$$2H(t, x^i, y_i) = c^{ij}(t)\,y_i y_j + 2b_i^j(t)\,x^i y_j + a_{ij}(t)\,x^i x^j.$$

Граничные условия

$$\overset{0}{U}{}^{h'}(x^l, y_l) \equiv x^{h'} - \overset{0}{\gamma}{}_{k''}^{h'}\,x^{k''} = 0,$$

$$\overset{0}{U}_{h''}(x^l, y_l) \equiv y_{k'}\,\overset{0}{\gamma}{}_{h''}^{k'} - y_{h''} - \overset{0}{\beta}_{h''k''}\,x^{k''} = 0$$

при $t = t_0$ и подобные же условия

$$\overset{1}{U}{}^{h'}(x^l, y_l) = 0, \quad \overset{1}{U}_{h''}(x^l, y_l) = 0$$

при $t = t_1$; здесь $h', k' = r_0 + 1, \ldots, n$; $h'', k'' = 1, \ldots, r_0$; $\overset{i}{\beta}_{h''k''} = \overset{i}{\beta}_{k''h''}$ $(i = 0, 1)$.

Строится квадратная матрица $G(t, \tau)$ порядка $2n$ (обобщенный тензор Грина), удовлетворяющая условиям: столбцы матрицы удовлетворяют при $t \neq \tau$ заданной системе дифференциальных уравнений, заданным граничным условиям при $t = t'$ и (при наличии $m > 0$ независимых решений поставленной граничной задачи) несколько усложненным граничным условием при $t = t^0$; транспонированная матрица $G(\tau, t)$ имеет при $t = \tau$ скачок, равный $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ (E — единичная матрица порядка n). В случае, если $H(t, x^i, y_i)$ содержит члены выше второй степени относительно x^i, y_i, при помощи тензора Грина, построенного по квадратичной части $H(t, x^i, y_i)$, решение рассматриваемой граничной задачи для нелинейной системы сводится к решению системы нелинейных интегральных уравнений, содержащей m параметров; эти параметры могут быть определены из граничных условий при $t = t_0$.

Я. Б. Лопатинский

2212. О системах канонических дифференциальных уравнений и соответствующей сингулярной задаче на собственные значения. Н и ч е (Über Systeme kanonischer Differentialgleichungen und das zugehörige singuläre Eigenwertproblem. N i t s c h e J o h a n n e s), Wiss. Z. Univ. Leipzig, 1952/1953, № 5, 193—226 (нем.)

Методы и понятия теории собственных значений дифференциального уравнения распространяются на некоторые системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Попутно рассматриваются также некоторые вопросы общей теории таких систем. Вначале рассматривается система $U' + AU = 0$ (A, U — матрицы, элементы A регулярные в области $0 < |z| \leqslant \mu$ функции). Формулируется ряд признаков регулярности элементов Φ в $z = 0$. Выражение $L(z)u' + M(z)$ (u — столбец) называется «формально самосопряженным», если $L + L^* = 0$, $M - M^* = L'$ (здесь $M^* = \overline{M}^T$, M^T — транспонированная матрица). В этом случае уравнение $Lu' + Mu = 0$ можно привести к виду

$$Iu' + Bu = 0, \qquad (1)$$

где $I = \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$, e — единичная матрица порядка n. (1) называется системой канонических уравнений и ее можно писать также в виде

$$u' + Su = 0, \qquad (2)$$

где матрица S обладает свойством $S^0 \equiv I^T S^T I = -S$ и называется косоканонической. Если в (2) ввести новую переменную v соотношением $u = Zv$, то новая система имеет косоканоническую матрицу в том и только в том случае, когда Z — симплектическая матрица (т. е. $Z^0 = Z^{-1}$). Дается несколько теорем о собственных значениях симплектических и косоканонических матриц. Дальше рассматривается система

$$Iu' + Bu = \lambda Cu; \qquad (3)$$

здесь $B = B^T$ и $C = C^T$ — действительные и непрерывные на (l_1, l_2) матрицы порядка $2n$, C имеет вид $\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, C_1 — положительно определенная матрица порядка $r \leqslant 2n$. Столбец u называется квадратично интегрируемым к l_1, если $\lim_{l \to l_1} \left| \int_{l_0}^{l} u^* Cu d\xi \right| < \infty$, $l_1 < l_0 < l_2$. Для (3) доказаны теоремы, обобщающие известные результаты Вейля. Если $U(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений системы (3) (для которой имеет место случай предельной окружности), а $u(x)$ — решение соответствующей неоднородной системы, с правой частью h, то

$$u(x) = U(x, \lambda)\left[\hat{u}(l_1) + \int_{l_1}^{x} (U^T IU)^{-1} UChd\xi\right];$$

определенный этим равенством столбец $\hat{u}(l_1)$ называется начальным столбцом ($u(x)$ в точке l_1 может и не быть определенным). Доказывается существование $U(x, \lambda)$, для которых $\hat{u}(l_1)$ не зависит от λ. На $\hat{u}(l_1)$ и аналогично определенное $\hat{u}(l_2)$ налагаются линейные однородные краевые условия так, чтобы для любых решений u, v краевой задачи имело место соотношение ортогональности

$$\hat{v}^*(l_2) I\hat{u}(l_2) - \hat{v}^*(l_1) I\hat{u}(l_1) = 0.$$

Для этой краевой задачи строится функция Грина, составляется уравнение, определяющее собственные значения, доказывается теорема разложения. Рассматривается также случай предельной точки. Некоторые теоремы даются без доказательств. Приводится много примеров, имеющих самостоятельный интерес. Библ. 23 назв.

Г. К. Энгелис

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

2213. О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 1, 27—30

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$\partial A(t, x, u)/\partial x + \partial B(t, x, u)/\partial x = F(t, x, u) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = \varphi(x), \qquad (2)$$

где $\varphi(x)$ — кусочно-непрерывная функция, определенная на отрезке (a, b) оси x и имеющая конечное число точек разрыва производной. Под решением уравнения (1) понимается функция $u(t, x)$, которая имеет непрерывные производные первого порядка всюду, кроме конечного числа дифференцируемых кривых, на которых предполагается существование предельных значений $u(t, x)$ с обеих сторон линии разрыва; кроме того, для любой области S, лежащей внутри области определения функции $u(t, x)$ и ограниченной гладкой кривой C, имеет место соотношение

$$\int_C (Adt - Bdx) = \iint_S Fdxdt.$$

В предположении, что $f(t, x, u) = A'_u / B'_u$ — монотонно возрастающая функция u и в точках разрыва решения выполняется условие $u(t, x + 0) < u(t, x - 0)$, показано существование и единственность решения задачи (1), (2) для достаточно малых значений t.

Примечания референта. В работе имеются опечатки. Утверждения пп. 3 и 5 справедливы для монотонно-возрастающей функции $f(t, x, u)$, в работе же делается предположение, что $f(t, x, u)$ — монотонно-убывающая функция u. Для справедливости результатов пп. 3 и 5 в этом случае неравенства для функции $\varphi(x)$ нужно заменить на обратные. Формула (8″) неверна. Решение задачи (1), (2) в большой области при существенно более общих предположениях относительно $\varphi(x)$ получено ранее в работе референта (РЖМат, 1955, 2677).

О. А. Олейник

2214. Об одном способе интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. А р ж а н ы х И. С., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 115—118

Предложен способ построения решения уравнения

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad p_\nu = \partial z / \partial x_\nu. \quad (1)$$

Пусть (1) получается из системы

$$\begin{aligned} H(z, x_1, \ldots x_n, q_1, \ldots, q_n) &= 0, \\ p_\nu = Q_\nu(z, x_1, \ldots, x_n, q_1, \ldots, q_n) & \end{aligned} \quad (2)$$

исключением $q_1, \ldots, q_n$, и пусть $\partial q_\mu / \partial x_\nu = \partial q_\nu / \partial x_\mu$. Если

$$\varphi_\nu(z, x_1, \ldots, x_n, q_1, \ldots, q_n, c_1, \ldots, c_n) = 0, \quad (3)$$

где $\nu = 1, 2, \ldots, n$, суть интегралы системы

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\nu}, \quad \frac{dq_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\nu} - \frac{\partial H}{\partial z} Q_\nu, \quad \frac{dz}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_\mu} Q_\mu, \quad (4)$$

удовлетворяющие условиям

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_\lambda} \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z} Q_\lambda \right) - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q_\lambda} \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} Q_\lambda \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)} \neq 0,$$

то полный интеграл (1) получается в результате исключения $q_1, \ldots, q_n$ из (3) и (2). В частности, если $H = F$ и $p_\nu = q_\nu$, то система (4) обращается в систему характеристик Коши для (1). При помощи решений системы (4) рассматривается решение задачи Коши. Приводятся примеры. З. И. Халилов

2215. Одна теорема о единственности для систем уравнений с частными производными первого порядка. **Ч я н к у и н и** (Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine. I. H. Cinquini Silvio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **17**, № 5, 188—191; № 6, 339—344 (итал.)

Доказана следующая лемма, обобщающая в стиле Каратеодори известную лемму Хаара. Пусть функция $L(x) \geqslant 0$ суммируема на $[0, a]$, причем $\int_0^x L(u)\,du < (b_2 - b_1)/2$ $(b_1 < b_2;\ 0 \leqslant x < a)$; D — множество точек (x, y), для которых $0 \leqslant x \leqslant a$, $b_1 + \int_0^x L(u)\,du \leqslant y \leqslant b_2 - \int_0^x L(u)\,du$. Пусть функции $z_1(x, y), \ldots, z_r(x, y)$ определены в D, при каждом x имеют непрерывную производную по y, а при каждом y абсолютно непрерывны по x, причем $z_j(0, y) = 0$ $(j = 1, \ldots, r;\ b_1 \leqslant y \leqslant b_2)$. Пусть функции $H_{j,i}(x) \geqslant 0$ $(j, i, \ldots, r)$ суммируемы на $[0, a]$, причем для каждого $y \in [b_1, b_2]$ почти для всех x

$$|\partial z_j / \partial x| \leqslant \sum_{i=1}^{r} H_{j,i}(x) |z_i| + L(x) |\partial z_j / \partial y| \quad (j = 1, \ldots, r).$$

Тогда $z_j \equiv 0$ (для всех $j = 1, \ldots, r$) всюду в D.

Из этой леммы сразу следует теорема о единственности решения задачи Коши для системы уравнений

$$\partial z_j / \partial x = f_j(x, y, z_1, \ldots, z_r, \partial z_j / \partial y) \quad (j = 1, \ldots, r)$$

при соответствующих предположениях о функциях f и z.

Примечание референта. По поводу дальнейших обобщений леммы Хаара см. статью референта (Докл. АН СССР, 1947, 58, № 1, 21—24) А. Д. Мышкис

2216. Неравенство Фридрихса — Леви для линейных гиперболических уравнений высших порядков. **Г о р д и н г** (L'inégalité de Friedrichs et Lewy pour les équations hyperboliques linéaires d'ordre supérieur. Gårding Lars), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 15, 849—850 (франц.)

Пусть $a = \sum_{|\alpha| = m+1} a_\alpha(x) D^\alpha$, $\left(D^\alpha = \left(\frac{\partial}{dx_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\right.$; $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ — гиперболический дифференциальный оператор порядка $m + 1$. Сообщается справедливость следующего общего неравенства:

$$c(u, u)_m^{S_\lambda} \leqslant (u, u)_m^{S_0} + (au, au)_0^{T_\lambda}, \quad (1)$$

где $c > 0$, $(u, u)_m^R = \int_R \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u|^2\,dR$, а поверхности S_λ и S_0, ограничивающие область T_λ, имеют пространственную ориентацию и общий край. Для вывода неравенства (1) оператор au умножается на соответствующий гиперболический оператор bu порядка m и используется тождество

$$\int_{T_\lambda} \mathrm{Re}\, au\, \overline{bu}\, dx = \int_{S_\lambda} A_\lambda(u, u)\,dS_\lambda - \int_{S_0} A_0(u, u)\,dS_0 + \int_{T_\lambda} B(u, u)\,dx,$$

где A_λ, B — эрмитовы операторы от $D^\alpha u$ с $|\alpha| \leqslant m$. М. И. Вишик

2217. Симметрические линейные дифференциальные уравнения гиперболического типа. **Ф р и д р и х с** (Symmetric hyperbolic linear differential equations. Friedrichs K. O.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, **7**, № 2, 345—392 (англ.)

Рассматривается задача Коши для системы вида $Eu \equiv \sum_{\mu=1}^{m} A^\mu(x)\,\partial \mathbf{u} / \partial x_\mu + B(x)\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$, где A^μ и B — заданные квадратные матрицы с n^2 элементами, а $\mathbf{f}$ — заданный вектор с n компонентами. Предполагается, что матрицы A^μ симметричны и неотрицательны, а их сумма есть положительно-определенная матрица. Такие системы являются частным случаем систем гиперболического типа по И. Г. Петровскому. Известно, что доказательство основного энергетического неравенства для этих систем проводится так же, как и для одного гиперболического уравнения второго порядка, и что изучение последнего можно свести к изучению системы вида (1). Все рассмотрения ведутся в конечной области Ω пространства $x_1, \ldots, x_m$, ограниченной куском S, пространственно ориентированной поверхности, на которой заданы начальные условия Коши, и достаточно мало отклоняющейся от нее поверхностью J, так что решение задачи в Ω определяется заданием данных Коши на S.

Автор изучает сначала обобщенное решение задачи, принадлежащее $L_2(\Omega)$ (слабое расширение оператора E, по терминологии автора). Доказывается теорема единственности, а из нее и теорема существования такого решения. Далее при помощи конечных разностей устанавливается, что если f имеет обобщенные производные первого порядка из $L_2(\Omega)$, то и обобщенное решение имеет такие производные и удовлетворяет всюду в Ω уравнению (1) и почти всюду на S — начальным данным Коши. О. А. Ладыженская

2218. Решение уравнений второго порядка гиперболического типа с постоянными коэффициентами в области с плоской границей. **Й о н** (Solutions of the second order hyperbolic differential equations with constant coefficients in a domain with a plane boundary. John Fritz), Communs Pure and Appl. Math., 1954, **7**, № 2, 245—269 (англ.)

Задача Коши исследуется в предположении, что начальные данные задаются на поверхности, ориентированной времяобразно. Пусть R — окрестность начала координат в пространстве (y, z, t);

$$Lu \equiv u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + ku;$$

c и k — вещественные постоянные. Пара функций (f, g) ($f, g \in C^\infty$) называется допустимой в R, если в некоторой окрестности N множества R в пространстве (x, y, z, t) существует функция $u(x, y, z, t) \in C^\infty$, удовлетворяющая уравнению $Lu = 0$ и условиям Коши

$$u(0, y, z, t) = f, \quad u_x(0, y, z, t) = g;$$

символически это записывается в виде:

$$(f, g) \equiv 0 \pmod{L} \text{ в } R.$$

Доказывается, что пары $(f, 0)$ и $(0, g)$, допустимые в R для оператора Lu, допустимы также для оператора $L'u \equiv u_{tt} - c'^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + k'u$, если $c'^2 \leqslant c^2$; на примере выясняется, что последнее неравенство не может быть отброшено. Если $(f, g) \equiv 0 \pmod{L}$ и $(af, bg) \equiv 0 \pmod{L'}$ в R, где a и b — постоянные, $c'^2 \leqslant c^2$, $ab < 0$, то $(f, 0) \equiv 0$ и $(0, g) \equiv 0 \pmod{L'}$ в R' — некотором замкнутом множестве, лежащем в R. Если $c' = c$, то из соотношений $(f, g) \equiv 0 \pmod{L}$, $(f, g) \equiv 0 \pmod{L'}$ в R вытекают соотношения $(f, 0) \equiv 0 \pmod{L'}$, $(0, g) \equiv 0 \pmod{L'}$ в R. В случае двух измерений вопрос о допустимости пары $(0, g)$ сводится к допустимости ее для уравнения

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0; \tag{1}$$

доказывается, что для этого необходимо и достаточно, чтобы имело место представление

$$g(y, t) = \int_0^\pi \gamma(y \sin\theta + t, \theta)\, d\theta,$$

где $\gamma(s, \theta)$ определена для всех θ и для s, достаточно малых по абсолютной величине, и имеет все производные по s, непрерывные как функции от s и θ. Для допустимых $(0, g)$ решение уравнения (1) представляется некоторым интегралом. С. Г. Михлин

2219. О некотором упрощении метода отыскания функционально-инвариантных решений волнового уравнения. Галонен Л. М., Уч. зап. Ростовск. н/Д. ун-та, 1955, **32**, № 4, 173—178

Несколько видоизменяя рассуждения Н. П. Еругина (Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. наук, 1948, вып. 15, 101—134), автор повторяет его прежние результаты. М. М. Смирнов

2220. О функционально-инвариантных решениях дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка ультрагиперболического типа. Галонен Л. М., Уч. зап. Ростовск. н/Д. ун-та, 1955, **32**, № 4, 179—182

Применяя метод Н. П. Еругина (реф. 2219), автор рассматривает задачу о нахождении функционально-инвариантных решений для уравнения

$$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 - \partial^2 u/\partial z^2 = \partial^2 u/\partial t^2. \tag{1}$$

Полученные формулы для таких решений уравнения (1) аналогичны формулам для волнового уравнения. М. М. Смирнов

2221. Теорема единственности для задачи Франкля. Моравец. (A uniqueness theorem for Frankl's problem. Morawetz Cathleen S.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, **7**, № 4, 697—703 (англ.)

Доказывается единственность решения краевой задачи для дифференциального уравнения

$$K(y) u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области D, ограниченной кусочно-непрерывно дифференцируемой кривой C. Здесь $yK(y) \geqslant 0$, $K(0) = 0$, $C = C_0 + C_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + C_2$; C_0 — часть границы, лежащая в области $y > 0$, — простая дуга, пересекающая прямую $y = 0$ в точках A и B; $x\,dy - y\,dx > 0$ на C_0 (в направлении часовой стрелки); C_1 и C_2 — примыкающие к C_0 дуги, лежащие в области $y < 0$, для которых выполняются условия: $0 > dy/dx > -(-K)^{1/2}$ на C_1, $0 \leqslant dy/dx \leqslant (-K)^{-1/2}$ на C_2; γ_1 и γ_2 — характеристики (1), выходящие из начала координат O (в области $y < 0$).

Рассматривается решение (1), имеющее непрерывные производные u_x, u_y в замыкании D, исключая точки O, A, B, в окрестности которых

$u_x(P) = O(|\overline{OP}|^{-1+\omega})$, $u_y(P) = O(|\overline{OP}|)^{-1+\omega}$, $0 < \omega \leqslant 1$, при $P \to O$; $u_x(P) = O(|\overline{AP}|^{-1+\alpha})$, $u_y(P) = O(|\overline{AP}|^{-1+\alpha})$, $0 < \alpha \leqslant 1$, при $P \to A$.

Если при этом $0 < \alpha < 1/2$, то $u_{xx} = O(|\overline{AP}|^{-2+\alpha})$, $u_{xy} = O(|\overline{AP}|^{-2+\alpha})$, $x(A) - x < A_1 y^{\alpha_1}$, где $(x, y) \in C_0$, $\alpha_1 > 1 - \alpha$, α_1 и A — постоянные (в B условия аналогичные).

В указанных предположениях справедлива теорема: Если u есть решение (1), $u = 0$ на $C_0 + C_1 + C_2$, то $u = 0$ в D. И. Н. Яненко

2222. Построение решения задачи Коши для одной системы уравнений с частными производными. Масленникова В. Н., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 4, 685—688

Дается явное решение задачи Коши для системы уравнений

$$\partial v_x/\partial t = v_y - \partial p/\partial x + F_x; \quad \partial v_y/\partial t = -v_x - \partial p/\partial y + F_y;$$
$$\partial v_z/\partial t = -\partial p/\partial z + F_z; \tag{1}$$
$$\alpha^2 \partial p/\partial t = -\partial v_x/\partial x - \partial v_y/\partial y - \partial v_z/\partial z + \psi.$$

Каждая из четырех искомых функций удовлетворяет уравнению

$$Lp \equiv \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \alpha^4 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = f(x, y, z, t). \tag{2}$$

Задача Коши для (1), (2) поставлена равномерно корректно в смысле И. Г. Петровского. Фундаментальные решения для (1) строятся при помощи функции Φ по формулам

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \left(\operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \mathbf{k}\right) + \mathbf{k}(\operatorname{grad} \Phi \cdot \mathbf{k}),$$

$$p = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \text{ где } \mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}.$$

Функция Φ является специальным частным решением уравнения $L\Phi = 0$ и выражается через бесселеву функцию с нулевым индексом, ее производную и через интеграл от нее. Пользуясь фундаментальным решением и формулой Грина для системы (1), автор получает явное выражение решения задачи Коши для этой системы. В полученных формулах для решения используются главные значения интегралов по цилиндру и диаметру, введенные С. Л. Соболевым (РЖМат, 1955, 232). Таким же образом записывается формула, дающая решение задачи Коши для уравнения (2). В этом случае все интегралы, входящие в формулу, имеют обычный смысл. При $\alpha = 0$ система (1) и уравнение (2) переходят в систему и уравнение, задача Коши для которых была решена С. Л. Соболевым (РЖМат, 1955, 232). Доказательства не приводятся. С. А. Гальперн

2223. О смешанных задачах для одной системы уравнений математической физики. Масленникова В. Н., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 5, 885—888

Рассматривается система (1) и уравнение (2) (реф. 2222). Для уравнения (2) решаются смешанные задачи с начальными условиями: $\partial^k p / \partial t^k = 0$; $k = 1, 2, 3$ и одном из двух граничных условий: либо $p|_S = 0$, либо

$$L_1 p|_S = \left[\frac{\partial p}{\partial z} \cos nz + \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial n} - \frac{\partial^3 p}{\partial x \partial t} \cos ny + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 p}{\partial y \partial t} \cos nx \right]_S = 0,$$

где S — достаточно гладкая поверхность, ограничивающая область Ω. Решения понимаются как обобщенные решения, удовлетворяющие соответствующим интегральным соотношениям. Указанные две смешанные задачи: имеют единственное обобщенное решение, если существует такое $\lambda_1 > 0$, что правая часть уравнения (2) удовлетворяет условию: $\int_0^\infty \iiint_\Omega f^2 e^{-2\lambda_1 t} d\Omega dt < \infty$. Для системы (1) ставятся следующие смешанные задачи: задаются начальные условия $v_x|_{t=0} = v_x^0(x, y, z)$; $v_y|_{t=0} = v_y^0(x, y, z)$, $v_z|_{t=0} = v_z^0(x, y, z)$ и одно из двух граничных условий: либо $p|_S = 0$, либо $v_n|_S = 0$. Обе смешанные задачи решаются сведением их к соответствующим смешанным задачам для уравнения (2). Доказательства не приводятся. С. А. Гальперн

2224. О спектре смешанной задачи для одной системы типа Соболева. Александрян Р. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 240—241

Изучается задача, поставленная С. Л. Соболевым:

$$\partial^2 v_x / \partial x^2 = -v_x + \partial P / \partial x,\ \partial^2 v_y / \partial t^2 = \partial P / \partial y,\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$
$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^{(0)}(x, y),\ \partial \mathbf{v} / \partial t|_{t=0} = \mathbf{v}^{(1)}(x, y),\ P|_\Gamma = 0,$$

где (x, y) изменяется в некоторой выпуклой области D со сколь угодно гладкой границей Γ. Пусть Ω — линейное многообразие гладких соленоидальных векторов в D, $H = \overline{\Omega}$. Определяется скалярное произведение в Ω:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \iint_{(D)} (v_x \overline{w}_x + v_y \overline{w}_y)\, dxdy.$$

Задача эквивалентна отысканию траектории $\mathbf{v}(x, y, t)$ в H, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = A\mathbf{v},\ |_{t=0} = \mathbf{v}^{(0)}(x, y),\ \left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{v}^{(1)}(x, y),$$

где $A = (-E + \operatorname{grad} \Delta^{-1} \partial / \partial x) I$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, Δ^{-1} — оператор, обратный оператору Лапласа при нулевых граничных условиях. Формулируются теоремы:

1. Оператор A — ограниченный и самосопряженный; для $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1$ имеет место неравенство $-1 \leqslant (A\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leqslant 0$.

2. Решение задачи Соболева существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных в смысле сходимости в H. Это решение дается формулой

$$\mathbf{v}(x, y; t) = \cos \sqrt{-A}\, t \mathbf{v}^{(0)}(x, y) + t^{-1} \sin \sqrt{-A}\, t \mathbf{v}^{(1)}(x, y).$$

Приводятся некоторые результаты о спектре $S(A)$ оператора A. В частности, утверждается, что $S(A) = [-1, 0]$ независимо от области D. Б. М. Левитан

2225. О разложении по собственным функциям оператора Шредингера в случае неограниченно растущего потенциала. Левитан Б. М., Докл. АН СССР, 1955, 103, № 2, 191—194

Изучается сходимость разложения по собственным функциям $\omega_n(x)$ уравнения

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\} u = 0$$

во всем пространстве; $q(x) \to +\infty$ при $r = |x| \to \infty$. Рассматривается разложение функций $f(x)$, которые не обязаны иметь интегрируемый квадрат. Предполагается лишь, что $|f(x)| < Cr^n$. Задача имеет смысл, потому что функции $\omega_n(x)$ в изучаемом случае убывают быстрее любой экспоненты $e^{-\alpha r}$.

Установлено, что при достаточно высоком порядке усреднения s имеет место сходимость усредненных сумм ряда Фурье к $f(x)$ в каждой точке непрерывности $f(x)$:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Sigma_{\lambda_n < \lambda} (1 - \lambda_n / \lambda)^s f_n \omega_n(x) = f(x).$$

Здесь $f_n = \int f(x) \omega_n(x)\, dx$, λ_n — собственные значения, отвечающие $\omega_n(x)$. Показатель s довольно сложно зависит от скорости роста $q(x)$ и $f(x)$. Например, если $q(x_1, x_2, x_3) \sim r^k$ и $f(x_1, x_2, x_3) \sim r^l$, то можно взять $s > \frac{2l+6}{k} + \frac{5}{2}$. Методы автора пригодны для любого числа независимых переменных. Э. Э. Шноль

2226. Об одном типе задач о собственных значениях для некоторых эллиптических дифференциальных операторов. Эрлинг (On a type of eigenvalue problems for certain elliptic differential operators. Ehrling Gunnar), Math. scand., 1954, 2, № 2, 267—285 (англ.)

Дальнейшее обобщение исследования Фридрихса (Friedrichs, Math. Ann., 1928, 98, 206—247) колебаний упругой пластинки на случай квадратичных дифференциальных форм (заменяющих плотность потенциальной энергии) любого порядка с переменными коэффициентами. Работа по методам примыкает к статьям Гординга (РЖМат, 1954, 2958; 1955, 1238), где область произвольна, но краевые условия имеют более специальный вид.

Рассматривается конечная область D пространства $x = (x_1, \ldots, x_n)$, на границу S которой наложен ряд ограничений; для областей специального вида, встречающихся в приложениях, существенно лишь следующее: каждая точка S гранична и для $D + S$, причем каждой такой точки можно коснуться вершиной содержащегося в D конуса фиксированного размера. Пусть

$$|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n,\ D^\nu f = \partial^{|\nu|} f / \partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n},$$
$$N^k(f, g) = \int_D (\Sigma_{|\nu|=k} D^\nu f D^\nu \overline{g})\, dx;\ (f, g \in H),\ N_t^k = N^k + tN^0.$$

где H — совокупность комплексных функций, у которых производные всех порядков непрерывно продолжимы на $D + S$. В основе работы лежат неравенства

$$N^k(f, f) = O(t^{-1+k/m}) N_t^m(f, f) \quad (0 \leqslant k \leqslant m),$$
$$\int_{S_j} |D^\nu f(x)|^2\, dS_j = O(t^{-1+(n-j+2|\nu|)/2m}),\ n - j + 2|\nu| < 2m,$$

где S_j — достаточно правильное j-мерное $(0 \leqslant j < n)$ подмногообразие $D + S$, а все оценки O не зависят от f.

Пусть в H дана форма (аналог потенциальной энергии)

$$V(f, g) = \int_D \sum_{|\mu|=m, |\nu|=m} a_{\mu\nu}(x) D^\mu f D^\nu \overline{g}\, dx \quad (m > 0),$$

где матрица $\| a_{\mu\nu}(x) \|$ эрмитовая, ограниченная и равномерно положительно определенная в D, причем

$$|a_{\mu\nu}(y) - a_{\mu\nu}(x)| \leqslant C_y |y - x|^{\alpha_y} \quad (x, y \in D),$$

C_y и α_y зависят только от y. В H дана еще билинейная форма $R(f, g)$, для которой $|R(f, g)|^2 = o(1) V_t(f, f) V_t(g, g)$ при $t \to \infty$, причем o не зависит от f и g. Пусть D^* — открытое подмножество D и меры D^*

и D равны. Обозначим через $\mathfrak{H}$ замыкание по норме N_1^m совокупности функций $f \in H$, для которых на $D+S-D^*$ имеет место линейное условие, например $\Sigma_{|\nu|\leqslant m-1} c_\nu(x) D^\nu f(x) = 0$. Пусть далее $U = V + R$, $U_t = U + tN^0$. Тогда собственная функция $\varphi \in \mathfrak{H}$ и соответствующее собственное значение λ определяются равенством $U(\varphi, h) = \lambda N^0(\varphi, h)$ (для всех $h \in \mathfrak{H}$).

Для достаточно больших t уравнение $(f, h) = U_t(G_t f, h)$ $(h, G_t f \in \mathfrak{H}, f \in L_2(D))$ определяет ограниченный линейный оператор G_t, свойства которого изучаются; при $2m > n$ (что предполагается впредь) он является интегральным с ядром — функцией Грина $g_t(x, y)$. Для случая постоянных $a_{\mu\nu}$ при помощи преобразования Фурье получается фундаментальное решение, из изучения свойств которого вытекает асимптотическая формула $\lim_{t\to\infty} t^{1-\sigma} g_t(x, y) = \delta_{xy}(2\pi)^{-n}\Gamma(1+\sigma)\Gamma(1-\sigma)V_y$, где $\sigma = n/2m$, $\delta_{xy} = 0$ $(x \neq y)$, $\delta_{xx} = 1$, по крайней мере одна из точек x, y принадлежит D^*, V_y — объем множества $\Sigma_{|\mu|=m,\,|\nu|=m} a_{\mu\nu}(y)\,\xi_1^{\mu_1+\nu_1}\ldots\xi_n^{\mu_n+\nu_n} < 1$. Отсюда выводится, что если форма R эрмитова, а $\{\varphi_i\}$ — полная система собственных функций, ортонормированных по норме N^0, причем $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, то число собственных значений, меньших t, асимптотично выражению $t^\sigma(2\pi)^{-n}\int_D V_y d_y$, а $\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_1^N \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} = \delta_{xy} V_y [\int_D V_y d_y]^{-1}$. А. Д. Мышкис

2227. О задаче Дирихле. Хитотумату (Note on the Dirichlet problem. Hitotumatu Sin), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1953, **2**, № 1, 13—21 (англ.)

При помощи понятий и метода, развитых в работе Картана (Cartan H., Ann. Univ. Grenoble, 1946, 22, 221—280). Доказывается теорема: пусть A — ограниченное, нигде не плотное множество в R_n $(n \geqslant 3$, A не обязательно борелево), $f(x)$ определена и непрерывна на замыкании A. Тогда существует (вообще говоря, не единственная) функция $F^e(x)$ или F^i), которая гармонична вне A и $F^e(p) \to f(q)$ $(F^i(p) \to f(q))$, когда p стремится к внешней (или внутренней) регулярной точке $q \in A$. Автор замечает, что в общем случае естественнее считать граничные значения в задаче Дирихле распределениями Шварца, сосредоточенными на границе области. Решаются задачи Дирихле и Неймана для круга с распределениями в качестве граничных значений. Пусть T_0 — распределение с несущим множеством на окружности $z = e^{i\theta}$. Распределение типа гармонической функции

$$G(r, \theta) = T_t[(1-r^2)/2\pi(1-2r\cos(\theta - t) + r^2)],$$

(θ — переменное, r — параметр), дает решение задачи Дирихле для единичного круга, сходящееся как распределение при $r \to 1$ к распределению T_θ. Доказывается единственность полученного решения. Я. И. Житомирский

2228. Теорема существования для n-емкостей. Брело (Existence theorem for n-capacities. Brelot M.), Ann. Inst. Fourier, 1953/1954 (1955), **5**, 297—304 (англ.)

Работа опирается на определения и результаты статьи автора и Шоке (Brelot M., Choquet G., Ann. Inst. Fourier, 1952 (1954), **4**, 199—263). Доказано, что в любом пространстве Грина $\mathcal{E}_0$ при произвольных натуральном N и положительном ε существует N попарно непересекающихся компактных множеств (достаточно простой структуры) емкости 1, для которых емкость объединения отличается от N меньше, чем на ε. Доказательство опирается на лемму о существовании у компактного множества компактного подмножества любой меньшей емкости и на следующую основную лемму. Пусть даны возрастающая последовательность областей $\{\Omega_n\}$ с компактными замыканиями, сходящаяся к $\mathcal{E}_0$, точка $P \in \mathcal{E}_0$ и число $\lambda > 0$. Обозначим через $\overline{D}_p^\lambda$ множество точек, в которых функция Грина $G_p \geqslant \lambda$, через $\overline{\Omega}_n$ — замыкание Ω_n и через $\overset{*}{\Omega}_n$ — границу Ω_n. Тогда при $n \to \infty$ емкость множества $\overline{D}_p^\lambda \cap \overset{*}{\Omega}_n$ стремится к нулю, а емкость множества $\overline{D}_p^\lambda \cap \overline{\Omega}_n$ — к $1/\lambda$. А. Д. Мышкис

2229. Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве $W_2^{(m)}$. Дезин А. А., Докл. АН СССР, 1954, **99**, № 5, 901—903

$$H(u) = D(u) + 2\rho(u), D(u) = \int_\Omega \sum_{(i)} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\right)^2 d\Omega$$

$\rho(u)$ — линейный функционал на $W_2^{(m)}$, обращающийся в нуль на всех многочленах степени $\leqslant m-1$ и на всех функциях $u^0 \in W_2^{(m)}(0)$ (т. е. обращающихся в нуль на границе S области Ω вместе с производными до порядка $m-1$). Под решением второй краевой задачи для уравнения $\Delta^m u = 0$ понимается функция u, реализующая минимум функционала $H(u)$. Утверждается существование такого решения.

Для $m = 2$ и $\rho(\xi) = -\int_S \xi\varphi_1 dS - \int_S (\partial\xi/\partial n)\varphi_2 dS$ сформулированные выше условия на $\rho(\xi)$ выполняются тогда и только тогда, когда $\int_S \varphi_1 dS = 0$ и $\int_S (x_i\varphi_1 + \cos(nx_i)\varphi_2) dS = 0$ (φ_1 и φ_2 играют роль граничных значений второй краевой задачи), и, значит, только при таких граничных функциях φ_1 и φ_2 вторая краевая задача имеет решение. Отметим, что в случае решения u, гладкого вплоть до границы S, $\varphi_1 = A_1(u)$, $\varphi_2 = A_2(u)$, где $A_1(u)$ — дифференциальный оператор 3-го порядка, а $A_2(u)$ — 2-го порядка. М. И. Вишик

2230. Собственные значения и собственные функции 2-й краевой задачи для уравнения $\Delta^{(m)}u + \lambda u = 0$. Зайдман (Asupra valorilor şi funcţiilor proprii ale ecuaţiei: $\Delta^{(m)}u + \lambda u = 0$, pentru a doua problemă la limită. Zaidman S.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 1, 79—85 (рум.; резюме франц., русс.)

Для указанного уравнения определяется 2-я краевая задача (в обобщенном смысле) по аналогии со 2-й краевой задачей, определенной референтом для уравнения $\Delta^m u = 0$ (реф. 2229). При помощи методов, развитых С. Л. Соболевым (некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ленинград, 1950) для уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, доказывается существование бесконечного числа собственных функций и собственных значений, отвечающих задаче. Множество собственных функций плотно в L_2. А. А. Дезин

2231. Интерпретация некоторых функций оператора Лапласа. Гриффит (On the interpretation of certain Laplacian operator functions. Griffith J. L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1953, **87**, № 2, 51—62 (англ.)

Рассматриваются выражения

$$\left[\frac{\sin z\nabla}{\nabla} w(x, y)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{zsw(x - is\cos\varphi,\, y - is\sin\varphi)} \frac{}{(z^2 - s^2)^{1/2}} ds d\varphi,$$

$$J_0(z\nabla) w(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(x - iz\cos\varphi,\ y - iz\sin\varphi)\, d\varphi,$$

где $\nabla^2 w(x, y) = \partial^2 w(x, y)/\partial x^2 + \partial^2 w(x, y)/\partial y^2$. При помощи преобразования Фурье доказывается, например, что если существует

$$F_2(w(x, y)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi x+\eta y)} w(x, y)\, dx\, dy$$

и существует $\left[\dfrac{\sin h\, z\nabla}{\nabla} w(x, y)\right]$, то

$$\left[\frac{\sin h\, z\nabla}{\nabla} w(x, y)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_A\int \frac{w(x-x_1, y-y_2)}{(z^2-x_1^2-y_1^2)^{1/2}}\, dx_1\, dy_1,$$

где $z>0$, A находится внутри круга радиуса z с центром в начале координат. Далее находится интегральное представление $[\operatorname{ch} z\nabla\, w(x, y)]$ и т. п. В. В. Немыцкий

2232. Линейные граничные задачи обобщенных аналитических функций. Уманов Н. К., Изв. АН ЛатвССР, 1953, № 8, 115—121

Функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$, где u, v — решения линейной системы дифференциальных уравнений эллиптического типа

$$u_x - v_y = pu + qv + \alpha, \quad u_y + v_x = lu + kv + \beta \qquad (1)$$

с аналитическими коэффициентами p, q, l, k, α, β, автор называет обобщенными аналитическими функциями. Рассматривается краевая задача вида

$$A(s)\, u(s) + B(s)\, v(s) = C(s). \qquad (2)$$

Пользуясь интегральными представлениями функций u, v через аналитические функции, получаемыми при решении системы (1) методом последовательных приближений, автор сводит краевую задачу (2) сначала к краевой задаче для аналитических функций, затем при помощи представления аналитической функции интегралом типа Коши с вещественной плотностью (см. Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948) эта краевая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению. Делаются некоторые заключения о разрешимости задачи.

Примечание референта. Результаты автора могут быть получены как частный случай из результатов И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952, **31**, № 2, 218—314). В работе большое число опечаток, связанных с тем, что одни и те же функции обозначаются то большими буквами, то малыми. Ф. Д. Гахов

2233. О задаче Дирихле для шара. Фенье (Über das Dirichletsche Problem bezüglich der Kugel. Fenyö Stefan), Publs mathematical, 1953, **3**, № 1—2, 71—80 (нем.)

Доказываются вспомогательные предложения (в частности, касающиеся свойств потенциала простого слоя), а затем дается необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Дирихле для трехмерного шара в виде потенциала простого слоя. Условие это состоит в сходимости некоторого числового ряда, содержащего коэффициенты Фурье по поверхностным шаровым функциям; в случае сходимости ряда искомая плотность потенциала дается в виде ряда по шаровым функциям. Отмечается, что задачу для многомерных шаров можно решить этим же путем. Г. Ф. Манджавидзе

2234. О вариационном методе Треффтца для уравнения $\Delta^2 u = f$. Бирман М. Ш., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 2, 201—204

В ограниченной плоской области Ω с гладким контуром Γ рассматривается уравнение $\Delta^2 u = f$. Граничные условия имеют вид

$$u|_{S_1} = 0; \quad \partial u/\partial n|_{S_2} = 0; \qquad (1)$$

$$\partial\Delta u/\partial n|_{L_1} = b_{11} u|_{L_1} - b_{21}\, \partial u/\partial n|_{L_2};$$

$$\Delta u|_{L_2} = b_{12} u|_{L_1} - b_{22}\, \partial u/\partial n|_{L_2} = 0 \qquad (2)$$

($L_1 + S_1 = L_2 + S_2 = \Gamma$; $B = \{b_{ij}\}$ — самосопряженный оператор в соответствующем пространстве). Излагается принцип, позволяющий строить для указанных граничных задач методы, аналогичные методу Треффтца (Trefftz E., Verh. Kongress für technische Mechanik, Zürich, 1926, 131—137; Math. Ann., 1928, **100**, 503—521); существенно, что в качестве функций сравнения берутся функции, удовлетворяющие лишь дифференциальному уравнению.

Рассматривается $Q[u, v] = \int_\Omega v\Delta^2 u\, d\Omega$, где u, v удовлетворяют (1), (2). Пусть $Q[u, u] > 0$ при $u \neq 0$. Известно, что решение u_0 изучаемой задачи реализует минимум функционала $A(u) = Q[u, u] - 2\int_\Omega uf\, d\Omega$, заданного на любых достаточно гладких функциях, удовлетворяющих (1); при этом

$$A(u_0) = -Q[u_0, u_0]. \qquad (3)$$

Автор строит для данной задачи вспомогательный квадратичный функционал $E(w)$, для которого справедлива теорема: Среди решений w уравнения (1) наименьшее значение функционалу $E(w)$ сообщает решение u_0. Минимизирующая последовательность сходится к u_0 в метрике функционала $E(w)$,

$$E(u_0) = Q[u_0, u_0]. \qquad (4)$$

Функционал $E(w)$ можно строить не единственным способом. Из (3) и (4) получается двусторонняя оценка для $A(u_0)$. Показывается, как строятся функционалы $E(w)$ для случая заделанной, свободно опертой и свободной пластинок. Работа является продолжением предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 1852).

З. Х. Рафальсон

2235. Нелинейная задача о стационарной температуре. Манн, Блэкберн (A nonlinear steady state temperature problem. Mann W. Robert, Blackburn Jacob F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 6, 979—986 (англ.)

Исследуется нелинейная краевая задача:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \text{ при } 0 < x < \pi,\ 0 < y < \infty,$$

$$U(0, y) = U(\pi, y) = 0 \text{ при } 0 \leqslant y < \infty, \qquad (1)$$

$$U_y(x, 0) = -G[U(x, 0)] \text{ при } 0 < x < \pi,$$

$|U(x, y)| < M$ для $0 < x < \pi$, $0 < y < \infty$, для некоторого M. Предполагается, что $U(x, y)$ и $U_y(x, y)$ непрерывны для $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y < \infty$; U_{xx} и U_{yy} — непрерывные и ограниченные функции x для каждого $y > 0$, $G(U)$ — непрерывная убывающая функция, $G(1) = 0$. Доказывается, что решение задачи (1) выражается формулой

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \log\left[\frac{1-2e^{-y}\cos(x+\lambda)+e^{-2y}}{1-2e^{-y}\cos(x-\lambda)+e^{-2y}}\right] G[U(\lambda, 0)]\, d\lambda,$$

причем $0 \leqslant U(x, y) \leqslant 1$. Здесь $U(x, 0) = f(x)$ есть решение уравнения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \log\left[\frac{1-\cos(x+\lambda)}{1-\cos(x-\lambda)}\right] G[f(\lambda)]\, d\lambda. \qquad (2)$$

Доказывается, что уравнение (2) имеет единственное ограниченное решение $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, причем $f(x)$ непрерывна и $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

При доказательстве используется принцип неподвижной точки Шаудера (см. Успехи матем. наук, 1936, 1, 141—174). Утверждается, что задача (1) равносильна нахождению ограниченных решений уравнений (2).

Опечатки: на стр. 981, строка 2 сверху, вместо $\frac{1}{2}\log$

должно быть $-\frac{1}{2}\log$; на стр. 982, строка 15 сверху, вместо Σ должно быть $\frac{2}{\pi}\Sigma$. О. Женхэн

2236. Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка. Александров А. Д., Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 8, 3—17

Рассматриваются эллиптические уравнения вида

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, z_1, \ldots, z_n, z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nn}) = 0, \quad (1)$$

где x_i — независимые переменные, z — неизвестная функция, $z_i = \partial z / \partial x_i$, $z_{ik} = \partial^2 z / \partial x_i \partial x_k$. Уравнение (1) называется эллиптично выпуклым, если для любых двух его решений u и v, для которых уравнение $F = 0$ эллиптично, во всех точках, где $u = v$ и $u_i = v_i$, оно эллиптично также для всякой функции $z = (1-t)u + tv$ при $0 < t < 1$.

Основная теорема: Эллиптично выпуклое уравнение (1) не может иметь двух различных решений, для которых (1) эллиптично и разность которых имела бы внутри области G минимум или максимум, равный нулю. Как следствие получается ряд теорем о максимуме и минимуме для решений линейных эллиптических уравнений, а также для эллиптично выпуклых уравнений вида (1). Указан ряд достаточных условий единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1). В частности, при помощи основной теоремы получено утверждение: Пусть (1) эллиптично выпукло и имеет в G решение $u(X)$ и монотонную совокупность решений $u(X; \lambda)$, для которых (1) эллиптично, причем $u(X, 0) = u(X)$ и при $\lambda \to \pm\infty$ $u(X, \lambda) \to \pm\infty$ для всех X из G. Тогда (1) не допускает, помимо $u(X)$, никакого другого решения, для которого оно эллиптично и которое принимает те же значения на границе G. Указывается на возможность применения полученных результатов к задачам теории поверхностей.

Примечание референта. Лемма 1а нуждается в некотором уточнении. Легко привести примеры функций, для которых выполнены все условия леммы 1а и не выполнены неравенства (13) (например, $u(x, y) = e^{-x} + x - 1 + y^2$). Повидимому, лемма 1а будет верна, если в правые части неравенств (13) ввести постоянный положительный множитель, меньший единицы. При этом из леммы 1а будет следовать лемма 1 и основная теорема. О. А. Олейник

2237. Существенные особенности решений одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных с тремя аргументами. Берг ман (Essential singularities of solutions of a class of linear partial differential equations in three variables. Bergman Stefan), J. Rational. Mech. and Analysis, 1954, 3, № 5, 539—560 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} + F(x^2 + y^2 + z^2)\tilde{\varphi} = 0, \quad (1)$$

где $F(u)$ — целая функция. Как было показано автором ранее (Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, 461—507), каждое решение уравнения (1), регулярное в окрестности нуля, может быть представлено в виде

$$\varphi(X) = p_3(H(X)) = \\ = H(X) + \int_0^1 M(x^2 + y^2 + z^2, \sigma^2) H(X\sigma^2)\, d\sigma;$$

здесь $X = (x, Z, Z^*)$, $Z = \frac{1}{2}(z + iy)$, $Z^* = -\frac{1}{2}(z - iy)$, $M(\xi, \eta)$ — целая функция, $\varphi(X) = \tilde{\varphi}(x, y, z)$, $H(X)$ — некоторая гармоническая функция. Используя представление гармонических функций через функции двух комплексных аргументов, автор строит решения уравнения (1) с особенностями различного характера. Приведем один из результатов. Пусть некоторое решение (1) допускает в окрестности начала представление

$$\varphi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_3[Q_k(X)] + p_3[R_k(X)],$$

$$p_3[Q_k(X)] = \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+k,\, m} p_3\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} u^m \zeta^{k-1}\, d\zeta\right),$$

$$p_3[R_k(X)] = \sum_{m=0}^{\infty} S_{m-k,\, m} p_3\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} u^m \zeta^{-k-1} d\zeta\right);$$

$u = x + Z\zeta + Z^*\zeta^{-1}$, значения S_{n_1, n_2} при $|n_1 - n_2| > k$ несущественны; при достаточно больших n_1, n_2, $|n_1 - n_2|$ и некоторых постоянных k_1, k_2

$$\left|\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\, n_2!} S_{n_1, n_2}\right| \leqslant \left(\frac{ek_1}{n_1}\right)^{n_1/k_1} \left(\frac{ek_2}{n_2}\right)^{n_2/k_2};$$

$$l_p^{(k)} = \overline{\lim}_{m \to \infty} |D_{m,p}^{(k)}|^{1/m},$$

$$D_{m,p}^{(k)} = |S_{m+k+i+j,\, m+i+j}|_{i,j=1}^{p} \quad (p = 0, 1, \ldots).$$

Исследовано аналитическое продолжение $\varphi(X)$ в случаях: (I) $l_p^{(k)} = 0$ при $p \geqslant p_k$; (II) $l_{p+1}^{(k)} = \rho_k l_p^{(k)}$ при $p \geqslant p_k$; (III) $\sum_p (l_{p+1}^{(k)} / l_p^{(k)})^\gamma < \infty$ при $\gamma \geqslant 1$; (IV) $\lim_{p\to\infty} l_{p+1}^{(k)} / l_p^{(k)}$ существует и положителен. Например, в случае (I) можно подобрать полиномы $P_k(u)$ так, что $p_3[Q_k(X)]$ во всем пространстве представимо в виде

$$p_3[Q_k(X)] = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(k)} p_3[L_m(X)],$$

здесь $L_m(X)$ — алгебраические функции x, Z, Z^*, выражаемые через коэффициенты $P_k(u)$ и ζ — корни уравнения $P(x + Z\zeta + Z^*\zeta^{-1}) = 0$. Я. Б. Лопатинский

2238. О краевой задаче для некоторых дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Гусейнов М. Г., Тр. Азербайдж. ун-та, сер. физ.-матем., 1954, № 4, 61—73

Рассматривается первая краевая задача для уравнений

$$\Delta^2 U = f(x, y, z, U, \Delta U), \quad \Delta^2 U = f(x, y, z, U, W_1, \ldots, W_N),$$

где $\Delta^2 U$ — бигармоническая дифференциальная форма,

$$W_i = W_i(x, y, z) = \int_\omega K_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta(U))\, d\tau,$$

ω — сфера, на которой задаются однородные краевые условия: $U = 0$, $dU/dn = 0$. При помощи функции Грина решение задачи сводится к решению соответственно интегрального и интегро-дифференциального уравнений. Доказательство существования и единственности решения этих уравнений проводится на основе принципа сжатых отображений. Автор недостаточно четко указывает ограничения, налагаемые на заданные функции, в частности на функции, участвующие в неравенстве Липшица для $f(x, y, z, U, W_1, \ldots, W_N)$; предположения о функциях $B(P)$ и $\zeta(U)$ вообще не указываются; не отмечается, что теоремы автора для дифференциальных уравнений являются частными случаями теорем Я. Б. Лопатинского (РЖМат, 1955, 3205) и М. И. Вишика (Матем. сб., 1951, 29, № 3, 615—675). Н. И. Симонов

2239. Существование и единственность дозвукового обтекания заданного профиля. Берс (Existence and uniqueness of a subsonic flow past a given profile. Bers Lipman), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 3, 441—504 (англ.)

Автор предлагает доказательство для течений, в которых максимальная скорость может быть сколь угодно близка к скорости звука, в отличие от доказательства М. В. Келдыша и референта, в котором предполагалось, что скорость набегающего потока достаточно мала (Изв. АН СССР, сер. матем., 1934, 12, № 4, 561—607). При этом используются результаты С. Н. Бернштейна по уравнениям эллиптического типа (Сообщ. и протоколы засед. матем. об-ва Харьковск. ун-та, 1915—1917, 15, 38—45) и теория квазиконформных отображений.
Ф. И. Франкль

2240. Теоремы типа теоремы Лиувилля для параболических и эллиптических систем. Эйдельман С. Д., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 5, 681—684

Относительно решений параболической системы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Phi^{(2b)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U, \quad U = \begin{vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

$$\Phi^{(2b)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \sum_{k_1+\ldots+k_n=2b} a_{ij}^{(k_1\ldots k_n)} \frac{\partial^{2b}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \right\|,$$

$a_{ij}^{(k)} = \text{const}$, утверждается следующая теорема: Всякое регулярное в полупространстве $t \leqslant T$ решение параболической системы (1), удовлетворяющее неравенству

$$|U(x,t)| \leqslant M\left[\left(\sum_{s=1}^{n} x_s^2\right)^{\alpha/2} + 1\right](T+1-t)^{\rho}, \alpha, M > 0, \qquad (2)$$

является системой полиномов степени $[\alpha]$ по $x_1, \ldots, x_n$ и степени $\min([\beta], [\alpha/2b])$ по t. Если $\alpha < 1$, то U — постоянный вектор. Отсюда выводится, что аналогичное положение имеет место и для решений эллиптических систем с вещественными постоянными коэффициентами, содержащих лишь старшие производные. Далее приводятся теоремы, усиливающие вышеуказанную теорему для некоторых более частных систем.

Примечание референта. В формулировке теоремы 1 имеется неточность. Мы привели здесь исправленный вариант теоремы 1, сообщенный нам автором.
О. А. Ладыженская

2241. Обобщение решения параболических и эллиптических систем дифференциальных уравнений. Слободецкий Л. Н., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 6, 997—1000

При помощи фундаментальных матриц, построенных референтом (РЖМат, 1955, 5040), и оценок, там же для них полученных, изучаются обобщенные в смысле С. Л. Соболева (РЖМат, 1955, 5821 К) решения параболической системы

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{r=0}^{2n} \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} A^{(i_1,\ldots,i_r)} \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1},\ldots,\partial x_{i_r}} = f(t,x) \qquad (1)$$

и тех эллиптических систем, которые получаются из (1), если коэффициенты не зависят от t и отсутствует $\partial u/\partial t$.

Пусть Q — цилиндр $\Omega \times [0, T]$, где Ω — некоторая область пространства $x_1, \ldots, x_n$; вводится пространство $N_q(Q)$ $(q \geqslant 1)$ вектор-функций $f(t, x)$, удовлетворяющих условиям: 1) $f(t, x) \in L_q(\Omega)$ почти при всех $t \in [0, T]$, 2) функция $\varphi(t) = \| f(t, x) \|_{L_q(\Omega)}$ суммируема по $[0, T]$,

$$\|f(t,x)\|_{N_q(Q)} = \int_0^T \|f(t,x)\|_{L_q(\Omega)}\, dt.$$

Теорема 1. Линеал $M_q(Q)$, состоящий из обобщенных решений однородной системы (1), является подпространством $L_q(Q)$. Оно состоит из вектор-функций $u_0(t, x)$, имеющих внутри Q непрерывные производные всех порядков, входящих в (1), и, следовательно, являющихся внутри Q регулярными решениями системы (1). Сходимость последовательности $u_0^{(m)}(t, x)$ в $M_q(Q)$ влечет за собой равномерную сходимость $u_0^{(m)}(t, x)$ и всех производных $u_0^{(m)}(t, x)$, входящих в (1), во всякой замкнутой и ограниченной подобласти Q.

Теорема 2. Пусть $f(t, x) \in N_q(Q)$. Для того чтобы $u(t, x)$ было обобщенным решением (1) из $L_q(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление

$$u(t,x) = u_0(t,x) + \int_0^t ds \iint_{\Omega} G(t,x,s,y) f(s,y)\, dy, \qquad (2)$$

где $u_0(t, x) \in M_q(Q)$, а $G(t, x, s, y)$ — фундаментальная матрица системы (1) ($f(t, x) \equiv 0$).

Далее приводятся теоремы, дающие условия существования обычных и обобщенных производных у второго слагаемого в формуле (2), называемого автором параболическим потенциалом, и даются оценки норм этих производных. Формула (2) позволяет перенести эти результаты на обобщенные решения системы (1). Все результаты непосредственно переносятся на описанные в начале реферата эллиптические системы.
С. Д. Эйдельман

2242. О характеристическом свойстве среднего поликалорических функций. Николеску (Asupra unor proprietăţi caracteristice de medie ale funcţiilor policalorice. Nicolescu Miron), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1954, 4, № 11—12, 551—554 (рум.; резюме русс., франц.)

Утверждается, что для решений уравнения

$$(\partial^2/\partial x^2 - \partial/\partial t)^p u = 0, \; p \geqslant 1, \qquad (1)$$

справедливы теоремы:

1. Для любой функции $u(x, t)$, удовлетворяющей в полосе $0 < t \leqslant t_0$ уравнению (1) и такой, что $|u(x,t)|\, e^{-x^2/4t_0}$ ограничено в этой полосе, справедливо соотношение,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2/3 & \ldots & 2/(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (2/3)^{p-1} & \ldots & (2/(p+1))^{p-1} \end{vmatrix} u(x,t) = \qquad (2)$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_0(u;h) & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1(u;h) & 2/3 & \ldots & 2/(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{p-1}(u;h) & (2/3)^{p-1} & \ldots & (2/(p+1))^{p-1} \end{vmatrix},$$

$$\mu_0(u;h) = (2\sqrt{\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h^{-1/2} u(\xi, t-h)\, e^{-(\xi-x)^2/4h}\, d\xi,$$

$$\mu_s(u;h) = 2h^{-2} \int_0^h \tau \mu_{s-1}(u;\tau)\, d\tau, \quad s = 1, 2, \ldots$$

2 (Обратная теорема). Любая функция $u(x, t)$, интегрируемая в смысле Лебега в полосе $[0, t_0]$, удовлетворяющая во всей внутренней полосе $[t-h, t]$, где $t \in (0, t_0]$, интегральному соотношению (2), является правильным решением уравнения (1) в полосе $0 < t \leqslant t_0$.
О. А. Ладыженская

2243. Фундаментальное решение параболического уравнения в дифференцируемом многообразии. II. Ито (The fundamental solution on the parabolic equation in a differentiable manifold, II. Itô Seizô), Osaka Math. J., 1954, 6, № 2, 167—185 (англ.)

Продолжение статьи под тем же заглавием (РЖМат, 1954, 4426), причем вначале автор приводит исправления

к первой части и следующее уточнение одного из результатов: всегда

$$u(t, x; s, y) \geqslant 0, \int_M u(t,x; s, y)\, d_a y \leqslant \exp\left((t-s)\sup c\right).$$

Здесь порядок гладкости многообразия M повышается до 4; предполагается, что в M задана область G с компактным замыканием, граница B которой состоит из конечного числа m — 1-мерных поверхностей того же порядка гладкости. Изучаемые функции определены в $(s_0, t_0) \times \bar{G}$; на B ставится граничное условие

$$\alpha(t, \xi) f + \{1 - \alpha(t, \xi)\}\, \partial f / \partial n = 0 \qquad (1)$$
$$(s_0 < t < t_0,\ \xi \in B;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1),$$

где $\alpha(t, \xi)$ — заданная функция, а $\partial / \partial n$ — инвариантным образом определенная производная по внешней конормали. Коэффициенты a^{ij}, b^i, c и α предполагаются удовлетворяющими определенным условиям гладкости, причем всюду на $[s_0, t_0] \times B$, где $\alpha(t, \xi) \neq 1$, должно быть $\partial a^{ij} / \partial n = 0$, $b^i \sqrt{a} = \partial(\sqrt{a}\, a^{ij}) / \partial x^j$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. В этих предположениях дано определение фундаментального решения уравнения $Lf = 0$ при условии (1), а также фундаментального решения сопряженного уравнения при том же граничном условии; доказано существование единственного фундаментального решения и получены некоторые его основные свойства. При этом все формулировки совершенно аналогичны тем, которые содержатся в первой части, и отличаются лишь тем, что от участвующих функций требуется удовлетворение граничного условия (1). Как и ранее, в основе исследования лежит построение «параметрикса».

А. Д. Мышкис

2244. **Новое уравнение телеграфистов. Василаке Сердж иу,** Ж. матем. и физ. Акад. РНР, 1954, **3**, 35—53

Новое уравнение телеграфистов. Василаке (Sur une nouvelle équation des telegraphistes. Vasilache Sergiiu), Rev. Math. ethys. (Bucuresti), 1954, **2**, 33—50 (франц.)

Рассматривается система телеграфных уравнений

$$\partial(Li)/\partial t + Ri = -\partial v/\partial z,\ \partial(Cv)/\partial t + gv = -\partial i/\partial z,$$

где R, g=const, $L = L_0(1 + m\cos\Omega t)$, $C = C_0(1 + n\cos\Omega t)$. Исследуются смешанные задачи: 1) задача для полуограниченной прямой при условиях $v(z, 0) = 0$, $i(z, 0) = 0$, $v(0, t) = E(t)$ $(t \geqslant 0)$; 2) задача для отрезка при условиях $v(z, 0) = 0$, $i(z, 0) = 0$, $v(0, t) = f(t)$, $v(l, t) = Zi(l, t)$ $(t \geqslant 0)$. Рассматриваются еще задачи для отрезка при условии $v(l, t) = 0$ или $i(l, t) = 0$ на правом конце отрезка.

Примечание референта. Имеются ошибки, например ошибочно приведение условия $v(l, t) = Zi(l, t)$ к виду $v(l, t) = F(t)$.

Н. А. Бразма

2245. **О решении граничных задач для уравнений параболического типа методом потенциалов. Зе ра гия П. К.,** Сообщ. АН ГрузССР, 1954, **15**, № 9, 569—573

В области T трехмерного пространства R, ограниченной замкнутой поверхностью Ляпунова S, рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,\, j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, коэффициенты $a_{ij}(x)$ имеют в R ограниченные производные первого и второго порядка, удовлетворяющие условию Гельдера, квадратичная форма $\sum_{i,\, j=1}^{3} a_{ij}\eta_i\eta_j$ — положительно определенная в R. Граничные условия:

$$u(x, 0) = 0\ (x \in T);\ u(\xi, t) = \varphi(\xi, t)\ (\xi \in S,\ t > 0) \qquad (2)$$

или

$$u(x, 0) = 0\ (x \in T);\ \partial u(\xi, t) / \partial \nu = \varphi(\xi, t)\ (\xi \in S,\ t > 0).$$

Решения ищутся в виде обобщенных тепловых потенциалов, построенных при помощи фундаментального решения уравнения (1) (Dressel F., Duke Math. J., 1940, **7**, 186—203; 1946, **13**, 61—70). Задача сводится к интегральному уравнению, которое решается последовательными приближениями. Отмечается, что если $\lim_{t \to \infty} \varphi(\xi, t) = \varphi(\xi)$, то при некоторых дополнительных условиях (которые не сформулированы) решение $u(x, t)$ задачи (1) — (2) имеет $\lim_{t \to \infty} u(x, t) = u(x)$,

$$u(\xi) = \varphi(\xi)\ (\xi \in S) \text{ и } \sum_{i,\, j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\, \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Подробные доказательства отсутствуют. М. Ш. Бирман

2246. **О связи основной задачи теории упругости с одним особым случаем задачи Пуанкаре. Ш е р м а н Д. И.,** Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 6, 685—692

Дается новое решение второй основной задачи плоской теории упругости (отыскание упругого равновесия тела при заданных на границе смещениях) для произвольной конечной многосвязной области. Интегральное уравнение Фредгольма, полученное здесь автором для решения задачи, совпадает с интегральным уравнением, полученным им ранее (Докл. АН СССР, 1940, **27**, № 9). В связи с этим рассматривается задача (названная автором особым случаем задачи Пуанкаре) отыскания пары регулярных в данной области гармонических функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ по граничным условиям

$$\partial\varphi / \partial x + \partial\psi / \partial y = f_1(s),\ \partial\varphi / \partial y - \partial\psi / \partial x = f_2(s), \qquad (1)$$

где f_1, f_2 — заданные функции дуги. В случае, когда $f_1(s) - if_2(s)$ есть предельное значение функции переменной $z = x + iy$, голоморфной внутри рассматриваемой области, автор строит через решение упомянутого уравнения Фредгольма (всегда разрешимого единственным образом) решение φ, ψ задачи (1). Показывается, что это условие на f_1 и f_2 необходимо и достаточно для разрешимости (1).

А. И. Каландия

2247. **Устойчивость прямоугольной пластинки переменной толщины при одноосном напряженном состоянии. Микеладзе Ш. Е.,** Тр. Тбилис. матем. ин-та АН ГрузССР 1953, **19**, 211—224

Рассматривается устойчивость прямоугольной пластинки $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, сжимаемой силами, приложенными к свободно опертым краям $x = 0$ и $x = a$. Предполагается, что жесткость пластинки D не зависит от x и дважды непрерывно дифференцируема по y; интенсивность сжимающих сил обозначена $\sigma\varphi(y)$, прогиб пластинки w ищется в виде $w = f(y)\sin\pi x/a$. Задача сводится к отысканию того наименьшего значения параметра σ, при котором уравнение

$$(Df''(y))'' - 2(\pi/a)^2 (Df'(y))' + \psi(y) f(y) = 0, \qquad (1)$$

где $\psi(y) = D(\pi/a)^4 - \mu(\pi/a)^2 D'' - \sigma(\pi/a)^2 \varphi(y)$, имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее краевым условиям на краях пластинки $y = 0$ и $y = b$. Уравнение (1) заменяется эквивалентным интегральным уравнением:

$$f(y) = \{Y_1(y) - 2(\pi/a)^2 [Y_3(y) - D'(0) Y_4(y) / D(0)]\} f(0) +$$
$$+ [Y_2(y) - 2(\pi/a)^2 Y_4(y)] f'(0) + Y_3(y) f''(0) +$$
$$+ Y_4(y) f'''(0) + D^{-2}(0) \int_0^y K(y, t) f(t)\, dt, \qquad (2)$$

где $Y_1(y), \ldots, Y_4(y)$ — нормальная фундаментальная система решений уравнения $(Df'')'' = 0$,

$$K(y,t) = 2(\pi/a)^2\{D^2(t)F_{tt}''(y,t) + 3D(t)D'(t)F_t'(y,t) + \\ + \left[D''(t)D(t) + D'^2(t) - \frac{1}{2}(a/\pi)^2 D(t)\psi(t)\right]F(y,t)\},$$

$$F(y,t) = -\begin{vmatrix} Y_1(y) & \ldots & Y_4(y) \\ Y_1(t) & \ldots & Y_4(t) \\ Y_1'(t) & \ldots & Y_4'(t) \\ Y_1''(t) & \ldots & Y_4''(t) \end{vmatrix}$$

Полагая далее в (2) $y = mh$, $m = 1, \ldots, n$ $(h = b/n)$ и аппроксимируя интегралы полученными им ранее формулами (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6,3—88), автор получает систему n линейных алгебраических уравнений для $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f(mh)$, и присоединяет к ней краевые условия (приближенные представления производных функции $f(y)$ в точке $y = b$ получаются из (2) путем предварительного дифференцирования). Искомое значение параметра σ приближенно вычисляется, как первый нуль определителя полученной таким образом однородной системы линейных алгебраических уравнений. Показано, что метод применим и в том случае, когда функция $D(y)$ либо одна из производных $D'(y)$, $D''(y)$ имеет конечное число точек разрыва. И. М. Рапопорт

2248. Геометрические свойства двухразмерного волнового движения. Мак-Колл (Geometrical properties of two-dimensional wave motion. Mac Coll L. A.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 96—103 (англ.)

См. РЖМех, 1955, 6151.

2249. Диффракция импульсов на круговом цилиндре. Фридлендер (Diffraction of pulses by a circular cylinder. Friedlander F. G.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, **7**, № 4, 705—732 (англ.)

См. РЖФиз, 1955, 2564.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

2250. О периодическом решении ограниченной задачи трех тел в одном случае, более общем, чем задача Хилла. Агостинелли (Su una soluzione periodica del problema ristretto dei tre corpi piu generale di quella di Hill. Agostinelli Cataldo), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, **13**, 131—151 (итал.)

Рассматриваются дифференциальные уравнения в одном вырожденном случае ограниченной задачи трех тел, несколько более общем, чем задача Хилла (см. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, Paris, Gauthier—Villars, 1894, т. III, гл. 14)

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} + fm_0\frac{x}{r^3} - (n^2 - 2n_1^2)x - \frac{3n_1^2}{R}\left(x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) = 0,$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} + fm_0\frac{y}{r^3} + (n_1^2 - n^2)y + \frac{2n_1^2}{R}xy = 0 \quad (r = \sqrt{x^2+y^2}),$$

где m_0 — масса планеты, m_1 — масса Солнца, R — расстояние от Солнца до планеты, f — постоянная тяготения, n и n_1 определяются соотношениями $n^2 = f(m_0+m_1)/R^3$, $n_1^2 = fm_1/R^3$. Автор ищет периодическое решение этих уравнений, симметричное относительно оси x, в виде рядов Фурье с неопределенными коэффициентами, зависящими от двух произвольных параметров, из которых один определяет период и размеры орбиты, а второй момент прохождения точки через ось x. Метод построения этих рядов во всех деталях (за исключением введения, кроме малого параметра Хилла, еще одного параметра $\eta = n^{-2}(n_1^2 - n^2)$) совпадает с методом, примененным Хиллом при построении его вариационной кривой. Точно так же, как у Хилла, отсутствует доказательство сходимости. Приводятся разложения с точностью до пятой степени малого параметра. Г. А. Мерман

2251. Построение множества траекторий снаряда с постоянной начальной скоростью на основании данных, получаемых непосредственно при стрельбе на полигонах. Попов (Конструктивно установяване на траекториите на артилерийския снаряд по данни от стрелби на полигона. Попов Кирил), Изв. на Матем. ин-т Българ. АН, 1954, **1**, № 2, 47—66 (болг.; резюме русс., франц.)

Предполагая силу сопротивления на единицу массы снаряда $cF(v)$ аналитической функцией v автор интегрирует уравнения движения

$$\ddot{y} = \dot{y}\frac{cF}{v}, \qquad \ddot{z} = g - \dot{z}\frac{cF}{v}$$

при начальных условиях: $y(0) = z(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0$, $\dot{z}(0) = 0$ (ось y направлена вдоль ствола орудия, z — вертикально вниз). Решения ищутся в виде рядов по целым степеням $\sin\alpha$, где α — угол наклона к горизонту ствола орудия. Утверждается, что эти ряды сходятся настолько быстро, что можно практически ограничиться нулевыми приближениями. Отсюда вытекает возможность получения сведений о траектории при рассматриваемом угле α при помощи данных, относящихся к другим углам возвышения, которые можно получить непосредственно на полигоне. И. С. Аржаных

2252. Плоское безвихревое движение идеальной жидкости в односвязной области. Консильо (Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti nei campi semplicemente connessi. Consiglio Alfonso), Matematiche, 1954, **9**, № 2, 113—121 (итал.)

Если C — контур области или контур тела, движущегося в жидкости, то имеет место соотношение

$$[(v_x)_C - v_{0x} + \omega y(\vartheta)]\cos\vartheta + [(v_y)_C - v_{0y} - \omega x(\vartheta)]\sin\vartheta = 0,$$

где $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$ — направляющие косинусы нормали к C, v_x и v_y — проекции скорости движения на оси координат, v_{0x} и v_{0y} — проекции скорости некоторой точки 0 движущегося тела, ω — угловая скорость этого тела вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения, а $x = x(\vartheta)$, $y = y(\vartheta)$ — параметрические уравнения контура C. В случае, когда контур неподвижен, $v_{0x} = v_{0y} = \omega = 0$, а когда C есть окружность с центром в начале координат, $y(\vartheta)\cos\vartheta - x(\vartheta)\sin\vartheta = 0$. Автор выводит и использует эти соотношения для изучения движения кругового цилиндра в жидкости. В. И. Левин

2253. О распределениях коэффициентов прочности. Ежевский, Одерфельд (O rozkładach parametrów wytrzymałości. Jeżewski M., Oderfeld J.), Zastosow. mat., 1954, **2**, № 1, 99—106 (польск.; резюме русс., англ.)

2254. О движении точки на плоскости при заданных условиях для скорости. Сторлацци (Sul moto di un punto in un piano con assegnate condizioni per la velocità. Storlazzi Rosetta), Mathematiche, 1954, **9**, № 2, 106—112 (итал.)

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x} = \lambda\sin(\mu t)x + \lambda\cos(\mu t)y, \quad \dot{y} = \lambda\cos(\mu t)x - \lambda\sin(\mu t)y,$$

где μ, λ — постоянные, удовлетворяющие условию $-2|\lambda| \leqslant \mu \leqslant 2|\lambda|$. Вводятся неизвестные $\varphi = 2\theta + \mu t$, ρ (ρ, θ—полярные координаты), получаются уравнения

$$d\rho = \lambda\rho\sin\varphi dt; \quad d\varphi = (2\lambda\cos\varphi + \mu)dt,$$

которые сразу интегрируются. Заметка имеет элементарный характер. Н. Н. Красовский

2255. **Разностное свойство ядра в теории неустановившегося движения несущей поверхности. К ю с н е р** (The difference property of the kernel of the unsteady lifting surface theory. K u e s s n e r H. G.), J. Aeronaut. Sci., 1955, **22**, № 4, 227—230 (англ.)

Рассматривается неустановившееся движение тонкого крыла конечного размаха в невязкой сжимаемой жидкости при обычной линейной постановке задачи. Потенциал скоростей возмущения имеет вид:

$$\varphi(s, x, y, z) = \iint_{(a)} dx'\,dy' \int_{s'=0}^{s'=s} dw(s', x', y, 0) \times$$
$$\times K(s, x, y, z, s', x', y', z'), \qquad (1)$$

где система координат x, y, z связана с несущей поверхностью (a), лежащей в плоскости $z=0$ и двигающейся в направлении оси Ox, а s — прямолинейный путь начала координат; $w(s, x, y, 0) = \varphi_z(s, x, y, 0)$ — скос потока. Для случая установившегося или неустановившегося движения в несжимаемой жидкости ядро K имеет «разностное свойство», т. е.

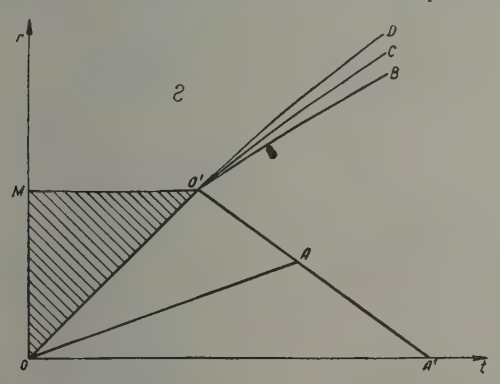
$$K(s, x, y, z, s', x', y', z') = K(s-s', x-x', y-y', z-z')$$

и в этих случаях имеют место теоремы обратимости потока. Для случая дозвукового движения в предположении, что $w(s, x, y, 0) = w^*(x, y, 0)\exp(iks)$, при помощи применения к φ общего преобразования Лоренца и отделения переменной s находится явное выражение для приведенного значения K^* и выводится достаточное условие наличия разностного свойства у K^*. В этом же случае получено интегральное представление для распределения давления, аналогичное (1), и найдено явное выражение для его ядра.

И. Л. Кароль

2256. **Начальная стадия распространения сферической ударной волны, возникающей в результате взрыва. Б е р р и, Х о л т** (The initial propagation of spherical blast from certain explosives. B e r r y F. J., H o l t M.), Proc. Roy. Soc., 1954, **A224**, № 1157, 236—251 (англ.)

Рассматривается начальная стадия распространения сферической взрывной ударной волны от точечного источника, помещенного в точке O (см. рисунок).



Дается следующая картина движения воздуха и взрывного газа в фазовой плоскости r, t. Заштрихованная область есть твердое взрывчатое вещество, $OO'A'$ — область детонации, AOA' — покоящийся газ, O — точка, соответствующая началу детонации, O' — точка выхода детонационной волны, $O'D$ — первая ударная волна, область S — покоящийся воздух, $O'C$ — линия раздела воздуха и газа, $O'B$ — вторая ударная волна, движущаяся в газе.

В новых переменных ξ (ξ^2 — расстояние от точки O') и θ (θ — полярный угол, отсчитываемый от $O'M$), связанных с r и t соотношениями $r = 1 - \xi^2 \sin\theta$, $t = 1 - \xi^2\cos\theta$, уравнения движения переходят в

$$\xi\{(u \pm a)\sin\theta + \cos\theta\}\,\partial(u \pm a)/\partial\xi +$$
$$+ 2\{(u \pm a)\cos\theta - \sin\theta\}\,\partial(u \pm a)/\partial\theta \mp$$
$$\mp 4ua\,\xi^2/(1 - \xi^2\sin\theta) = 0.$$

Разлагая u и a в степенные ряды по ξ и используя граничные условия на характеристиках, авторы определяют начальные наклоны линий, исходящих из точки O'.

Доказывается образование второй ударной волны, движущейся в расширяющихся продуктах взрыва. Показано, что вторая ударная волна вначале очень слаба, в последующем же достигает существенной величины.

Н. Н. Яненко

2257. **Распределение температуры вдоль тонкого стержня, электрически нагреваемого в вакууме. V. Время установления. Д ж а й н, К р и ш н а н** (The distribution of temperature along a thin rod electrically heated in vacuo. V. Time lag. J a i n S. C., K r i s h n a n K. S.), Proc. Roy. Soc., 1955, **A227**, № 1169, 141—154 (англ.)

Рассматривается одномерное уравнение теплопроводности для стержня конечной длины с теплообменом через боковые стенки по закону Вина и подогревом электрическим током

$$-k\omega\,\partial^2T/\partial x^2 + c\delta\omega\,\partial T/\partial t = p\varepsilon\sigma(T_m^4 - T^4), \qquad (1)$$

где k — коэффициент теплопроводности, ω — поперечное сечение, c — удельная теплоемкость, δ — плотность, ε — коэффициент общего излучения с поверхности, σ — константа излучения Стефана.

На основании предыдущих частей статьи (РЖМат, 1955, 4529) утверждается, что при установившемся режиме $\partial^2T/\partial x^2$ в центре стержня много меньше остальных членов в уравнении (1). Рассматривается уравнение

$$c\delta\omega\,\partial T/\partial t = p\varepsilon\sigma(T_m^4 - T^4). \qquad (2)$$

Для решения (2) справедливо равенство

$$(T_m - T)(T_m + T)^{-1}\exp[-2\operatorname{arc\,tg}(T/T_m)] = C_1e^{-(t/t_0)},$$

где время установления $t_0 = c\delta\omega/4p\varepsilon\sigma T_m^3$.

Обсуждаются пределы применения полученной формулы для t_0. Исследуются поправки на время установления для точек, близких к центру стержня, а также для случая параболического распределения температуры по всему стержню. Для случая малых колебаний нагревающего тока проводится сравнение с результатами, получаемыми обычным методом разделения переменных.

Ю. Н. Днестровский

2258. **Неустановившийся приток грунтовых вод к горизонтальным дренам. Б е л я к о в а В. К.,** Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 2, 234—239

Рассматривается неустановившееся движение грунтовых вод при наличии одной или бесконечной системы равноотстоящих друг от друга дрен, центры которых находятся на одной и той же глубине под первоначальным уровнем грунтовыходов. Задача решается для однородного грунта бесконечной и конечной глубины и для двухслойного грунта, нижний слой которого неограниченно простирается вниз.

Движение грунтовых вод имеет потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$, который удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$. Вдоль свободной поверхности давление пос-

тоянно и принимается равным нулю. Поэтому на ней выполняется условие

$$ky + \varphi(x, y, t) = 0. \qquad (1)$$

На свободной поверхности задается граничное условие

$$\partial\varphi / \partial t + c\partial\varphi / \partial y = 0; \quad (c = k / m) \qquad (2)$$

k — коэффициент фильтрации, m — пористость.

Кроме того, потенциал φ должен удовлетворять начальному условию

$$y = -\varphi(x, 0, 0) / k = 0. \qquad (3)$$

Уравнение Лапласа интегрируется приближенно: граничное условие (2) сносится на ось x, идущую вдоль первоначального уровня грунтовых вод.

Рассмотрены шесть частных примеров, для которых потенциал $\varphi(x, y, t)$ и уравнение свободной поверхности получены в явном виде. Метод применим до момента времени, когда депрессионная кривая достигнет поверхности дрены. П. Ф. Фильчаков

2259. Обобщенные граничные задачи гидродинамики вязких жидкостей. Хахубия Г. П., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1953, № 27, 77—83 (резюме груз.)

В линеаризованном случае рассматривается основная граничная задача стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости во внутренней односвязной области T (задача Стокса). Граничные значения задаются как функции элемента граничной поверхности S, ищется решение уравнений Стокса, удовлетворяющее граничным условиям

$$u_j^+(\sigma_0) = f_i(\sigma_0) \text{ или } t_j^+[u(\sigma_0)] = F_j(\sigma_0), \quad j = 1, 2, 3,$$

где σ_0 — элемент границы, u_j^+, t_j^+ — граничные значения компонент скорости и вектора напряжения соответственно. Граничные значения $u_j^+(\sigma_0)$; $t_j^+[u(\sigma_0)]$ как функции элемента σ_0 поверхности S определяются как пределы средних значений

$$u_j(\sigma') = \frac{1}{\sigma'}\int_{\sigma'} u_j d\sigma'; \quad t_j[u(\sigma')] = \frac{1}{\sigma'}\int u_k t_{jk}[u]\, d\sigma'$$

на произвольном поверхностном элементе σ', взятом внутри T при $\sigma' \to \sigma_0$ (здесь u_k — направляющие косинусы нормали к поверхностному элементу σ').

Используя потенциалы, построенные Одквистом (Odqvist F. K. G., Math. Z., 1930, **32**, 329), автор рассмотрел средние значения гидродинамических потенциалов и получил интегральные уравнения, для которых остаются в силе результаты Одквиста о существовании решения. Д. Е. Долидзе

2260. Теоремы сравнения для дозвуковых потоков. Серрин (Comparison theorems for subsonic flows. Serrin J. B.), J. Math. and Phys., 1954, **33**, № 1, 27—45 (англ.)

Пусть два потока (плоские или осесимметричные), имеющие заданные скорости свободного течения, определены в областях D и $\bar{D}$, ограниченных соответственно линиями тока S и $\bar{S}$, простирающимися в бесконечность. Дуга $MN = S \cap \bar{S}$ образует часть границы односвязной области D', $D' \subset D$, $D' \subset \bar{D}$. Если остальная часть границы D' состоит из дуг $NI \subset \bar{S}$ и $IM \subset S$, $I \in S$, $I \in \bar{S}$, и все точки дуги NIM конечны, за исключением, может быть, I, то

$$q(M) / q(N) \leqslant \bar{q}(M) / \bar{q}(N), \qquad (1)$$

где q — скорость потока.

Автор ранее доказал эту теорему для несжимаемых жидкостей (J. Rational Mech. and Analysis, 1952, **1**, 563—572; Amer. J. Math., 1952, **74**, 492—506). В настоящей работе теорема доказана для сжимаемой жидкости в предположении, что: 1) M и N являются регулярными граничными точками D', 2) $q(P) = \bar{q}(P)$ в некоторой регулярной точке (граничная точка области называется регулярной, если она лежит на границе круга, целиком принадлежащего области). Указаны случаи, когда от этих предположений можно освободиться.

Равенство в (1) имеет место только при совпадении течений. Теоремы сравнения применяются для доказательств некоторых теорем существования, а также для качественного исследования конкретных течений (течения в канале, обтекание крыла). Н. Н. Яненко

2261. О дозвуковом потоке сжимаемой жидкости вокруг вытянутого сфероида. Хида (On the subsonic flow of a compressible fluid past a prolate spheroid. Hida Kinzo), J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, № 2, 257—264 (англ.)

Рассматривается осесимметричное течение сжимаемой жидкости вокруг сфероида. Применяется метод Янзена — Рэлея, состоящий в разложении потенциала скорости Φ в ряд по M^2, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 M^2 + \ldots$, где M — число Маха невозмущенного течения в бесконечности. От цилиндрических координат $(x, \tilde{\omega})$ автор переходит к эллиптическим координатам (ρ, μ) при помощи формул $x = k\mu\rho$, $\tilde{\omega} = k(1-\mu^2)^{1/2}(\rho^2-1)^{1/2}$, где $k = ae$; e — эксцентриситет сфероида; a — большая полуось сфероида. Выражения для $\Phi_0(\mu, \rho)$, $\Phi_1(\mu, \rho)$ получаются в виде громоздких функциональных рядов от μ, ρ.

Подробно рассматриваются случаи $t = 0{,}9$ (толстый сфероид) и $t = 0{,}1$ (тонкий сфероид, t — параметр, характеризующий вытянутость сфероида), даются численные расчеты в этих случаях. Н. Н. Яненко

2262. Потенциал скоростей и волновое сопротивление судов при конечной глубине воды. Костюков А. А., Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1954, № 9, 50—62

При помощи обобщенного преобразования Фурье определяется потенциал скоростей волнового движения тяжелой жидкости при конечной глубине, вызванного установившимся движением источников. Полученное решение, в форме быстро сходящегося ряда с интегральными слагаемыми, удобно для практических расчетов волнового профиля. При помощи некоторых преобразований данное решение приводится к обычному выражению для потенциала скоростей, полученному методами теории потенциала. Исследуется асимптотический характер решения, результаты прилагаются к определению (различными методами) волнового сопротивления в общем случае и в случаях тонкого судна, шара и идеального движителя. М. Д. Хаскинд

2263. Гравитационные волны в жидкости, набегающие на берег, наклоненный к горизонту под углом $\alpha = \pi/2q$ (q — целое). Бриуэ (Ondes liquides de gravité abordant une plage inclinée sur l'horizon de l'anglé: $\alpha = \pi/2q$ (q entier). Brillouët Georges), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 11, 1189—1191 (франц.)

Развитие предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 4475). Граничная задача волнового движения идеальной несжимаемой жидкости при наличии наклоненного препятствия приводится к определению аналитической функции $f(z)$, регулярной в области D, ограниченной свободной поверхностью (Ox) и дном (Ot), за исключением, быть может, точки O; $f(z)$ удовлетворяет условиям: $\mathrm{Im}(df/dz + if) = 0$ на Ox, $\mathrm{Im}(e^{-i\pi/2q} df/dz) = 0$ на Ot и уравнению $\Pi_{j=1}^{q}(d/dz - \rho_j) f(z) = E(z)$, где $\rho_j = ie^{ij\pi/q}$, $E(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n z^{-(2n+1)q}$, B_n — вещественно,

При фиксированном n решение представляется линейной комбинацией с вещественными коэффициентами функции $f_0(z)$ и $f_{1,n}(z)$, которые являются суммами q определяемых однозначно слагаемых, $f_0(z)$ регулярна в D и ограничена на бесконечности, $f_{1,n}(z)$ при $n<0$ является полиномом от z; при $n=0$ имеет в начале координат логарифмическую особенность; a при $n>0$ — полюс порядка $2nq$. Решение в общем случае будет линейной комбинацией с вещественными коэффициентами решений, полученных для различных n. Приближенно определяется форма свободной поверхности у берега в случае стационарных волн.

Для случая $n=0$ эта задача была рассмотрена Стокером (Stoker, Quart. Appl. Math., 1947, 5, № 1, 1—54).

Д. Е. Долидзе

2264. Динамические потенциалы теории упругости. Аржаных И. С., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, № 13, 3—17

Дается представление решений уравнения теории упругости

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u-\mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\rho F \qquad (1)$$

при помощи некоторых решений волновых уравнений; из этих представлений получаются фундаментальные решения уравнения (1); при помощи последних вводятся потенциалы теории упругости типа запаздывающих потенциалов волновых уравнений и получается формула, аналогичная формуле Кирхгофа. Построены интегро-дифференциальные уравнения для первой и второй задачи теории упругости.

В. Д. Купрадзе

2265. О прямоугольной пластинке: прогиб под пирамидальной нагрузкой. Орнстейн (Note on rectangular plates: Deflection under pyramidal load. Ornstein Wilhelm), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 3, 339—341 (англ.)

Применением метода Фурье решается задача об изгибе опертой прямоугольной пластинки, подверженной действию распределенной нагрузки $p(x, y)$ специального вида. Геометрически нагрузку можно представить в виде четырехугольной пирамиды, основанием которой служит данная пластинка, а вершина проектируется в центре пластинки. Такой вид нагрузки позволяет получить простое выражение для величины прогиба срединной поверхности.

А. И. Каландия

2266. О трехмерной проблеме распространения в электромагнитной теории. Баррар, Долф (On a three dimensional transmission problem of electromagnetic theory. Barrar R. B., Dolph C. L.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 6, 725—743 (англ.)

Доказывается существование и единственность решения краевой задачи диффракции стационарного электромагнитного поля на помещенном в вакууме проводящем теле ($\varepsilon=\varepsilon_1, \mu=\mu_0, \sigma=\sigma_1$), ограниченном замкнутой поверхностью, при менее жестких требованиях к свойствам поверхности тела, чем аналитичность, при которой доказана соответствующая теорема для непроводящего тела ($\sigma_1=0$). При помощи известного векторного аналога формулы Грина — формулы Стреттона и Чу — строится система интегральных уравнений типа Фредгольма, эквивалентная краевой задаче диффракции. Для полученной системы доказывается теорема существования и единственности решения.

Д. Н. Четаев

2267. Диффракция плоской волны относительно угла при смешанных граничных условиях. Коробов П. П., Сб. науч. работ. студ. Карело-Финск. ун-та, 1954 (1955), № 2, 5—13

Решается задача диффракции плоской нестационарной волны относительно угла, большего π, при условии, что на одной стороне угла искомая функция, а на другой — ее нормальная производная равны нулю. Эта задача была решена С. Л. Соболевым (см. Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, 1937, 605—617) для случаев: 1) $u=0$ на сторонах угла; 2) $\partial u/\partial n=0$ на сторонах угла.

Д. З. Авазашвили

2268. О критической частоте волновода. Де-Сочо (Sulle frequenze critiche in una guida d'onda. De Socio Marialuisa), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 3, 283—285 (итал.)

Приложение известных изопериметрических неравенств для наименьшего собственного значения мембраны к оценке критической (минимальной, совместимой с распространением волн без затухания) частоты для волновода произвольной формы. Для волн типа TM уточняется оценка снизу, а для волн типа TE критическая частота оценивается как снизу, так и сверху.

Д. Н. Четаев

2269. К теории T-образного сочленения волноводов. Пирсон (A contribution to the theory of right-angled junctions in wave guides. Pearson J. D.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, **7**, part 2, 194—202 (англ.)

Исследуется распространение волн в прямоугольном волноводе, закрытом с одного конца, с продольным сечением $0<y<b$, $z>0$, к которому присоединяется волновод с продольным сечением $z_0<z<z_0+d$, $y<0$. Рассматривается распространение волн, не имеющих компоненты электрического поля E_x, нормальной к продольному сечению, при возбуждении первого волновода волной H_{10}.

Задача определения H_x сводится к решению двумерного уравнения $\Delta u+k^2u=0$ в области продольного сечения с условием обращения в нуль нормальной производной на границе. Решение ищется в виде рядов

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)\cos(n\pi y/b),$$

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} b_m(y)\cos(m\pi(z-z_0)/d)$$

в первом и втором волноводах соответственно.

Излагается без доказательства способ построения некоторой бесконечной системы алгебраических уравнений, решение которой должно давать возможность определить коэффициенты b_m.

Рассматриваются два частных случая: 1) когда во втором волноводе имеются только уходящие волны и 2) когда в нем на некотором расстоянии расположен фильтр, пропускающий без отражений комбинацию волн E_{11} и H_{11}, не имеющую компоненты E_x.

Д. Н. Четаев

2270. Об уравнении Шредингера для атома гелия. Фок В. А., Изв. АН СССР, сер. физ., 1954, **18**, № 2, 161—172

Гиллерааc, рассматривая уравнение Шредингера для атома гелия в основном состоянии, применял для определения собственного значения метод Ритца, причем соответствующие собственные функции предполагал имеющими вид

$$e^{-k(r_1+r_2)}\sum_{n,\,l,\,m} c_{n,l,m}\,r_1^n\,r_2^l\,r_{12}^m, \qquad (1)$$

где r_1 и r_2 — расстояния электронов от ядра, а r_{12} — расстояние между электронами (Hylleraas E., Z. Phys., 1928, **48**, 469; 1929, **54**, 347). Но известно, что точное решение уравнения Шредингера для гелия не допускает разложения вида (1).

Автор преобразует уравнение Шредингера к четырехмерным сферическим координатам, после чего оно принимает вид

$$R^2\,\partial^2\psi/\partial R^2 + 3R\,\partial\psi/\partial R + \\ + \square^*\psi + (^1/_2\,ER - {}^1/_2\,u\sqrt{R})\,\psi = 0, \qquad (2)$$

где $R^2 = r_1^2 + r_2^2$, $\square^*$ — оператор Лапласа на четырехмерном шаре, $u = V\sqrt{R}$, V — потенциальная энергия, которая есть однородная функция сферических координат степени $-{}^1/_2$. Показывается, что решение (2) при малых r_1, r_2, r_{12}, т. е. в области тройного столкновения, следует искать в виде

$$\psi = \sum\nolimits_{n=1,\,3/2,\ldots} R^{n-1} \sum\nolimits_{k=0}^{[n-1]} (\log R)^k \psi_{nk}. \qquad (3)$$

Дается алгоритм для определения функций $\psi_{nk}(\alpha, \vartheta)$. Они определяются однозначно, за исключением функции ψ_{n0}, определяющейся с точностью до четырехмерной шаровой функции порядка n, содержащей n произвольных постоянных. Сходимость ряда (3) не исследуется, но можно ожидать, что он сходится при всех R.

Исследуется характер поведения решения (2) при неограниченном возрастании R и показывается, что оно имеет асимптотическое представление

$$\psi = A_1 \exp(-zr_1 - \sqrt{2V_1}r_2) + A_2 \exp(-zr_2 - \sqrt{2V_1}r_1), \qquad (4)$$

где V_1 — потенциал ионизации внешнего электрона. Коэффициенты A_1 и A_2, зависящие от шаровых координат, следует выбрать, учитывая установленный вид решения при малых R. Очевидно, если при использовании метода Ритца, для определения первого собственного значения уравнения (2), варьируемые функции брать в виде (4), то можно рассчитывать на точность результатов, превышающую полученную Гиллераасом.

М. И Петрашень

2271. Задача Гольдштейна о собственных значениях. Грин (Goldstein's eigenvalue problem. Green H. S.), Phys. Rev., 1955, **97**, № 2, 540—542 (англ.)

См. РЖФиз, 1956, 6159.

2272. Оператор рассеяния и адиабатическая теорема. Мозес (The scattering operator and the adiabatic theorem. Moses H. E.), Nuovo cimento, 1955, **1**, № 1, 103—131 (англ.; резюме итал.)

Пусть гамильтониан системы представляется в виде

$$H = H_0 + \varepsilon V,$$

где H_0 — невозмущенный гамильтониан, εV — возмущение, и пусть далее $\Phi(t)$ — решение уравнения Шредингера $-i^{-1}\,\partial\Phi(t)/\partial t = H\Phi(t)$. Если $\Phi(t)$ такова, что существует предел $\lim_{t\to\pm\infty} \exp[iH_0 t]\,\Phi(t) = \Phi_\pm$, то оператор рассеяния S определяется соотношением $\Phi_+ = S\Phi_-$. Через $f_+(E, \alpha)$ и $f_-(E, \alpha)$ — H_0 обозначаются представления функций Φ_+ и Φ_- соответственно, где E и α — собственные значения оператора H_0 и коммутирующих с ним. Строится выражение оператора рассеяния S^E, выполняющего преобразование

$$f_+(E, \alpha) = \iint S^E(E, \alpha \mid E', \alpha')\, f_-(E', \alpha')\, dE'd\alpha'$$

в представлении H_0. Показывается эквивалентность метода адиабатического снятия возмущения εV и построения оператора S при помощи функций Φ_+ и Φ_-.

Ю. Н. Днестровский

2273 К. Прерывное автоматическое регулирование. Флюгге-Лоц (Discontinuous automatic control. Flugge-Lotz Irmgard. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953, viii + 168 pp., 5.00 doll.) (англ.)

Книга состоит из трех частей. В первых двух частях рассматриваются задачи стабилизации положения некоторого тела, обладающего одной степенью свободы, при помощи двухпозиционного регулятора и регулятора с постоянной скоростью сервомотора. Закон регулирования в общем случае зависит от отклонения положения тела от заданного значения (ψ), производной этого отклонения (ψ') и координаты сервомотора (β).

Дифференциальное уравнение упомянутых выше систем регулирования имеет вид $\psi'' + 2D\psi' + \psi = \mp\beta$, где $\beta = \operatorname{sgn}(\psi + k\psi')$ для двухпозиционного регулятора и $\beta' = \operatorname{sgn}(\psi + k\psi' + \mu\beta)$ для регулятора с постоянной скоростью сервомотора.

Возможные типы движений в системах регулирования, определяемые решениями дифференциального уравнения, изучаются на фазовой плоскости (ψ, ψ') и в фазовом пространстве (ψ, ψ', β). Применяемая автором косоугольная система координат, угол между осями которой зависит от параметров системы, упрощает построение фазовых траекторий.

Подробно рассматривается влияние на характер движений системы неидеальности элементов регулятора: гистерезиса, запаздывания, зоны нечувствительности.

В третьей части рассмотрена задача стабилизации продольного движения снаряда при помощи релейного регулятора. В этом случае регулируемый объект характеризуется двумя степенями свободы. Для исследования как периодических, так и непериодических движений применяется хорошо известный метод припасовывания, а также прием сведения четырехмерного фазового пространства к двум фазовым плоскостям.

Отсутствуют ссылки на отечественные и зарубежные работы (если не считать ссылок на недоступные читателю технические отчеты и на несколько немецких работ).

Я. З. Цыпкин

См. также: 1860, 1861, 2020, 2141, 2144, 2145, 2164, 2171, 2172, 2173, 2285, 2294, 2306, 2307, 2319, 2348, 2413, 2418, 2423, 2438, 2462, 2469, 2470, 2471, 2472, 2474, 2475, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2484

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2274. Топологические методы исследования задачи о собственных функциях нелинейных интегральных уравнений. Вайнберг М. М., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, **20**, № 3, 37—57

Работа содержит теоремы существования собственных функций для нелинейных интегральных уравнений типа

$$u(x) = \lambda \int_B \ldots \int_B K(x;\, y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times g(u(y_1), \ldots, u(y_n);\; y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n, \qquad (1)$$

а также некоторых других. Здесь B — ограниченная область m-мерного евклидова пространства.

Типичная теорема (формулируем для случая $n = 1$): Пусть выполнены условия: 1) ядро $K(x, y)$ измеримо, причем $0 < m \leqslant K(x;\; y) \leqslant M < \infty$ и $\psi(x) = \int_B K(x;\, y)\, dy$ есть непрерывная функция в замкнутой области $\overline{B}$; 2) функция $g(u;\; y)$ непрерывна по своим аргументам, притом $g(0;\, y) \equiv 0$ и $g(v;\; y) > 0$, если $0 < v < a$. Тогда уравнение (1) имеет в пространстве

C положительные собственные функции любой нормы $\leqslant a$.

Аналогичные теоремы утверждают существование собственных функций уравнения (1) в пространствах $L_p\,(p \geqslant 1)$.

Во вводной части приводятся доказательства некоторых (в большинстве известных) вспомогательных утверждений о вполне непрерывных операторах и о существовании инвариантных векторов. В частности, там содержится новое сравнительно простое доказательство леммы о существовании положительного собственного значения у вполне непрерывного оператора в бесконечномерном пространстве Банаха, отображающего некоторую сферическую поверхность на множество, удаленное от нулевой точки на положительное расстояние. М. К. Гавурин

2275. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, встречающихся в теории интегро-дифференциальных уравнений. Василаке (Asupra unei clase de ecuaţii integrale singulare ce apar în teoria ecuaţiilor integro-diferenţiale. Vasilache Sergeiu), Bul. stiint. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1954, 6, № 3, 541—554 (рум.; резюме русс., франц.).

Интегро-дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} H_i(x)\,\varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \sum_{r=0}^{p} K_r(x, s)\,\varphi^r(s)\,ds \qquad (1)$$

заменой

$$\varphi(x) = \sum_{r=0}^{q-1} c_r \frac{(x-a)^r}{r!} + \int_a^x \frac{(x-s)^{q-1}}{(q-1)!}\,\varphi^{(q)}(s)\,ds, \qquad (2)$$

где $q = \max\{n, p\}$, приводится к интегральному уравнению относительно $\psi(x) = \varphi^{(q)}(x)$. Если $n \geqslant p$ и $H_n(x) \neq 0$ для всякого $x \in I = [a, b]$, то решение уравнения (1) является целой функцией от параметра λ.

Если $n = p - 1$, то для определения $\psi(x) = \varphi^{(p)}(x)$ автор получает интегральное уравнение вида

$$[H_{p-1}(x) + \lambda K_p(x, x)]\,\psi(x) = h(x) + \lambda g(x) + \int_a^x [M_1(x, s) + \lambda M_2(x, s)]\,\psi(s)\,ds. \qquad (3)$$

Множество значений λ, удовлетворяющих уравнению $H_{p-1}(x) + \lambda K_p(x, x) = 0$ хотя бы при одном значении x, автор называет лакунарным интервалом. Изучается уравнение (3) для значений параметра λ, принадлежащих лакунарному интервалу. Я. Быков

2276. Об одном методе решения обобщенных нагруженных интегральных уравнений. Скоробогатько В. Г., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 54, 51—68

Изучаются интегро-дифференциальное уравнение вида

$$u(x) = f(x) + \lambda A(x)\,u^{(i)}(\alpha) + \lambda \int_0^1 K(x, t)\,u(t)\,dt \qquad (1)$$

и соответствующее ему однородное уравнение (продолжение работы автора, опубликованной в том же журнале за 1952 г. № 37, кн. 8). В § 1,2 выведены вспомогательные тождества. В § 3 строятся решения однородного уравнения для случая, когда $\lambda = \lambda_0$ есть характеристическое число. В § 4 изучается структура общего решения однородного уравнения для $\lambda = \lambda_0$. § 5 посвящен изучению вопроса разрешимости неоднородного уравнения (1) в случае, когда $\lambda = \lambda_0$ есть характеристическое число. В § 6 изучается структура общего решения неоднородного уравнения для $\lambda = \lambda_0$.

В работе широко использован аппарат интегральных уравнений, разработанный Н. М. Гюнтером (Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1932, 1).

Я. Быков

2277. Об интегрировании нормальных систем рекуррентных интегро-дифференциальных уравнений методом последовательных приближений. Жерме (Sur l'intégration, par la méthode des approximations successives, des systèmes normaux d'équations intégro-differentielles récurrentes Germay R. H.), Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1953, 22, № 3—4, 131—138 (франц.)

Рассматривается задача Коши для бесконечной системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_{j,n}}{dx} = F_{j,n}\left\{\begin{matrix} x;\ y_{1,n}(x), \ldots, y_{p,n}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1,n+r}(x), \ldots, y_{p,n+r}(x); \\ w_{j,n}^{(1)}(x), \ldots, w_{j,n}^{(k)}(x) \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p;\ n = 1, 2, \ldots),$$

где $y_{j,n}(x)$ — неизвестные функции и

$$w_{j,n}^{(l)}(x) = \int_{x_0}^{x} f_{j,n}^{(l)}\left[\begin{matrix} x, s;\ y_{1,n}(s), \ldots, y_{p,n}(s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1,n+r}(s), \ldots, y_{p,n+r}(s) \end{matrix}\right] ds$$
$$(l = 1, 2, \ldots, k).$$

Начальные условия имеют вид:

$$y_{j,n}(x_0) = y_j^0 \quad (j = 1, 2, \ldots, p). \qquad (2)$$

Предполагается, что функции $f_{j,n}^{(l)}(x, s, u_{11} \ldots u_{p,1}, \ldots u_{p,r+1}),\ F_{j,n}(x, u_{11} \ldots u_{p1}, \ldots u_{1,r+1} \ldots u_{p,r+1}; w_1, \ldots, w_k)$ равномерно непрерывны, ограничены в своей совокупности для

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a,\quad x_0 \leqslant s \leqslant x_0 + a,\quad |u_{j1} - y_j^0| \leqslant b_j,$$
$$|w_l| \leqslant c_l,$$

и удовлетворяют условию Липшица относительно аргументов $u_{j,n}, w_l$, причем постоянные в условии Липшица не зависят от индекса n.

Методом последовательных приближений в некотором сегменте $[x_0, x_0 + h]$ доказывается существование и единственность решения системы уравнений (1), удовлетворяющего начальным условиям (2).

Ю. К Ландо

2278. О некоторых интегральных уравнениях. Геронимус Я. Л., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 1, 5—7

Исследуется интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int_E p(s) \ln \frac{1}{r}\,ds = q(\sigma), \qquad (1)$$

в котором E — совокупность конечного числа дуг гладкой кривой C в плоскости комплексного переменного: ζ; s, σ — дуговые координаты точек z, $\zeta \in C$; $r = |z - \zeta|$.

Через D_α обозначен класс функций, определенных на C и удовлетворяющих неравенству $\alpha > 0$

$$\omega(\delta, f) = \sup_{|s-\sigma| \leqslant \delta} |f(s) - f(\sigma)| \leqslant A\left(\ln \frac{a}{\delta}\right)^{-\alpha}$$

Рассматривается уравнение

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\zeta}, \quad \zeta \in E.$$

Доказывается, что $f(\zeta) \in D_{\alpha-1}$, если $\varphi \in D_\alpha$, $\alpha > 1$. Обратно, если $f(\zeta) \in D_\alpha$, $\alpha > 1$, то $\varphi(z) \in D_{\alpha-1}$ внутри E. Отсюда вытекает теорема 3: Пусть множество E лежит на вещественной оси; рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int_E p(x) \ln \frac{1}{|y-x|}\,dx = q(y), \quad y \in E, \qquad (2)$$

если для y внутри E существует производная $q'(y) \in D_{\alpha_1}$, $\alpha > 2$, то уравнение (2) имеет решение $p(x) \in D_{\alpha-1}$, которое можно найти, решая сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\frac{1}{2\pi}\int_E \frac{p(x)\,dx}{x-y} = q'(y), \quad y \in E.$$

Аналогичная теорема доказывается для того случая, когда C лежит на единичной окружности.

Автор решает уравнение (1) также и в том случае, когда $q(\sigma)$ только непрерывна на E. Решение делается определенным, если задан интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_E p(s)ds = m$.

Пусть B означает плоскость, разрезанную вдоль C; через $G(z; \zeta) = g(z; \zeta) - ih(z; \zeta)$ обозначена комплексная функция Грина области B (определение комплексной функции Грина и используемого ниже ядра Шварца $T(z; \zeta$; см. С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1949). Положим еще $p_0(s) = h'(z; \infty)$,

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_E p_0(s) \ln \frac{1}{|z-\zeta|}ds, \quad (\gamma = \text{const});$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_E q(t)\,T(\zeta; t)\,dt - m\gamma.$$

Решение уравнения (1) дается формулой

$$p(s) = mp_0(s) - ie^{i\theta(s)}\{[\varphi'(\zeta)]^+ - [\varphi'(\zeta)]^-\},$$

в которой $\theta(s)$ — угол между вещественной осью и касательной к C в точке s. С. Г. Михлин

2279. Решение нелинейных интегральных уравнений методом итераций. Лоткин (The solution by iteration of nonlinear integral equations. Lotkin Mark), J. Math. and Phys., 1955, **33**, № 4, 346—355 (англ.)

Пусть $\|f\| = \max|f(x)|$, $a \leqslant x \leqslant b$,

$$K^2 = \left\| \int_a^b K_1^2(x, s)\,ds + \int_a^b \int_a^b K_2^2(x, s, t)\,ds\,dt \right\|,$$

$M_1^2 = \|F_1^2(s, 0)\|$, $M_2^2 = \|F_2^2(s, t, 0, 0)\|$, $A^2 = b - a$, $\alpha = 1$, если $A \leqslant 1$ и $\alpha = 2$, если $A > 1$.

Доказывается, что интегральное уравнение

$$y(x) = \int_a^b K_1(x, s)\,F_1(s, y(s))\,ds + \int_a^b \int_a^b K_2(x, s, t)\,F_2(s, t, y(s), y(t))\,ds\,dt \qquad (1)$$

имеет единственное решение, если: 1) интегралы $\int_a^b K_1^2(x, s)\,ds$, $\int_a^b \int_a^b K_2^2(x, s, t)\,ds\,dt$ существуют и являются непрерывными функциями x в $[a, b]$; 2) непрерывные функции $F_1(s, u)$ и $F_2(s, t, u, v)$, $a \leqslant s, t \leqslant b$, $-c \leqslant u, v \leqslant c$, удовлетворяют условиям

$$|F_1(s, u_1) - F_1(s, u_2)| \leqslant L_1|u_1 - u_2|,$$

$$|F_2(s, t, u_1, v_1) - F_2(s, t, u_2, v_2)| \leqslant L_2(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|),$$

где L_1, L_2 — положительные числа, не зависящие от s, t, u, v, 3) $0 \leqslant \frac{E}{1-2D} \leqslant c$, где $E = A^\alpha K\sqrt{M_1^2 + M_2^2}$, $D = A^\alpha K\sqrt{L_1^2 + L_2^2}$. Доказательство основано на методе последовательных приближений; в качестве нулевого приближения принимается произвольная непрерывная функция $y_0(x)$, удовлетворяющая условию $\|y_0(x)\| \leqslant c$. Доказывается, что решение уравнения (1) удовлетворяет условию $\|y(x)\| \leqslant c$. Погрешность n-го приближения определяется неравенством

$$\|y - y_n\| \leqslant \|y_1 - y_0\| \cdot \frac{(2D)^n}{1-2D}, \quad n \geqslant 0.$$

Автор указывает, что результаты легко распространяются на интегральные уравнения

$$y(x) = \sum_{i=1}^{r} \int_a^b \cdots \int_a^b K_i(x, s_1, \ldots, s_i)\,F_i(s_1, \ldots, s_i, y(s_1), \ldots, y(s_i))\,ds_1, \ldots, ds_i \qquad (2)$$

и на системы интегральных уравнений

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{q} \int_a^b \cdots \int_a^b K_{ij}(x, s_1, \ldots, s_j)\,F_{ij}(s_1, \ldots, s_j, y_1(s_1), \ldots, y_1(s_j), \ldots, y_p(s_1), \ldots, y_p(s_j))\,ds_1 \ldots ds_j, \qquad (3)$$

где $i = 1, 2, \ldots, p$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. В. А. Щелкунов

2280. О бесконечно близких интегралах систем рекуррентных интегро-дифференциальных уравнений нормальной формы. Жерме (Sur les intégrales infiniment voisines des systèmes d'équations intégro-différentielles récurrentes de forme normale. Germay R. H.), Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1953, **22**, № 5, 198—210 (франц.)

Рассматривается система (1) (реф. 2277), у которой функции $F_{j,n}$ и $f_{j,n}^{(l)}$ зависят дополнительно от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$. Искомые функции $y_{j,n}$ также зависят от этих параметров. В некоторой окрестности точки $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_q = 0$ доказывается непрерывная зависимость от параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ решения этой системы рекуррентных интегро-дифференциальных уравнений, удовлетворяющего начальным условиям

$$y_{j,n}(x_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) = y_{j,n}^0(\lambda_1, \ldots, \lambda_q), (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Условия, налагаемые на функции $F_{j,n}$, $f_{j,n}^{(l)}$, $y_{j,n}^0(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$, аналогичны условиям, которые указаны в реферате 2277, причем $y_{j,n}^0(0, \ldots, 0) = y_j^0$ $(j = 1, 2, \ldots, p;\ n = 1, 2, \ldots)$. Ю. К. Ландо

2281. О решении одного интегрального уравнения, представляющего интерес для астрофизики и статистики. Хуан Су-шу (On the solution of an integral equation of astrophysical and statistical inte-

rest. Huang Su-Shu), Ann. astrophys., 1955, 18, № 1, 42—64 (англ.)

Рассматривается интегральное уравнение

$$g(x)=\frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,e^{-\gamma^2(x-y)^2}\,dy. \qquad (1)$$

Для случая, когда данная функция $g(x)$ четная, приводится решение уравнения (1), полученное с помощью преобразования Фурье. В общем случае решение строится разложением в ряд по полиномам Эрмита $H_n(x)$. Преобразованием масштаба всегда можно сделать $\gamma^2>1/2$. Полагая

$$\varphi(y)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n e^{-y^2/2}H_n(y), \qquad (2)$$

автор находит формулу для коэффициентов B_n; эта формула при $\gamma=1$ упрощается и принимает вид

$$B_m=\frac{3^{(m+1)/2}}{2^{(2m+1)/2}m!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-3x^2/4}H_m(x)\,dx.$$

Отдельно рассмотрен случай $\gamma^2=1/2$. Решение в форме (2) существует, если $g(x)$ разлагается в ряд вида

$$g(x)=e^{-x^2/4}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n;$$

тогда $B_n=a_n\sqrt{2}$. Если такое разложение не имеет места, то автор строит приближенное решение уравнения (1), сохраняя в ряду (2) первые $N+1$ членов. Оценка полученной при этом погрешности не проводится. Рассмотрен вопрос о вычислении $g(x)$, если $\varphi(x)$ известна. Автор рекомендует искать $g(x)$ в виде

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-x^2/2}H_n(x);$$

при $\gamma^2>1/2$ получается формула для коэффициентов A_n, которая упрощается при $\gamma=1$; особенно простой вид формула принимает при $\gamma^2=1/2$; в этом случае

$$A_m=\frac{1}{2^{m+1/2}m!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-y^2/4}y^m\,dy.$$

Из других рассмотренных в статье вопросов отметим данное автором решение уравнения

$$g(x)=\int_0^{\infty}e^{-xy}\varphi(y)\,dy.$$

Это решение строится в виде ряда

$$\varphi(y)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n e^{-y/2}L_n(y),$$

где $L_n(y)$ — полиномы Лагерра. Если функция $\frac{1}{1-t}\times$ $\times g\left(\frac{1+t}{2-2t}\right)$ разлагается в промежутке $|t|<1$ в ряд по степеням t, то коэффициенты D_n определяются соотношением

$$\frac{1}{1-t}g\left(\frac{1+t}{2-2t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n n!t^n.$$

С. Г. Михлин

2282. Приближенное решение интегрального уравнения Винера — Хопфа с приложениями. Койтер (Approximate solution of Wiener — Hopf type integral equations with applications. Koiter W. T.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A 58, № 2, 257—258; Indagationes math., 1955, 17, № 2, 257—258 (англ.)

Выдержка из работы автора (РЖМат, 1956, 451).

2283. Интегральные уравнения, которым удовлетворяют функции Ламе-Вангерина. Лам (Integral equations satisfied by Lamé-Wangerin functions. Lambe C. G.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, 10, № 2, 71—75 (англ.)

Как известно, дифференциальное уравнение Ламе

$$\frac{d^2u}{dt^2}-[n(n+1)x(t)+h]u=0,$$

где $x(t)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, определяемая соотношением

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=4x(x-1)(x-a),$$

принимает, при введении нового независимого переменного $x=x(t)$, алгебраический вид

$$4x(x-1)(x-a)\frac{d^2u}{dx^2}+2\{3x^2-2(a+1)x+a\}\frac{du}{dx}-$$
$$-\{n(n+1)x+h\}u=0. \qquad (1)$$

Автор рассматривает случай, когда n равно половине нечетного числа ($n=m+1/2$, m — целое), и ставит себе цель получить некоторые интегральные уравнения для так называемых характеристических решений преобразованного уравнения (1). Если ввести независимое переменное z соотношением

$$x=(z^2-a)^2/4z(z-1)(z-a)$$

и положить

$$v(z)=u(x)\{z(z-1)(z-a)\}^{(2m+1)/4}, \qquad (2)$$

то для $v(z)$ получится уравнение

$$z(z-1)(z-a)\frac{d^2v}{dz^2}-m\{3z^2-2(a+1)z+a\}\frac{dv}{dz}+$$
$$+\{m(2m+1)z-(m+1/2)^2(a+1)-h\}v=0, \qquad (3)$$

которое обладает следующими свойствами: а) если $v(z)$ есть решение (3), то $z^{2m+1}v(a/z)$ также является решением этого уравнения, б) если положить $v(z)=\sum_0^{\infty}G_\nu(h)z^\nu$, то между тремя последовательными коэффициентами $G_\nu(h)$ получается рекуррентная зависимость, откуда следует, что для того чтобы $v(z)$ было полиномом степени k, необходимо и достаточно, чтобы k было равно m или $2m+1$ и чтобы, кроме того, h было корнем уравнения $G_{k+1}(h)=0$ степени $k+1$. Согласно одной теореме автора и Уорда (Lambe C. G., Ward D. K., Quart. J. Math. (Oxford ser.), 1954, 5, 81—97), если $v(z)$ есть решение уравнения (3), которое соответствует характеристическому значению h_ν для h, и если обозначить через $F(a,b,c,x)$ гауссову гипергеометрическую функцию, то решением того же уравнения будет также интеграл

$$u(z)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int_G F\left(-m,-2m-1,-m,\frac{zt}{a}\right)\times$$
$$\times\frac{v(t)\,dt}{\{t(t-1)(t-a)\}^{m+1}}=\frac{\lambda}{2\pi i}\int_C\left(1-\frac{zt}{a}\right)^{2m}\times$$
$$\times\frac{z(t)\,dt}{\{t(t-1)(t-a)\}^{m+1}},$$

где интегрирование производится по замкнутому контуру C, который охватывает один или несколько полюсов 0, 1, a. По свойству а) функция

$$W(z) = z^{2m+1} u\left(\frac{a}{z}\right) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_C (z-t)^{2m+1} \times \times \frac{v(t)\,dt}{\{t(t-1)(t-a)\}^{m+1}}$$

также является решением уравнения (3).

Далее автор подробно исследует случаи, когда C охватывает только один или только два из полюсов 0, 1, a, и определяет собственные значения λ, когда $u(z)$ соответственно $w(z)$ совпадает с $v(z)$.

Понимание рассматриваемой работы затруднено некоторыми ошибками в формулах. Так, зависимость (2) между u и v напечатана с ошибкой:

$$u(x) = \{z(z-1)(z-a)\}^{\frac{2m+1}{4}} v(z).$$

Точно так же первый член коэффициента при v в (3) напечатан с ошибкой $(m+1/2)(m+3/2)$ вместо $(2m+1)$.

Л. Чакалов

См. также: 2235, 2238, 2245, 2327, 2462, 2464

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2284. Об одном семействе гиперповерхностей в $n+1$-мерном пространстве. Яблоков В. А., Науч. тр. Казанск. ин-та инж.-строит. нефт. промсти, 1955, № 3, 33—37

Показывается, что экстремальная функция F функционала

$$I = \int f(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)\,dx, \quad p_i = dy_i/dx,$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\partial f/\partial p_i = \partial F/\partial y_i, \quad \partial F/\partial x + \Sigma(\partial F/\partial y_k)\,p_k = f. \quad (1)$$

Приводится пример.

Примечание референта. Результат работы известен (Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, М., Изд-во ин. лит., 1950, 32). Уравнения (1) не упрощены, что привело к излишним выкладкам.

А. П. Норден

2285. К вопросу о построении вариационных методов расчета. Свирский И. В., Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 4, 453—462

Ставится задача о приближенном определении числа $\Phi(f)$, где Φ — заданный функционал, а функция f есть решение уравнения (вообще говоря, нелинейного) $Af = 0$. Для решения ее предлагается следующий прием: f ищется в виде $f \approx c\varphi_0$, причем функция φ_0 задается, а постоянная c определяется из уравнения $\psi(Ac\varphi_0) = 0$, в котором ψ — некоторый заранее выбранный функционал, подчиненный условию $\psi(0) = 0$. Чтобы ошибка в определении искомой величины $\Phi(f)$ возможно мало зависела от погрешности равенства $f \approx c\varphi_0$, функционал ψ определяется из условия стационарности выражения $\Phi(c\varphi_0)$ при вариациях функции $c\varphi_0$, не нарушающих уравнения $\psi(Ac\varphi_0) = 0$. Это приводит к следующему уравнению Эйлера — Лагранжа только что сформулированной вариационной задачи:

$$L\Phi(c\varphi_0) + \lambda L\psi(Ac\varphi_0) = 0 \text{ при } c\varphi_0 = f,$$

где L — некоторый линейный оператор, а λ — множитель Лагранжа. Так как функция f неизвестна, то рекомендуется определить ψ из уравнения

$$L\Phi(c\varphi_0) + \lambda L\psi(Ac\varphi_0) = 0,$$

затем найти c из уравнения $\psi(Ac\varphi_0) = 0$.

Рассмотрен также более точный прием, когда $f \approx c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$; функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ считаются данными, а коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ определяются из системы уравнений

$$\psi_k[A(c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n)] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

требование стационарности выражения $\Phi(\Sigma c_k\varphi_k)$ приводит к некоторой системе уравнений относительно функционалов ψ_k, которую автор не выписывает.

Свою идею автор поясняет на двух примерах: в первом ищется емкость данного проводника, во втором — собственное число оператора $a(x, y)\Delta\varphi$ при краевом условии $\partial\varphi/\partial n + k\varphi = 0$.

Полученные в первом примере результаты применяются к исследованию изменения емкости проводника при малых изменениях его формы.

С. Г. Михлин

См. также: 2234, 2435, 2482

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

2286. О двух взаимно обратных комбинаторных формулах. Сюй (Note on a pair of combinatorial reciprocal formulas. Hsu L. C.), Math. Student, 1954, 22, № 4, 175—178 (англ.)

Показано, что из равенств

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k g(k) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

вытекает

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k f(k) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Без доказательства приведен более общий результат: Если

$$F(n_1, \ldots, n_s) = \sum_{0 \leqslant k_i \leqslant n_i} C_{n_1}^{k_1} \ldots C_{n_s}^{k_s} (-1)^{k_1+\ldots+k_s} G(k_1, \ldots, k_s),$$

то

$$G(n_1, \ldots, n_s) = \sum_{0 \leqslant k_i \leqslant n_i} C_{n_1}^{k_1} \ldots C_{n_s}^{k_s} (-1)^{k_1+\ldots+k_s} F(k_1, \ldots, k_s)$$

($n_i = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, s$). Рассмотрены примеры. Г. П. Сафронова

2287. Обобщение одной теоремы Мерсера. Чакалов (Обобщение на една теорема за сходимост на Мерсер. Чакалов Любомир), Изв. Матем. ин-т Българ. АН, 1954, **1**, № 2, 85—89 (болг.; резюме русс.)

Доказывается следующее обобщение теоремы Мерсера (Mercer J., Proc. London Math. Soc., 1906, 5, ser. 2, 206—224): Пусть $\{x_n\}_1^\infty$ — любая последовательность чисел (комплексных), положим

$$y_n = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, \quad z_n = x_n + \lambda y_n,$$

где $p_n > 0$, $\lim (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = \infty$, λ — комплексное число, такое, что $\operatorname{Re}\lambda > -1$. В таком случае, если последовательность $\{z_n\}_1^\infty$ сходится, то сходится и последовательность $\{x_n\}_1^\infty$.

Теорема Мерсера была доказана при условиях $p_n \equiv 1$, $\lambda > -1$. В статье имеются опечатки: на стр. 86, строка 7 снизу, напечатано $y_1 = x_1 = \ldots$, нужно $|y_1| = |x_1| = \ldots$; на стр. 87, строка 11 сверху, в формуле под знаком $\Pi_{k=2}^{\nu}$ вместо p_{k-1} должно быть P_{k-1}.

М. Щеглов

2288. Классические непрерывные дроби. Логарифмический ряд. Их аппроксимация выражениями, которые строятся элементарно. Кавалларо (Classiche frazioni continue. Serie logaritmiche. Loro approssimata espressione costruibile elementarmente. Cavallaro Vincenzo G.), Period. mat., 1954, **32**, № 5, 308—310 (итал.)

Приведены приближенные представления $4/\pi$, $\frac{1}{2}\ln 3$ и т. д. при помощи выражений, которые можно построить циркулем и линейкой. И. М. Яглом

2289. Доказательство одного неравенства Карлемана. Карлсон (A proof of an inequality of Carleman. Carleson Lennart), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 6, 932—933 (англ.)

Дается элементарное доказательство неравенства:

$$\int_0^\infty x^p e^{-m(x)/x}\,dx \leqslant e^{p+1}\int_0^\infty x^p e^{-m'(x)}dx, \qquad (1)$$

где $m(x)$ — выпуклая для $x \geqslant 0$ функция, $m(0) = 0$; $-1 < p < \infty$. Постоянная e^{p+1} не может быть улучшена. При $p = 0$, $m(x)$ — ломаная с вершинами в точках $\left(n, \sum_{k=1}^n \ln(1/a_k)\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ из (1) получается известное неравенство Карлемана:

$$\sum_{n=1}^\infty (a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} < e\sum_{n=1}^\infty a_n,$$

где $\sum_{n=1}^\infty a_n$ — сходящийся ряд с положительными членами. Я. И. Житомирский

2290. Об одном случае решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Шушара Г. Н., Науч.-исслед. тр. Всес. заоч. ин-та текстильной и легкой пром-сти, 1955, № 1, 96—101

Операционное исчисление применяется к решению линейной неоднородной системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$f(T)y(t) = \varphi(T)x(t),$$

где f и φ — полиномы от оператора T с матричными коэффициентами, $x(t)$ и $y(t)$ — матрицы-столбцы (y — неизвестное), $Ty(t) = y(t+\tau)$. Решение этой системы в случае ступенчатых функций известно (Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954, § 2, 26). Автор предполагает, что рассматриваемые функции нестуненчатые. Ход решения от этого, по сравнению с известным, изменяется мало. Э. Я. Риекстыньш

2291. О приложении метода вариации параметра к теории нелинейных функциональных уравнений. Даниденко Д. Ф., Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 1, 18—28

Пусть $C(G)$ — пространство непрерывных функций, заданных на множестве G конечной меры n-мерного пространства. Рассматривается семейство функций $\varphi(x, \lambda)$, принадлежащих C и дифференцируемых по $\lambda \in [0, d]$, и нелинейный оператор $K(x, \varphi(x, \lambda))$, определенный на этом семействе функций.

Предполагается, что

$$\frac{\partial K(x, \varphi(x, \lambda))}{\partial\lambda} = \int_G Q(x, x', \varphi)\frac{\partial\varphi(x, \lambda)}{\partial\lambda}\,dx',$$

где для всех $|\varphi(x, \lambda)| \leqslant L$ (L — постоянная) выполнены условия: $|Q(x, x', \varphi)| \leqslant M$, $|Q(x, x', \varphi') - Q(x, x', \varphi'')| \leqslant N|\varphi' - \varphi''|$, M, N — положительные постоянные.

Теорема. Если для всех $|\varphi| \leqslant L$, $x \in G$, $\lambda \leqslant d$ (d — постоянная) определитель Фредгольма $D(\lambda, \varphi)$ ядра $Q(x, x', \varphi)$ удовлетворяет неравенству $|D(\lambda, \varphi)| \geqslant \alpha > 0$, где α — постоянная, то для всякого положительного $\lambda \leqslant \lambda^* \leqslant d$, где λ^* определяется некоторым соотношением, уравнение

$$\varphi(x, \lambda) + \lambda K(x, \varphi(x, \lambda)) = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение $\varphi^*(x, \lambda)$, удовлетворяющее неравенству $|\varphi^*(x, \lambda)| \leqslant L$. Метод доказательства заключается в следующем: производная по λ от оператора $\varphi(x, \lambda) + \lambda K(x, \varphi(x, \lambda))$ приравнивается нулю, при этом получается следующее уравнение

$$\varphi_\lambda'(x, \lambda) + \lambda\int_G Q_\varphi'(x, x', \varphi)\,\varphi_\lambda'(x', \lambda)\,dx' = -K(x, \varphi), \qquad (2)$$

для которого доказывается существование единственного решения $\varphi^*(x, \lambda)$, $|\varphi^*| \leqslant \lambda$. Не показано, как из существования решения уравнения (2) следует существование решения уравнения (1). М. М. Вайнберг

2292. Обобщение одного тождества Альфана. Гинан (Généralisation d'une identité de M. Halphen. Guinand André Paul), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 6, 582—583 (франц.)

Пусть a, s, θ — действительные числа, $0 < s < 1$, $f(x) \in L(0, \infty)$ и $\int_0^1 |f(x)|\,x^{s-1}\,dx < \infty$; $g(x)$ — косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$. Непосредственным следствием равенств Парсеваля для косинус-преобразований Фурье функций $f(x)\cos ax$ и x^{s-1} и для синус-преобразований Фурье функций $f(x)\sin ax$ и x^{s-1} (Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948, стр. 76, 238) является тождество

$$\int_0^\infty f(x)\sin(ax + \theta)\,x^{s-1}\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(s)}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \left[g(x-a)\sin\left(\frac{\pi s}{2} + \theta\right) - g(x+a)\sin\left(\frac{\pi s}{2} - \theta\right)\right]x^{-s}\,dx.$$

При $\theta = \pi/4$, $s = 1/2$ и $f(x) = \exp(-x^2)$ оно обращается в тождество Альфана (РЖМат, 1954, 4063). В заметке имеются опечатки. М. Н. Олевский

2293. **Обобщение теоремы Г. Сеге и его применение к изучению случайных процессов. Гренандер, Розенблатт** (An extention of a theorem of G. Szegö and its application to the study of stochastic processes. Grenander Ulf, Rosenblatt Murray), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 1, 112—126 (англ.)

Исследуется задача о нахождении минимума μ_n квадратичной формы $Q_n = c'M^{(n)}c$ (c изменяется), где $M^{(n)}$ — эрмитова матрица с элементами $m_{p,q}^{(n)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-q)} f(\lambda)\,d\lambda$, $p, q = 0,1,\ldots,n$, $f(\lambda)$ — неотрицательная интегрируемая функция, c — вектор-столбец с элементами $c_0, c_1, \ldots, c_n$, c' — вектор-строка с элементами $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n$.

Минимум ищется при следующих условиях: выбираются системы чисел β_j^k, $j = 1, 2, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n_j$, не равных одновременно нулю, и набор $\{\alpha_j\}$ из m различных точек, лежащих внутри единичного круга, и требуется, чтобы было $P_n^{(k)}(\alpha_j) = \beta_j^k$, где $P_n(w) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu w^\nu$. Очевидно, $Q_n = \int_{-\pi}^{\pi} |P_n(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda)\,d\lambda$. При $m = 1$, $k = 0$ эта задача изучалась Г. Сегё (Szegö G., Math. Z., 1920, **6**, 167—202; 1921, **9**, 167—190).

При некоторых ограничениях, налагаемых на $f(\lambda)$, авторы находят выражения для μ_n и $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$, рассматривая отдельно два случая: а) все α_j лежат внутри единичного круга, б) все α_j лежат на его границе. При этом во втором случае $\mu = 0$, и выражения для μ_n имеют характер асимптотических формул.

Указывается, как оценить μ_n и μ в остальных возможных вариантах условия

$$P_n^{(k)}(\alpha_j) = \beta_j^k.$$

Исследуется скорость приближения к пределу в случае $P(0) = 1$.

В последнем параграфе рассматриваются приложения полученных результатов к решению проблем экстраполирования и оценки средних значений $m_t = Ex_t$ случайных процессов (таких, что $x_t - m_t = y_t$ — стационарные в широком смысле случайные процессы). В статье имеются серьезные опечатки. М. С. Пинскер

2294. **О дифференциальных инвариантах в задаче определения числа корней системы уравнений и числа нулей или полюсов функции комплексного переменного. Сергиеско** (Sur des invariants différentiels dans le problème du nombre des racines communes à un système d'équations et du nombre de zéros ou des poles d'une fonction de variable complexe. Serghiesco Stephan), Rend.Circolo mat. Palermo, 1954, **2**, № 3, 414—441 (франц.)

Основанный на теореме Кронекера метод Пикара определения числа корней системы уравнений $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в заданной области модифицируется следующим образом. Полагая (для системы $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$) $A = f\partial\varphi/\partial x - \varphi\partial f/\partial x$, $B = f\partial\varphi/\partial y - \varphi\partial f/\partial y$, будем иметь, что

$$(2\pi)^{-1} \int_C (A^2 + B^2)^{-1} (A\,dB - B\,dA)$$

представляет число корней данной системы в области, ограниченной контуром C, сложенное с числом m, где m есть разность числа корней системы $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$ ($D = \partial(f, \varphi)/\partial(x, y)$) в этой области, для которых $\delta > 0$ ($\delta = \partial(A, B)/\partial(x, y)$), и числа корней, для которых $\delta < 0$. Для m находится выражение

$$m = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint \left[\frac{\Delta + \varepsilon\delta}{\{A^2 + B^2 + (D+\varepsilon)^2\}^{3/2}} - \frac{\Delta - \varepsilon\delta}{\{A^2 + B^2 + (D-\varepsilon)^2\}^{3/2}} \right] dx\,dy,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & \partial A/\partial x & \partial A/\partial y \\ B & \partial B/\partial x & \partial B/\partial y \\ D & \partial D/\partial x & \partial D/\partial y \end{vmatrix}$$

причем $m = 0$, если $D \neq 0$ внутри C. Результат обобщается на системы n уравнений с n неизвестными. Дифференциальные формы, аналогичные A и B, применяются к рассмотрению интеграла от логарифмической производной функции комплексного переменного. В. И. Левин

2295. **Неопределенности функций многих переменных. Вебер** (Formes indéterminées dans les fonctions de plusieurs variables. Weber), Rev. math. spéc., 1955, **65**, № 7, 461—464 (франц.)

Показывается, что $z(x, y)$, равная отношению функций двух переменных

$$z = \frac{xA(x, y) + yB(x, y)}{xC(x, y) + yD(x, y)},$$

стремится к $(A_0 + B_0\mu)/(C_0 + D_0\mu)$, зависящему от μ, когда x и $y \to 0$, а A, B, C, D стремятся соответственно к A_0, B_0, C_0, D_0. $\mu = \lim_{x\to 0}(y/x)$ — переменная величина, равная угловым коэффициентам касательных, проведенных к различным кривым в начале координат. Следовательно, при x и $y \to 0$, $z(x, y)$ будет иметь различные пределы. Это обстоятельство не имеет места для функций одной переменной.

Предполагая непрерывность $F(x, y)$ и ее первых частных производных в точке $M_0(x_0, y_0)$ и существование ограниченных частных производных второго порядка, автор показывает, что без определенных ограничений, накладываемых на $F(x, y)$, частные производные первого порядка и на путь, по которому $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$ нельзя сказать, что ΔF эквивалентно dF. На примере показывается, что $\Delta F/dF$ может стремиться к любому пределу, отличному от 1, при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$

Формулируется теорема, дающая достаточные условия эквивалентности ΔF и dF. И. В. Матвеев

2296. **Равномерная дифференцируемость функции и непрерывность ее производных. Хефтер** (Gleichmäßige Differenzierbarkeit einer Funktion und Stetigkeit ihrer Ableitung in einem Bereich. Hefftter Lothar), Arch. Math., 1954, **6**, № 1, 45—46 (нем.)

Доказывается теорема: Если действительная функция $f(x, y)$ непрерывна и равномерно дифференцируема в односвязной области как по x, так и по y, то ее производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ непрерывны в этой области. Указывается следствие для функции одного переменного.

Примечание референта. Односвязность области не существенна для справедливости теоремы. А. Я. Дубовицкий

2297. **Определения элементарных трансцендентных функций через интегральные представления. Левин В. И.**, Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та, 1954, 5, 76—106

Автор выводит основные свойства функций e^x, $\operatorname{tg} x$, $\sin x$, $\cos x$, исходя из определений

$$\ln x = \int_1^x t^{-1}dt, \quad \operatorname{arc\,tg}\, x = \int_0^x (1 + t^2)^{-1}dt.$$

И. В. Матвеев

2298. **Об одной абсолютной форме обобщенной теоремы Грина. Ди-Пало** (Sopra una forma assoluta

del teorema di Green generalizzato. Di Palo Raffaele), Giorn. mat. Battaglini, 1955, **83**, № 1, 61—67 (итал.)

Подставляя в формулу Грина

$$\int\left\{\alpha\left(\frac{d\beta}{dP}\,\bar{n}\right)-\left(\frac{d\alpha}{dP}\,\bar{n}\right)\beta\right\}d\sigma+\int\{\alpha(\Delta\beta)-(\Delta\alpha)\beta\}\,d\tau=0$$

по очереди вместо (α, β)

$$(\alpha, \Delta^{n-1}\beta),\quad (\Delta\alpha, \Delta^{n-2}\beta),\quad \ldots,\ (\Delta^{n-1}\alpha, \beta)$$

и суммируя полученные формулы, найдем:

$$\sum_{h=0}^{n-1}\int\left\{(\Delta^h\alpha)\left(\frac{d\,(\Delta^{n-h-1}\beta)}{dP}\,\bar{n}\right)-\left(\frac{d\,(\Delta^h\alpha)}{dP}\,\bar{n}\right)(\Delta^{n-h-1}\beta)\right\}d\sigma+$$

$$+\int\{\alpha\,(\Delta^n\beta)-(\Delta^n\alpha)\,\beta\}\,d\tau=0.$$

Из этого соотношения обычным путем выводится представление полигармонической функции

$$4\pi\alpha_0=\sum_{h=0}^{n-1}\frac{1}{(2h)!}\int\left\{(\Delta^h\alpha)\left(\frac{dr^{2h-1}}{dP}\,\bar{n}\right)-\left(\frac{d\,(\Delta^h\alpha)}{dP}\,\bar{n}\right)r^{2h-1}\right\}d\sigma,$$

где $\Delta^n\alpha=0$. В. И. Левин

2299. Асимптотические разложения посредством метода стационарной фазы. Фокке (Asymptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationären Phase. Focke Joachim), Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. math.-naturwiss. Kl., 1954, **101**, № 3, 1—48 (нем.)

Исследуется асимптотическое поведение интеграла $I=\iint g(x, y)\,e^{-p\varphi(x, y)}dx\,dy$ при $\varkappa=|p|\to\infty$ ($\arg p=$ = const). Устанавливается, во-первых, что асимптотически I есть сумма интегралов по окрестностям критических точек, во-вторых, дается асимптотическое разложение I по степеням $1/\varkappa$.

Точные формулировки и доказательства даются в первой главе для одномерного интеграла $\int_a^b g(x)e^{-p\varphi(x)}dx$. $\varphi(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция с конечным числом критических точек ξ, где $\varphi'(\xi)=\ldots$ $\ldots=\varphi^{(r-1)}(\xi)=0$, $\varphi^{(r)}(\xi)\neq 0$ $(r\geqslant 2)$, $g(x)$ также бесконечно дифференцируема (можно допустить интегрируемые особенности).

К критическим точкам причисляются концы интервала $\xi_0=a$ и $\xi_{N+1}=b$. При выводе асимптотических разложений рассматриваются отдельно случаи а) $p=\varkappa i$; б) $p=\varkappa e^{i\theta}\left(\theta<\frac{\pi}{2}\right)$. В случае б) предполагается, что $\varphi(x)\geqslant 0$, и разложение, естественно, зависит лишь от точек, где $\varphi(x)=0$. В окрестности каждой критической точки функции g и φ предполагаются аналитическими.

Интегрированием по частям легко устанавливается:

$$I=I_0^+ + I_1+\ldots+I_N+I_{N+1}^- + O\left(\frac{1}{\varkappa^\infty}\right),$$

где $I_k^\pm$ есть интеграл по (левой или правой) окрестности особой точки ξ_k. $I_k=I_k^+ + I_k^-$. Для получения асимптотического разложения автор вводит в окрестности особой точки ξ новую переменную u так, чтобы

$$\varphi(\xi+h)=\frac{1}{r!}\varphi^{(r)}(\xi)\,u^r=\sum\frac{\varphi^\nu(\xi)}{\nu!}h^\nu$$

коэффициенты h_ν разложения $h(u)=\sum h_\nu u^\nu$ могут быть определены рекуррентными формулами.

В основном случае а) имеет место разложение

$$I_\xi^+=e^{-i\varkappa\varphi(\xi)}\cdot\sum_{\nu=1}^\infty a_{\nu-1}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{\pm i}{|\varphi_r|}\right)^{\frac{\nu}{r}}\Gamma\left(\frac{\nu}{r}\right)\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{\nu}{r}}$$

Числа a_ν есть коэффициенты разложения

$$g(\xi+h)\,dh=\sum a_\nu u^\nu du,\quad \varphi_r=\frac{\varphi^{(r)}(\xi)}{r!}$$

и $\mp i$ соответствует $\varphi_r(\xi)\gtrless 0$.

Во второй главе аналогичные теоремы устанавливаются для двойного интеграла. Насколько известно референту, доказательства их даются впервые. Критическими точками являются внутренние точки, где $d\varphi(\xi, \eta)=0$ (предполагается, что $d^2\varphi(\xi, \eta)\neq 0$). Граница области предполагается состоящей из конечного числа бесконечно дифференцируемых дуг; критическими точками являются также точки, где производная φ вдоль границы равна 0, и крайние точки дуг, составляющих границу. Новые параметры в окрестности критической точки (ξ, h) вводятся равенством $\varphi(x, y)=$ $=\varphi(\xi, \eta)+\varphi_{20}u^2+\varphi_{02}v^2$. Пусть далее $g(x, y)\,dx\,dy=$ $=\sum a_{\tau,\sigma}u^\tau v^\sigma du\,dv$.

Ограничимся приведением асимптотического разложения для внутренней критической точки в случае $p=i\varkappa$

$$I_{(\xi,\eta)}\doteq e^{-i\varkappa\varphi(\xi,\eta)}\frac{2\pi j}{\sqrt{|\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2|}}\sum_{n=0}^\infty An\left(\frac{1}{i\varkappa}\right)^{n+1}$$

Здесь $A_n=\sum_{\nu=0}^n a_{2\nu,\,2n-2\nu}\dfrac{\nu!!\,(n-\nu)!!}{(2\varphi_{20})^\nu(2\varphi_{02})^{n-\nu}}$,

$$j=\begin{cases}\pm 1, & \text{если } \varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2>0,\quad \varphi_{xx}\gtrless 0,\\ i, & \text{если } \varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2<0.\end{cases}$$

В заключение заметим, что если не предполагать бесконечной дифференцируемости входящих функций, то асимптотические разложения обрываются на нужном члене. Э. Э. Шноль

2300 К. Числа и арифметические действия. Чех (Čísla a početni výkony. Čech Eduard). Praha, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), 1954, 248 str., 21, 40 Kčs (чеш.)

Автор обращается к постоянно растущему кругу тех читателей, для которых математика не является целью, которые не прошли в ней высшего обучения, но стремятся познать способ мышления, характерный для современной математической науки. В первых трех главах (I. Целые числа, II. Рациональные числа, III. Вещественные числа) автор генетически переходит от натуральных чисел к вещественным. Глава IV содержит основы теории делимости и комбинаторные и основные сведения о многочленах. Глава V излагает начала аналитической геометрии в объеме, необходимом для геометрического (графического) понимания учения о функциях одного переменного и о неравенствах. В теории натуральных чисел автор исходит из представления о конечных множествах и их пересчитывания. Сумма и произведение определяются на множественной основе.

Поскольку речь идет об иррациональных числах, книга является первой книгой на чешском языке, излагающей теорию Кантора. Путь к основам анализа прокладывается не через понятие верхней и нижней граней, а через понятие предела последовательности. Автор

начинает с числовых опытов, однако быстро подводит читателя к достаточно абстрактной дедукции. Продвижение логически корректно; целью же служит живое познание. Этому автор помогает тем, что в подходящих местах сознательно предоставляет читателю проведение формального доказательства тем, что расширение запаса чисел интуитивно обосновано и тем, что перед эпсилоновыми доказательствами вставляется интуитивный набросок. Обстоятельно излагаются вопросы упорядочения множеств и дедекиндовых сечений. M. Neubauer.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2301. Об одном свойстве бесконечных произведений. **Слепенчук К. М.**, Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 151—153

Класс всех сходящихся произведений

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k) \qquad (1)$$

можно разбить на два подкласса:

(A) — подкласс сходящихся произведений, для которых оба ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2$$

сходятся;

(B) — подкласс сходящихся произведений, для которых оба ряда расходятся.

Доказывается следующая теорема: Если сходящееся бесконечное произведение (1) принадлежит классу (B), то при любом действительном значении $x \neq 0,1$ произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k x) \qquad (2)$$

расходится.

Если сходящееся бесконечное произведение (1) принадлежит классу (A), то произведение (2) сходится при любом действительном x. К. М. Шайдуков

2302. Числа Бернулли, суммы степеней и ряд Стирлинга. Бергер (Bernoullische Zahlen, Potenzsummen und Stirlingsche Reihe. **Berger** E. R.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 1/2, 70—71 (нем.)

Дается новый вывод (ср. РЖМат, 1955, 838) выражения степенных сумм $S_k(n)$ через числа Бернулли. Из функционального уравнения $S_k(n+1) - S_k(n) = n^k$ с помощью теоремы о конечном приращении и формального интегрирования находится соотношение $S_k(n) = [(n-\theta)^{k+1} - (-\theta)^{k+1}]/(k+1)$, приводящее к уравнениям $(1-\theta)^r = (-\theta)^r$ $(1 < r \leqslant k+1)$, который можно удовлетворить, рассматривая $-\theta = C$ как символ, подчиненный требованию, чтобы при развертывании степеней бинома $n+C$ показатели степеней C рассматривались как индексы. Из этого выводится, что C_r должны совпадать с числами Бернулли B_r. Аналогичные рассуждения используются далее при выводе ряда Стирлинга. А. Г. Школьник

2303. Теоремы тауберова типа для бесконечных произведений. Калашников (Теореми тауберового типу для нескінченних добутків. Калашников М. Д.), Допов ді АН УРСР, 1955, № 4, 318—322 (укр.; резюме русс.)

Пусть $A = \| a_{nk} \|$ — бесконечная матрица, для которой $a_{nk} \to a_k$ $(n \to \infty,\ k = 1, 2, \ldots)$. Произведение $\Pi_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ называется суммируемым (A) к значению $P \neq 0$, если

$$\Pi_{k=1}^{\infty}(1+a_{nk}u_k) \to P \ (n \to \infty).$$

Матрица A называется регулярной, если любое сходящееся произведение суммируется (A) к своему значению. Условия регулярности матрицы A даны автором в другой статье (Укр. матем. ж., 1951, 3, 477).

Пусть задана регулярная матрица A, удовлетворяющая условиям: $a_{nk} \to 0$ $(k \to \infty,\ n = 1, 2, \ldots)$, существует последовательность натуральных чисел $\{k_n\}$, $k_n \to \infty$, такая, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} |a_{nk} - 1| + \sum_{k=k_n+1}^{\infty} |a_{nk}| < M \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказывается (теорема 2): Для того чтобы любое суммируемое (A) произведение

$$\Pi_{k=1}^{\infty}(1+u_k), \text{ где } u_k = O(k^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

было сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы $k'_{n+1} - k'_n = O(k'^{\alpha}_n)$, где $\{k'_n\}$ — неубывающая последовательность $\subset \{k_n\}$.

Имеются опечатки, на стр. 321, строки 5 сверху и 5 снизу, под знаком Σ вместо k_{n+1} должно стоять $k_n + 1$. Теорема 3 (сформулированная автором) перекрывается более сильной теоремой 2. М. П. Щеглов

2304. К обобщению тауберовых теорем Виджаяраагавана. Щеглов М. П., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 3, 333—338

Для заданного ряда $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$ положим:

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu, \qquad d_s = \lim s_n;$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu, \qquad d_\sigma = \lim \sigma_n;$$

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{u}} \qquad d_\varphi = \lim \varphi(u).$$

Пусть V_0, V_C, W_0 и W_C — классы рядов $\{\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n\}$, определяемые соответственно условиями: $a_n < o(1/n\ln\ln n)$, $a_n < C/(n\ln\ln n)$, $a_n < o(1/n)$ и $a_n < C/n$. Доказывается:

1. а) $d_s = d_\sigma = d_\varphi$ при $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n \in V_0$; б) $\sup_{V_C}\{d_\sigma - d_s\} = \sup_{V_C}\{d_\varphi - d_s\} = C$.

2. а) $d_\sigma = d_\varphi$ при $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n \in W_0$; б) Если $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n \in W_C$, то числа d_σ и d_φ одновременно конечные или бесконечные одного знака.

3. Пусть $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n \in W_C$ и $d_s = d_\sigma$. Тогда $d_\varphi = d_\sigma$.

4. Имеет место $\sup_{W_C}\{D_s - D_\sigma\} = C$, где $D_s = \overline{\lim} s_n$, $D_\sigma = \overline{\lim}\,\sigma_n$.

Доказанные теоремы являются обобщениями теорем Виджаяраагавана (Vijaayraghavan I. I., J. London Math. Soc., 1927, 2, 215—222). М. Д. Калашников

2305. О суммировании по Абелю обобщенных интегральных преобразований. Джрбашян М. М., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1954, 7, № 6, 1—26 (резюме арм.)

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 3261) были изучены интегральные преобразования функций с помощью ядер e^{-z} и $E_\rho(z, \mu)$, подобные преобразованиям Фурье. Пусть $\varphi(v)$ и $\Phi(z)$ — функции, значащиеся в указанном реферате. Было показано, что если $\varphi(v)$ удовлетворяет определенным условиям на $(0, +\infty)$, то тогда она может быть выражена через $\Phi(z)$ определенной формы интегралом (формула обра

щения). В данной работе ставится вопрос о том, как можно выразить $\varphi(v)$ через $\Phi(z)$ при менее ограничительных условиях, наложенных на $\varphi(v)$ (при этих условиях формула обращения, возможно, теряет смысл). Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$\varphi_\varepsilon(u) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^\infty e^{-\varepsilon t^\rho}\,\Phi\left(te^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\times\right.$$

$$\times E_\rho\left(ute^{i\frac{\pi}{2\rho}};\,\mu\right)t^{\mu\rho-1}dt + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^\infty e^{-\varepsilon t^\rho}\,\Phi(te^{-i\frac{\pi}{2\rho}})\times$$

$$\left.\times\, E_\rho\left(ute^{-i\pi/2\rho};\,\mu\right)t^{\mu\rho-1}dt\right\}.$$

Теорема 1 утверждает, что если функция $\varphi(v)$ удовлетворяет условию (1) указанного реферата, то тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left[\varphi(u+0)+\varphi(u-0)\right]$$

при всех $u > 0$, для которых правая часть имеет смысл (из этого следует, что $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(u) = \varphi(u)$ почти при всех $u > 0$), и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(0) = \frac{1}{2\rho}\,\varphi(+0)$$

(при условии, что $\varphi(+0)$ существует). При $\rho \geqslant 1$ показывается, кроме того (теорема 2), что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(re^{i\theta}) = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad \pi/\rho \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \pi/\rho.$$

Отметим, что функция $\Phi(z)$ выражается через $\varphi(v)$ интегралом с ядром $e^{-v^\rho z^\rho}$, а $\varphi_\varepsilon(u)$ выражается через $\Phi(z)$ интегралом с ядром $E_\rho(u,\ z;\ \mu)$. Можно рассматривать, наоборот, прямое преобразование функции при помощи ядра $E_\rho(u,\ z;\ \mu)$, а обратное — при помощи ядра $e^{-v^\rho z^\rho}$. На этом пути получается теорема (теорема 3), аналогичная теореме 1. А. Ф. Леонтьев

2306. О суммировании разложений по собственным функциям. I. Авадхани (On the summability of eigenfunction expansions. I. Avadhani T. V.), J. Indian Math. Soc., 1954, **18**, № 1, 9—18 (англ.)

Пусть D — конечная область в E_k с границей B. Обозначим через $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \to \infty$ собственные значения и через $w_n(x)$ соответствующие ортонормированные собственные функции задачи

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in D, \quad u|_B = 0.$$

Пусть $f(x) \in L_2(D)$. Положим

$$f(x) \sim \sum_n a_n w_n(x), \tag{1}$$

где $a_n = \int_{(D)} f(x)\,w_n(x)\,dx$. Доказывается несколько теорем о поведении средних Рисса порядка $\alpha \geqslant (k-1)/2$ ряда (1), среди которых основной является теорема: Каждой точке $x_0 \in D$ соответствует положительное число δ' такое, что для $0 < \delta < \delta'$ и $R \to \infty$

$$\sum_{\lambda_n < R}\left(1 - \frac{\lambda_n}{R}\right)^\alpha a_n w_n(x) =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1-k/2}\,\Gamma(\alpha+1)\,R^{k/2+\alpha}}{\Gamma(k/2)}\int_0^\delta t^{k-1}V_{\alpha+k/2}(t\sqrt{R})f(x_0;\,t)\,dt + o(1), \tag{2}$$

где $V_\mu(x) = x^{-\mu}J_\mu(x)$ и $f(x_0;\ t)$ есть среднее по сфере радиуса t с центром в точке x_0 для $f(x)$, $\alpha \geqslant (k-1)/2$. Формула (2) устанавливает факт равносуммируемости порядка $\alpha \geqslant (k-1)/2$ разложения в ряд (1) и разложения в k-кратный интеграл Фурье функции, равной $f(x)$ для $x \in D$ и равной нулю для x вне D.

Примечание референта. Результаты работы содержатся в работах референта (РЖМат, 1953, 753; 1955, 440). Б. М. Левитан

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

2307. По поводу некоторых, недавно найденных асимптотических результатов относительно экстремумов специальных функций. Асколи (A proposito di alcuni recenti risultati asintotici sugli estremi di funzioni speciali. Ascoli Guido), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, **13**, 274—283 (итал.)

Показывается, что результаты по асимптотике экстремальных значений некоторых специальных функций, полученные недавно рядом итальянских математиков, могут быть найдены из одного общего источника. Для этого рассматривается линейное дифференциальное уравнение класса Фукса

$$x^{n-1}y^{(n)} + x^{n-2}p_1(x,\ t)\,y^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-1}(x,\ t)\,y' + p_n(x,\ t)\,y = 0, \tag{1}$$

допускающее при некоторых ограничениях, наложенных на функции $p_s(x,\ t)$, голоморфный в области точки $x = 0$ интеграл

$$Y(x,\ t) = 1 + \sum_1^\infty a_s(t)\,x^s.$$

Характер нулей функции $Y(x,\ t)$ и ее производной при достаточно малых значениях $|\ t\ |$ связывается с поведением нулей функции $Y(x,\ 0)$. Уравнение (1) преобразовывается посредством подстановки $x = t^\lambda\xi$ к виду

$$\xi^{n-1}\frac{d^n y}{d\xi^n} + \sum_1^{n-1}\xi^{n-s-1}q_s(\xi,\ t)\frac{d^{n-s}y}{d\xi^{n-s}} + q_n(\xi,\ t)y = 0, \tag{2}$$

$$q_s(\xi,\ t) = p_s(t^\lambda\xi,\ t),\ s < n;\ q_n(\xi,\ t) = t^\lambda p_n(t^\lambda\xi,\ t)$$

и затем в уравнении (2) переходят к пределу при $t \to 0$. Найдя интеграл $\eta(\xi)$ предельного уравнения, получают

$$\lim_{t\to 0} Y(t^\lambda\xi,\ t) = \eta(\xi).$$

Экстремальным корням $\bar{\xi}_r$ функции $\eta(\xi)$ соответствуют экстремальные корни $\bar{x}_r(t)$ функции $Y(x,\ t)$ такие, что

$$\lim_{t\to 0} t^{-\lambda}\bar{x}_r(t) = \bar{\xi}_r.$$

В частности, полагая в уравнении

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+1) - (\alpha+\beta+2)x]\,y' +$$
$$+ \nu(\nu+\alpha+\beta+1)\,y = 0,$$

интегралом которого является полином Якоби $P_\nu^{(\alpha\beta)}(z)$, $z = 1-2x$, числа α и β функциями параметра $t = \frac{1}{\nu}$ такими, что в пределе при $\nu \to \infty$ оказывается $\lim\alpha = A$, $\lim\beta/\nu = 0$, получают результат М. Вакка (РЖМат, 1955, 2745)

$$\lim_{\nu\to\infty}\left[\nu^{-\alpha}P_\nu^{(\alpha,\,\beta)}(\bar{z}_{\nu,\,r})\right] = \left(\frac{j_{A+1,\,r}}{2}\right)^{-A}J_A(j_{A+1,\,r}),$$

где $j_{s,\,r}$ означает r-й корень бесселевой функции первого рода $J_s(z)$. Аналогичным образом получаются

асимптотические формулы Трикоми, Гатекси и других авторов. (РЖМат, 1954, 5645; 1955, 1335.)

Н. С. Кошляков

2308. Новые интегралы, содержащие бесселевы функции. Рагаб (New integrals involving Bessel-functions. Ragab F. M.), Math. Z., 1955, **61**, № 4, 386—390 (англ.)

Дается выражение интегралов:

$$\int_0^\infty \lambda^{k-1} K_n(x\lambda^\varepsilon)\, K_m(e^{i\pi}x\lambda^\varepsilon)\, f(\lambda)\, d\lambda \qquad (1)$$

(где $\varepsilon = \pm 1$, а $f(\lambda)$ — одна из функций $e^{-\lambda}$, $J_l(2\lambda)$, $K_l(2\lambda)$, $e^{-\lambda}\cdot I_l(\lambda)$) через конечное число обобщенных гипергеометрических функций и E-функций Макроберта (определение E-функции см. MacRobert, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1937, 58, 1—13). Автор доказывает формулу, дающую выражение для произведения $K_n(x)\cdot K_m(e^{i\pi}x)$ через E-функции, и, используя формулы, выведенные ранее им и Макробертом для интегралов, содержащих E-функции, получает выражения для интегралов (1). Автор отмечает, что полученные им формулы могут служить для изучения асимптотического поведения интегралов (1) при больших значениях $|x|$.

И. А. Егорова

2309. Об уравнении Кеплера. Черри (On Kepler's equation. Cherry T. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 1, 81—91 (англ.)

Изучаются невещественные корни уравнения $\theta = \xi - x\sin\xi$ при вещественных θ и $0 < x < 1$. Достаточно рассматривать корни ξ, расположенные в полуполосе $-\pi < \mathrm{Re}\,\xi < \pi$, $\mathrm{Im}\,\xi > 0$.

Доказывается, что

$$\frac{1}{1 - x\cos\xi} = \int_0^\infty e^{-i\nu\theta} J_\nu(\nu x)\, d\nu,$$

и для $\theta \neq 0$

$$\xi = i\int_0^\infty \frac{\exp(-i\nu\theta)\,[1 - J_\nu(\nu x)]\, d\nu}{\nu} + i\,\frac{\ln 2i\theta}{x},$$

а для $\theta = 0$

$$\xi = -i\gamma + i\int_0^{2/x} [1 - J_\nu(\nu x)]\,\frac{d\nu}{\nu} - i\int_{2/x}^\infty J_\nu(\nu x)\,\frac{d\nu}{\nu},$$

где γ — постоянная Эйлера. Известные разложения Лагранжа и Бесселя для вещественного корня при $0 < x < 1$ обобщаются на невещественные корни при тех же условиях.

Далее рассматривается случай $x > 1$ и доказывается, что если $1 < x < X$ и $\omega < \theta < 2\pi - \omega$, где $\omega = \omega(x) = \sqrt{x^2-1} - \mathrm{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}$ и $\omega(X) = \pi$, то уравнение Кеплера имеет один вещественный корень, для которого справедливы разложения Лагранжа и Бесселя; если же $1 < x < X$ и $-\omega < \theta < \omega$, то существуют три вещественных корня, равных (в возрастающем порядке):

$$-\pi + \int_0^\infty \sin\nu(\pi+\theta)\, J_{-\nu}(\nu x)\,\nu^{-1} d\nu,$$

$$-\int_0^\infty \sin\nu\pi\cdot J_\nu(\nu x)\,\nu^{-1} d\nu,$$

$$\pi + \int_0^\infty \sin\nu(\theta-\pi)\, J_{-\nu}(\nu x)\,\nu^{-1}\, d\nu.$$

Приводятся также результаты, относящиеся к невещественным корням при $x < 1$.

В. И. Левин

2310. Две формулы, содержащие обобщенные лежандровы функции целого и нецелого порядков. Сноуслей (Two formulae involving generalized Legendre functions of integral and nonintegral index. Sponsler George C.), J. Math. and Phys., 1955, **34**, № 1, 50—53 (англ.)

Пусть n — целое число, $-1 < u_0 < 1$. Доказывается формула

$$\frac{1}{P_n(u_0)} = \sum_i \frac{2n_i+1}{(n_i - n)(n_i + n + 1)}\left[-1 \Big/ \frac{\partial P_{n_i}(u)}{\partial n_i}\Big|_{u_0}\right]$$

где суммирование идет по всем положительным индексам n_i обобщенной лежандровой функции $P_{n_i}(u)$, для которых $P_{n_i}(u_0) = 0$. Пусть $P_\nu^m(u)$ — обобщенная (на нецелые ν) присоединенная лежандрова функция; пусть $P_\nu^m(u_0) = 0$, $P_{\nu_1}^m(u_0) \neq 0$. Доказывается

$$\int_{u_0}^1 P_\nu^m(u) P_{\nu_1}^m(u)\, du = \frac{(1-u_0)^2 P_{\nu_1}^m(u_0)}{(\nu-\nu_1)(\nu+\nu_1+1)}\cdot\frac{dP_\nu^m(u)}{\partial u}\Big|_{u_0}.$$

Х. Л. Смолицкий

2311. О решениях обобщенного дифференциального уравнения Лагерра. Янкович (On solutions of the generalized Laguerre differential equation. Jankovič Zlatko), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2. Amsterdam, 1954, 124—125 (англ.)

Краткое сообщение об исследовании решений уравнения

$$xQ_\nu^{s\prime\prime} + (s+1-x)\,Q_\nu^{s\prime} + \nu Q_\nu^s = 0$$

с помощью метода, развитого автором в ранее опубликованных работах (РЖМат, 1954, 5557; 1955, 1817).

Н. Н. Лебедев

2312. Асимптотические представления уиттекеровских функций для больших значений параметра m. Казаринов (Asymptotic expansions for the Whittaker functions of large complex order m. Kazarinoff Nicholas D.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**, № 2, 305—328 (англ.)

Ищется асимптотическое представление функций Уиттекера $W_{k,m}(x)$, $W_{k,m}(e^{-\pi i}x)$ для больших m в области $-3\pi/2 < \arg(m) < 3\pi/2$. Уравнение Уиттекера

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \left\{-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{1/4 - m^2}{x^2}\right\} W = 0 \qquad (1)$$

с помощью подстановок $z = \log(x/2im)$, $u = e^{-z/2}\, W/2i$ приводится к канонической форме

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \{m^2(e^{2z} - 1) + m(2ike^z)\}\, u = 0 \qquad (2)$$

и затем к уравнению (2) применяется известный метод Лангера построения асимптотических решений дифференциальных уравнений. Применение этого метода дает для пары решений уравнения (2) асимптотические представления

$$u_{k,1}(z,m) = m^{-1/6}\varphi^{-1/2} e^{i\xi}(\mu_0 + i\mu_1)\left\{1 + \frac{E(z,m)}{m} + \frac{E(\xi)}{\xi}\right\},$$

$$u_{k,2}(z,m) =$$

$$= m^{-1/6}\varphi^{-1/2} e^{-i\xi}(\mu_0 - i\mu_1)\left\{1 + \frac{E(z,m)}{m} + \frac{E(\xi)}{\xi}\right\},$$

где $\varphi(z) = |e^{2z} - 1|^{1/2} \exp\{(i/2)\arg(e^{2z} - 1)\}$,

$$\mu_0(z) = \cos\{ik\log[e^z + \varphi(z)]\},$$

$$\mu_1(z) = [\varphi(z)]^{-1}\sin\{ik\log[e^z + \varphi(z)]\}, \qquad (3)$$

$$\xi(z,m) = m\Phi(z), \quad \Phi(z) = \varphi(z) + (i/2)\log\left[\frac{i - \varphi(z)}{i + \varphi(z)}\right].$$

$\mathrm{Re}\,(z) < \beta$, β — произвольное вещественное положительное число, E — ограниченная функция своих аргументов. На основании формул (3) получаются асимптотические представления функций Уиттекера как для случая $|x/2m| \geqslant e^{\alpha}$, так и для случая $|ux/2m| \leqslant e^{\beta}$.

В заключение рассматривается асимптотика для более общего уравнения

$$\frac{d^2u(z,\lambda)}{dz^2} + \{\lambda^2 q_0(z) + \lambda q_1(z)\}\, u(z,\lambda) = 0, \qquad (4)$$

где параметр λ принимает достаточно большое значение, а $q_0(z)$ и $q_1(z)$ означают однозначные аналитические функции в области S_z комплексной переменной z. Указывается асимптотическая форма интегралов уравнения (4) в двух различных случаях, когда функция $q_0(z)$ имеет корень в области S_z и когда $q_0(z)$ не имеет корней в этой области. Н. С. Кошляков

2313. К теории специальных функций математической физики. Шефке (Beiträge zur Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Schäfke Friedrich W.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 169 (нем.)

Краткое сообщение о полученных автором общих теоремах разложения, аналогичных теореме разложения в ряд Лорана и содержащих в качестве предельных и частных случаев большую часть встречающихся в математической физике разложений по сферическим, цилиндрическим и другим специальным функциям. Отмечается, что применение этих теорем приводит к наиболее общей форме теорем сложения для функций Матье и сфероидальных функций, которые могут быть положены в основу ясного и дедуктивного построения теории рассматриваемых функций. Н. Н. Лебедев

2314. Конформные отображения посредством эллиптических функций. Фик (Konforme Abbildungen durch elliptische Funktionen. Fick E.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 10/11, 416—429 (нем.; резюме англ., франц., русс.)

Рассматриваются конформные отображения, осуществляемые посредством эллиптических функций Вейерштрасса γ, ζ, σ, σ_3, эллиптических функций Якоби sn, cn, dn, am, эллиптического интеграла второго рода, дзета-функции Якоби и тэта-функций $\vartheta_1\vartheta_4$ в случае прямоугольной решетки. Расчет кривых производится численным путем (за полупериоды взяты $\omega = 1{,}0$ и $\omega' = 1{,}5i$ для всех функций, за исключением дзета-функции Якоби и тэта-функций, где отношение периодов $\tau = 0{,}75\,i$). Г. А. Ломадзе

2315. Некоторые свойства корней полиномов Якоби. Кармазина Л. Н., Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1955, № 2, 108—110

Рассматриваются некоторые свойства корней полиномов Якоби $G_n(p, q, x)$, ортогональных на интервале $(0,1)$ с весом $\rho(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q}$, нормированных так, что старший коэффициент их равен единице. Параметры p и q удовлетворяют условиям $0 < q < p+1$.

Используя известные рекуррентные формулы, вытекающие из соответствующих формул Гаусса для гипергеометрической функции, автор доказывает теорему 1:

полиномы $G_n(p, q, x)$ и $G_n(p+1, q, x)$ не могут иметь общего корня и если x_0 — корень полинома $G_n(p, q, x)$, то числа $G_n(p+1, q, x_0)$ и $G_n(p-1, q, x_0)$ имеют разные знаки ($n > 1$). Аналогичное предложение справедливо для полиномов $G_n(p, q-1, x)$, $G_n(p, q, x)$, $G_n(p, q+1, x)$. Из свойства перемежаемости корней ортогональных полиномов соседних степеней непосредственно следует теорема 2:

каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для любых фиксированных n и $p(q)$ найдется такое число $q'(p')$, что полином $G_n(p, q', x)$ $(G_n(p', q, x))$ имеет по крайней мере один корень в интервале $(1-\varepsilon, 1)$; а также найдется такое $q''(p'')$, что полином $G_n(p, q'', x)$ $(G_n(p'', q, x))$ имеет по крайней мере один корень в интервале $(0, \varepsilon)$.

С помощью этой и известной теоремы А. Маркова о зависимости корней ортогональных полиномов от параметра, содержащегося в весовой функции, доказывается, что при любых фиксированных n и $p(q)$ любая точка интервала $(0,1)$ является корнем полинома $G_n(p, q, x)$ при соответствующим образом подобранном $q(p)$.

Опечатка: на стр. 110 под знаком суммы и произведения должно быть $x_\nu(p, q, n)$. К. В. Лащенов

2316. Некоторые свойства функций Ломмеля от двух переменных. Деканосидзе Е. Н., Вычисл. матем. и вычисл. техника, № 2, 1955, 97—107

Выводится ряд свойств функций

$$U_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu+2m} J_{\nu+2m}(z)$$

и

$$V_\nu(w, z) = U_{-\nu+2}(w, z) + \cos\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} + \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

(интегральные представления, рекуррентные формулы, асимптотические разложения), полезных при табулировании этих функций. Обобщаются формулы Ломмеля, дающие разложение $U_\nu(w, z+k)$ и $V_\nu(w, z+k)$ при $\nu = 1/2$ и $\nu = 3/2$, на произвольные ν:

$$U_\nu(w, z+k) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (m!)^{-1} [k(2z+k)/2w]^m U_{\nu+m}(w, z),$$

$$V_\nu(w, z+k) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (m!)^{-1} [k(2z+k)/2w]^m V_{\nu-m}(w, z).$$

Приводятся также соответствующие формулы для

$$U_\nu(w+h, z+k) \text{ и } V_\nu(w+h, z+k).$$

В. И. Левин

2317. О суммировании по Абелю ультрасферических рядов. Брусс (Sur la sommabilité (A) des séries ultrasphériques. Brousse Pierre), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 4, 351—353 (франц.)

Пусть $(\sin\theta)^{2\mu} g(\theta)$ $(\mu > 1/2)$ абсолютно интегрируемо в $(0, \pi)$ и

$$S[g] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_n^{\mu}(\cos\theta),$$

где C_n^{μ} — ультрасферические полиномы (Гегенбауэра). Утверждается, что $S[g]$ суммируем по Абелю в любой точке θ_0 непрерывности $g(\theta)$ и что, более того, при любом стремлении точки $M(\rho, \omega)$ изнутри полукруга $\rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ к точке $P_0(1, \theta_0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n C_n^{\mu}(\cos\omega) \to g(\theta_0). \qquad (1)$$

Приводится обобщение теоремы Фату: Если $g'(\theta_0)$, $0<\theta_0<\pi$, существует, то при стремлении точки M к точке P_0 по некасательным путям

$$-2\mu\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho^n\sin\omega\,C_{n-1}^{\mu+1}(\cos\omega)\to g'(\theta_0).$$

Устанавливается поведение ультрасферического ряда (1) в концах диаметра полукруга. Доказательств нет.

В. И. Левин

2318. Некоторые интегралы с цилиндрическими и сферическими функциями. Мюллер (Spezielle Integrale mit Zylinder- und Kugelfunktionen. Müller R.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, **35**, № 1/2, 62—64 (нем.)

Используя интегро-дифференциальное тождество

$$\int_{t_0}^{t}e^{\int_{z_0}^{z}A(\xi)d\xi}\cdot f(z)(v''+A(z)v'+B(z)v)\,dz=$$

$$=e^{\int_{z_0}^{z}A(\xi)d\xi}\cdot W(f,v)\Big|_{z=t_0}^{z=t},$$

где $f(z)$ — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $f''+A(z)f'+B(z)f=0$, $v(z)$ — произвольная аналитическая функция, $W(f,v)$ — определитель Вронского, и, принимая в качестве $f(z)$ цилиндрические $Z_\nu(z)$ и шаровые $K_\nu(z)$ функции, а в качестве $v(z)$ некоторые специальные и элементарные функции, автор вычисляет большое количество разнообразных интегралов, содержащих цилиндрические и сферические функции.

Э. Л. Блох

2319. Об асимптотическом представлении расщепления пар соседних собственных значений дифференциального уравнения сфероидальных функций. Криккеберг (Über die asymptotische Darstellung der Aufspaltung von Paaren benachbarter Eigenwerte der Differentialgleichung der Sphäroidfunktionen. Krickeberg Klaus), Z. angew. Math. und Phys., 1955, **6**, № 3, 235—239 (нем.; резюме англ.)

Рассматриваются собственные значения $\lambda_n^m(\gamma^2)$ для уравнения

$$[(1-z^2)y'(z)]'+[\lambda+\gamma^2(1-z^2)-m^2/(1-z^2)]\,y(z)=0,$$

где n — номер собственного значения. (Соответствующие собственные функции $ps_n^m(z,\gamma^2)$ называются сфероидальными функциями (Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, ГНТИ, Укр., 1935).) Пусть $\gamma^2=-\beta^2$, где $\beta>0$, $m\geqslant 0$ — целое, $n\geqslant m$; тогда, как известно (Meixner J., Schäfke F. W., Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin, — Göttingen — Heidelberg, 1954, 243—246), существуют асимптотические разложения для $\lambda_n^m(-\beta^2)$ при $\beta\to\infty$ вида $\sum_{k=-2}^{+\infty}c_k\beta^{-k}$, причем для $\lambda_{m+2p}(-\beta^2)$ и для $\lambda_{m+2p+1}^m(-\beta^2)$, где $p=0,1,2,\ldots$, эти асимптотические разложения совпадают. В реферируемой работе рассматривается разность

$$\Delta\lambda=\lambda_{m+2p+1}^m(-\beta^2)-\lambda_{m+2p}^m(-\beta^2),$$

называемая расщеплением, и доказывается следующая асимптотическая формула ($\beta\to\infty$)

$$\Delta\lambda\sim\frac{2(4\beta)^{m+2p+2}e^{-2\beta}}{p!\,(m+p)!}\sum_{k=0}^{2}c_k\beta^{-k},$$

где c_k — вычисленные автором коэффициенты, зависящие от m, p. Указывается метод, с помощью которого можно последовательно получать следующие члены в асимптотическом разложении для $\Delta\lambda$.

Д. М. Эйдус

2320. О волновых функциях эллиптического цилиндра. Брусенцов Н. П., Вестн. Моск. ун-та, 1954, № 9, 23—31

В системе координат r, φ, $x=\sqrt{r^2+c^2}\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ уравнение $\Delta\psi+k^2\psi=0$ разделением переменных $\psi=R(r)\Phi(\varphi)$ приводится к двум уравнениям:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+(\nu^2+\sigma^2\sin^2\varphi)\Phi=0$$

и

$$\left(1+\frac{\sigma^2}{\rho^2}\right)\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(1-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0,$$

где ν^2 — постоянная, $\sigma=kc$ и $\rho=kr$. Решения первого из них автор предлагает назвать обыкновенными функциями Матьё (первого и второго рода, в зависимости от того, периодические они или нет), а решения второго — цилиндрическими функциями Матьё. При $c=0$ обыкновенные функции Матьё переходят в тригонометрические функции. Соответственно, те цилиндрические функции Матьё, которые при $c=0$ переходят в функции Бесселя, Неймана и Ганкеля, предлагается называть функциями Матьё — Бесселя, Матьё — Неймана и Матьё — Ганкеля. С точки зрения табулирования этих функций, применяемые системы функций Матьё неудачно нормированы (широкий диапазон значений функций, необходимость дополнительного табулирования нормирующих множителей). Автор предлагает ввести нормирование так, чтобы при $c=0$ получалась известная нормировка круговых и цилиндрических функций. Приводятся соответствующим образом модифицированные интегральные представления функций Матьё — Бесселя — Неймана — Ганкеля и разложения решения волнового уравнения в ряды по этим функциям.

Даны графики $Jc_0(\sigma,\rho)$, $Jc_1(\sigma,\rho)$, $Js_1(\sigma,\rho)$, $Nc_0(\sigma,\rho)$, $Nc_1(\sigma,\rho)$, $Ns_1(\sigma,\rho)$ при $\sigma=4$.

В. И. Левин

2321 РЕЦ. Функции Матьё и сфероидальные функции, их применения к физическим и техническим проблемам. Мейкснер, Шефке (Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme. Meixner J., Schäfke F. W. Berlin, Springer, 1954, 414S.) [**Рецензия: Левин В. И.**, Новые книги за рубежом, 1955, № 5, 61—64]

Книга состоит из 4 глав. Первая глава содержит сжатую сводку общих теорем и формул из математической физики, теории аналитических функций, теории дифференциальных и разностных уравнений, теории бесселевых функций (в большинстве с доказательствами и выводами). Во второй главе излагается теория функций Матьё, причем существенно используются результаты Шефке по двупараметрической задаче о собственных значениях. Третья глава содержит обстоятельное изложение теории сфероидальных функций (включая ряд новых формул). В четвертой главе: «Приложения функций Матьё и сфероидальных функций» — собраны математически весьма сложные задачи физического и технического содержания, решение которых приводит к функциям Матьё или сфероидальным функциям. Эти задачи относятся преимущественно к механическим и электрическим колебаниям с периодически меняющимися во времени параметрами, системам с пространственно периодической структурой, колебаниям эллиптически ограниченных континуумов, соответствующим задачам на дифракцию и т. п.

В. И. Левин

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2322. Некоторые теоремы о преобразованиях Фурье. **Мандельбройт** (Quelques théorèmes sur les transformées de Fourier. Mandelbrojt Szolem), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 13, 1393—1394 (франц.)

Теорема. Пусть $K(x) \in L(-\infty, \infty)$, $F(x) \in L^\infty \times (-\infty, \infty)$, $M = \text{vrai max} \mid F(x) \mid$. Если преобразование Фурье $k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-iux} dx$ не обращается в нуль ни при $u < -h'$, ни при $u > h$ $(h + h' \geqslant 0)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} K(y - x) F(x)\, dx = 0$ $(-\infty < y < \infty)$, то $F(x)$ на оси $(-\infty, \infty)$ совпадает (с точностью до значений на множестве меры нуль) с некоторой целой функцией $F(z)$, удовлетворяющей условиям

$$\mid F(z) \mid \leqslant Me^{h' \operatorname{Im} z} \quad (\operatorname{Im} z \geqslant 0),$$

$$\mid F(z) \mid \leqslant Me^{-h \operatorname{Im} z} \quad (\operatorname{Im} z \leqslant 0).$$

Аналогичная теорема сформулирована для функций $F(x)$, принадлежащих винерову классу W, т. е. удовлетворяющих условию $\sup_{-\infty < n < \infty} \int_n^{n+1} \mid dF(x) \mid < \infty$. В частном случае $h = h' = 0$ из теорем автора следуют обе теоремы аппроксимации Винера. Доказательства не приведены. Указывается, что для частного случая, соответствующего теоремам Винера, доказательства весьма коротки. Б. И. Коренблюм

2323. Асимптотическое поведение обращения преобразования Лапласа. Халл, Фрос (Asymptotic behaviour of the inverse of a Laplace transform. Hull T. E., Froese C.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 1, 116—125 (англ.)

Рассматривается зависимость асимптотического поведения при $t \to \infty$ обращения

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} f(s)\, ds \qquad (1)$$

преобразования Лапласа $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$ от поведения при $s \to 0$ функции $f(s)$. Доказываются две теоремы. Первая — о свойствах обращающего интеграла, вторая — о функциях сравнения.

Теорема I. Пусть функция $f(s)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $f(s)$ аналитична при $\mid \arg s \mid \leqslant \psi$, $\pi/2 < \psi \leqslant \pi$, причем допускается особенность в точке $s = 0$.

2) Существует такое k, что $e^{ks} f(s) \to 0$ при $\mid s \mid \to \infty$ равномерно в секторе $\pi/2 \leqslant \mid \arg s \mid \leqslant \psi$.

3) Интеграл (1) сходится по меньшей мере в смысле главного значения при $t > 0$ и при некотором $a > 0$.

4) $\lim_{|s| \to \infty} f(s) = 0$ при $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant a$. Тогда

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} f(s)\, ds$$

при $t > k$, где $C = C' + \gamma_r$ — контур, состоящий из дуги $\gamma_r = \{re^{i\theta}\}$, $-\psi \leqslant \theta \leqslant \psi$, окружности $\mid s \mid = r$ и из части C', образуемой лучами $(\infty e^{i\psi})$, $re^{i\psi}$ и $(re^{-i\psi}, \infty e^{-i\psi})$, причем интеграл берется в смысле главного значения.

Кроме того, $\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{st} f(s)\, ds = 0\,(e^{-\varepsilon t})$ при $t \to \infty$, где $\varepsilon = -r \cos \psi > 0$.

Теорема II. Пусть

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \mid t \mid < 1, \\ \frac{1}{2} \Phi(t) & \text{при } \mid t \mid = 1, \\ \Phi(t) & \text{при } \mid t \mid > 1, \end{cases} \qquad (2)$$

тогда преобразование Лапласа для $F(t)$ существует при $\operatorname{Re} s > 0$ и может быть продолжено аналитически на всю плоскость в виде

$$f(s) = \varphi(s) + \text{целая функция}.$$

Функция $f(s)$ удовлетворяет условиям теоремы I, а интеграл (1) совпадает с функцией $F(t)$, определяемой условиями (2).

Здесь $\Phi(t)$ и $\varphi(t)$ — некоторые пары преобразований Лапласа. Приведена таблица этих пар; например:

$$\Phi(t) = (-d/d\alpha)^n [(t/\beta)^{(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(2\sqrt{\beta t})],$$

$$\varphi(s) = e^{-\beta/s} s^{-\alpha} \lg^n s.$$

Далее указывается способ, как с помощью теорем I и II получить асимптотическую формулу для обращения $F(t)$ данного преобразования Лапласа $f(s)$.

Ю. Л. Рабинович

2324. К вопросу о выявлении оптических неоднородностей. Вертгейм Б. А., Остроумов Г. А., Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 1, 109—112

Рассматривается пространственная задача о выявлении неоднородностей образца оптическим методом, т. е. путем просвечивания его в разных направлениях. В случае трехкратного просвечивания образца в направлениях, параллельных осям координат, задача сводится к определению непрерывной функции $u = f(x, y, z)$ из соотношений

$$\int_0^X f(x, y, z)\, dx = \Phi_1(y, z),$$

$$\int_0^Y f(x, y, z)\, dy = \Phi_2(z, x),$$

$$\int_0^Z f(x, y, z)\, dz = \Phi_3(x, y),$$

где X, Y, Z — размеры образца. Устанавливается, что знание функций Φ_i $(i = 1, 2, 3)$ позволяет построить многочлен второй степени относительно x, y и z, наименее уклоняющийся от функции f в смысле среднего квадратического. Аналогичная задача для многочленов более высоких степеней уже не является определенной. Авторы видят в этом принципиальные границы применимости метода. Однако, на самом деле, точность результатов можно значительно повысить путем увеличения числа направлений, по которым ведется просвечивание: известно, что знание интегралов $\int f(x, y, z)\, dl$ по всем прямым позволяет однозначно восстановить функцию f. С. Б. Стечкин

2325. Об одной формуле обращения преобразования Лапласа. Руни (On an inversion formula for the Laplace transformation. Rooney P. G.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 1, 101—115 (англ.)

Для обращения преобразования Лапласа

$$f(s) = \int_0^\infty \exp(-st) \varphi(t)\, dt$$

в действительной области Эрдейи (Erdélyi A., Math. Mag., 1950—51, 24, 1—7) ввел оператор

$$\nu_{L_{k,t}}[f(s)] = \frac{k^{3/2}e^{2k}}{t\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{\nu/2} J_\nu(2k\sqrt{x})\, f\left(\frac{k(x+1)}{t}\right) dx.$$

Изучаются свойства этого оператора и, в частности, доказывается следующая теорема: Если для некоторого $\gamma > 0$ $\exp(-\gamma t)\varphi(t) \in L(0, \infty)$ и либо а) $t^{-(\nu+1)}\varphi(t) \in L(0, \delta)$ для некоторого $\delta > 0$ и $\nu \geqslant -1/2$, либо б) $t^{-(2\nu+3)/4}\varphi(t) \in L(0, \delta)$ для некоторого $\delta > 0$ и $-1 < \nu \leqslant 1/2$, то для почти всех $t > 0$

$$\lim_{k\to\infty} {}^{\nu}L_{k,t}\ [f(s)] = \varphi(t).$$

Точнее, последняя формула имеет место для каждого $t > 0$, для которого

$$\int_0^h |\varphi(t+u) - \varphi(t)|\, du = o(h)$$

(т. е. для t из множества точек Лебега функции φ). Помимо этой теоремы обращения, доказывается ряд других теорем, в том числе и следующая теорема представления: Если для некоторого $\gamma > 0$ $\exp(-\gamma u) \times u^{-1} f(u^{-1}) \in L(0, \infty)$ и либо а) $u^{-(\nu+2)} f(u^{-1}) \in L(0, \delta)$ для некоторого $\delta > 0$ и $\nu \geqslant -1/2$, либо б) $u^{-(2\nu+7)/4} \times f(u^{-1}) \in L(0, \delta)$ для некоторого $\delta > 0$ и $-1 < \nu \leqslant 1/2$, то ${}^{\nu}L_{k,t}[f(s)]$ существует для каждого $k > 0$ и почти всех $t > 0$ и имеет место преобразование Лапласа, причем для каждого $\sigma > 0$ из множества точек Лебега функции f

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-\sigma t}\, {}^{\nu}L_{k,t}[f(s)]\, dt = f(\sigma).$$

В заключение формулируются и доказываются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $f(s)$ была почти всюду преобразованием Лапласа начальной функции вида $t^\alpha\varphi(t)$, где $\varphi(t) \in L_p(0, \infty)$ при некотором фиксированном p, $1 < p \leqslant \infty$, и $\alpha > -(p-1)/p$.

В. И. Левин

2326. Замкнутое выражение интеграла свертки (Обобщение коэффициентов ошибок сервомеханизмов). Артурс, Мартин (Closed expansion of the convolution integral (A generalization of servomechanism error coefficients). Arthurs Edward, Martin Louis H.), J. Appl. Phys., 1955, 26, № 1, 58—60 (англ.)

Рассмотрено замкнутое выражение интеграла свертки

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} f^0(x)\, w_0(t-x)\, dx.$$

Функция $w_0(t)$ предполагается удовлетворяющей условиям: $|w_0(t)| < A_0 e^{-bt}$ почти везде, A_0, $b > 0$, $w_0(t) = 0$, $t < 0$, а функция $f^0(t)$ предполагается представимой в виде

$$f^0(t) = f_c^0(t) + \sum_{k=1}^{M_0} \Delta_{0k} u_{-1}(t - t_{0k}),$$

где $f_c^0(t)$ — непрерывная часть функции $f^0(t)$, а сумма выражает разрывную часть этой функции, причем $u_{-1}(t)$ — функция единичного скачка.

Получено разложение $r(t) = r_1(t) + r_2(t) + r_3(t)$, где слагаемые представлены в виде:

$$r_1(t) = \sum_j c_j f^j(t),\ r_2(t) = \sum_{j,k} \Delta_{jk} w_{j+1}(t - t_{jk}),$$

$$r_3(t) = \int_{-\infty}^{t} f^{N+1}(x)\, w_{N+1}(t-x)\, dx,$$

а встречающиеся величины определяются равенствами:

$$f^j(t) = \frac{d}{dt} f_c^{j-1}(t),\ f^j(t) = f_c^j(t) + \sum_k \Delta_{jk} u_{-1}(t - t_{jk}),$$

$$w_{j+1}(t) = -u_{-1}(t) \int_t^\infty w_j(y)\, dy,\ c_j = -w_{j+1}(0).$$

Результат получен повторным интегрированием по частям. Указано, что во многих задачах $r_3(t)$ составляет лишь незначительную долю функции $r(t)$. Указано отношение рассмотренного разложения к теории сервомеханизмов.

Н. А. Бразма

2327. Композиция многомерных сингулярных интегралов. Михлин С. Г., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 2, 25—41

Пусть P, Q — точки пространства m измерений и E_m — некоторая область. Под сингулярным интегралом понимается интеграл вида

$$\int_{E_m} (PQ)^{-m} f(P, Q)\, dQ.$$

Дается вывод формулы композиции (т. е. повторного интегрирования) двух сингулярных интегралов. Вывод основывается на теории сферических функций. Формула была дана без доказательства Жиро и приводилась, тоже без доказательства, в обзорной статье автора (Успехи матем. наук, 1948, 3, № 3 (25), 94).

В случае двумерного пространства соответствующая формула была дана в 1927 г. Трикоми. Имеющиеся в работе последнего погрешности были исправлены в 1936 г. С. Г. Михлиным. Подробная библиография вопроса имеется в упомянутой выше обзорной статье.

Ф. Д. Гахов

2328. Преобразования Гегенбауэра. Лакшмана-Рао (Gegenbauer transforms. Lakshmana-Rao S. K.), Math. Student, 1954, 22, № 4, 161—165 (англ.)

Доказывается теорема о свертке в операционном исчислении, основанном на преобразовании Гегенбауэра, и некоторые другие соотношения. Все результаты были также получены Контом (РЖМат, 1956, 2329).

Примечание референта. В формулировке теоремы о свертке допущена неточность: нельзя писать $f^\nu(n)\, g^\nu(n) = TH(x)$, где

$$H(\cos\zeta) = A \int_0^\pi \int_0^\pi F(\cos\eta)(\sin\eta)^{2\nu} G(\cos\eta\cos\zeta + \sin\eta\sin\zeta\cos\beta)(\sin\beta)^{2\nu-1}\, d\eta\, d\beta,$$

так как $A = 2^{1-2\nu}(n!)^{-1}\Gamma(n+2\nu)[\Gamma(\nu)]^{-2}$ зависит от n.

В. И. Левин

2329. Преобразования Гегенбауэра. Конт (Gegenbauer transforms. Conte S. D.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 21, 48—52 (англ.)

Рассматривается преобразование

$$T\{F(x)\} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\rho-1/2} C_n^\rho(x) F(x)\, dx = f^\rho(n),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $C_n^\rho(x)$ — полиномы Гегенбауэра, сводящиеся при $\rho = 1/2$ к полиномам Лежандра. Доказывается следующая теорема о свертке: Если

$$T\{F(x)\} = f^\rho(n),\ T\{G(x)\} = g^\rho(n),$$

то

$$f^{\rho}(n)\, g^{\rho}(n) = 2^{1-2\rho}(n!)^{-1}\,\Gamma(2\rho+n)\,[\Gamma(\rho)]^{-2}\,T\{H(x)\},$$

где

$$H(\cos\nu) =$$

$$= (\sin\nu)^{1-2\rho}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} F(\cos\mu)\, G(\cos\lambda)\,(\sin\mu)^{2\rho}\,(\sin\alpha)^{2\rho-1}$$

$$(\sin\lambda)^{2\rho-1}\,d\mu\,d\beta$$

и

$$\cos\nu = \cos\mu\cos\lambda + \sin\mu\sin\lambda\cos\alpha,$$

$$\cos\lambda = \cos\mu\cos\nu + \sin\mu\sin\nu\cos\beta,$$

— являющаяся обобщением формулы Черчилля и Долфа (РЖМат, 1955, 859). Операционное исчисление на основе преобразования Гегенбауэра можеть быть построено, исходя из соотношения:

$$T\{R[F(x)]\} = -n(n+2\rho)\,f^{\rho}(n),$$

где $R[F(x)] = (1-x^2)\,F'' - (2\rho+1)\,x\,F'$ (обобщение результата Черчилля; РЖМат, 1955, 5115). См. также предыдущий реферат. В. И. Левин

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2330. Об уравнениях движения подобно-изменяемого тела. Четаев Н. Г., Уч. зап. Казан. ун-та, 1954, 114, кн. 8, 5—7

Дается эффективное применение метода Пуанкаре, развитого автором (Четаев Н. Г., Об уравнениях Пуанкаре, Прикл. матем. и механика, 1941, 5, 253—262) для составления уравнений движения механических систем, если известны инфинитозимальные операторы действительных перемещений, к выводу уравнений движения подобно-изменяемого тела. Положение тела определяется координатами центра тяжести относительно неподвижных осей, направляющими косинусами подвижных осей относительно неподвижных и координатами точек тела в подвижной системе. Подобное изменение тела характеризуется скоростью лучистого расширения, а вращение — проекциями на подвижные оси угловой скорости. Составлены 9 кинематических уравнений для направляющих косинусов, установлены инфинитезимальные операторы перемещений подобно-изменяемого тела и вычислена живая сила. Получены 7 уравнений движения (3 уравнения движения центра тяжести, 3 уравнения изменения момента количества движения и 1 уравнение, определяющее лучевую скорость расширения), которые совпадают с уравнениями Зейлигера Д. Н., выведенными им геометрически (Теория движения подобно-изменяемого тела, Казань, 1892).

Разработанная автором теория интегрирования уравнений Пуанкаре (см. цит. статью) позволяет перенести на рассматриваемый случай обобщения всех теорем аналитической динамики голономных систем. И. С. Аржаных

2331. Задачи о движении точки на сфере, отнесенной к сферическим эллиптическим координатам. Цеули (Problemi relativi al moto di un punto su una sfera riferita a coordinate ellittiche sferiche. Zeuli Tino), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 50—54 (итал.)

Под сферическими эллиптическими координатами понимаются

$$\mu = (r+r')/2 \text{ и } \nu = (r-r')/2, \text{ где } r = \widehat{AP},\ r' = \widehat{BP}$$

—расстояния по большим кругам от рассматриваемой точки P до двух фиксированных точек A и B единичной сферы. В этих координатах составляются уравнения движения точки на сфере под воздействием консервативного силового поля с потенциалом

$$U = [f(\mu) - g(\nu)] / [\cos 2\mu - \cos 2\nu]$$

и изучаются траектории движения. В. И. Левин

2332. Построение средней линии плоских сечений и некоторые соотношения между величинами, применяемыми для характеристики поверхностей. Гари (Die Konstruktion der mittleren Linie bei Oberflächenprofilen und einige Zusammenhänge zwischen den zur Kennzeichnung von Oberflächen benutzten Grössen. Gary Max), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 6, 490—496 (нем.; резюме англ.)

Рассматриваются плоские сечения поверхности, перпендикулярные к некоторой базисной плоскости; на каждой прямой в этой плоскости можно выбрать бесчисленным множеством способов положение базисного отрезка s; таким образом получим ∞^3 кривых.

Полагая, что с достаточной степенью точности можно написать уравнение кривой в виде

$$y = \sum_{r=0}^{n}\left(a_r\cos\frac{2\pi rx}{s} + b_r\sin\frac{2\pi rx}{s}\right),$$

автор вводит в качестве характеристик среднеарифметическое и среднеквадратическое значения функции y

$$h_1 = \frac{1}{s}\int_0^s |y|\,dx,\quad h_2 = \left(\frac{1}{s}\int_0^s y^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Пользуясь неравенством Буняковского — Шварца, автор находит $h_2/h_1 \geqslant 1/\sqrt{2n}$.

Если же уравнение имеет вид

$$y = a_r\sin\frac{2\pi rx}{s} + a_{\mu}\sin\frac{2\pi\mu x}{s},$$

то справедливо неравенство $h_1 \geqslant (2/\pi)(|a_r| - |a_{\mu}|)$.

Если $|a_{\mu}| = |a_r|/m$, $m > 1$, то

$$h_2/h_1 \leqslant \pi\sqrt{m^2+1}/2\sqrt{2}(m-1).$$

Автор рассматривает одну из кривых OP, соответствующую отрезку s_1, на оси Ox_1; рассматривая площадь, ограниченную этой кривой, осью Ox_1 и перпендикуляром из точки P на ось Ox_1, он строит прямую, параллельную оси Ox_1, проходящую через центр тяжести этой площади, считая ее однородной. Поворачивая ось Ox_1 на различные углы и повторяя это построение для соответствующих площадей, автор указывает способ построения «средней линии», обладающей тем свойством, что равные по модулю суммы площадей, лежащие от нее по разные стороны, имеют наименьший модуль. Я. Л. Геронимус

2333. К вопросу о потенциале взаимного притяжения двух неоднородных твердых тел. Кондурарь В. Т., Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, 5, 103—115

В настоящей работе дается разложение потенциала взаимного притяжения двух неоднородных эллипсоидов в виде двойного бесконечного ряда, расположенного по степеням обратного взаимного расстояния между центрами эллипсоидов и по степеням их эксцентриситетов. Коэффициенты этого ряда зависят только от размеров эллипсоидов и от распределения их плотностей. Указываются области сходимости полученных разложений. Г. Н. Дубошин

См. также: 2085, 2104, 2116, 2129, 2133, 2138, 2171, 2233, 2242

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

2334. Линейные пространства с линейной топологией. Кёте (Lineare Räume mit linearer Topologie. Köthe Gottfried Maria), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 236—237 (нем.)

Перенесение на «линейно-топологические» пространства над любым телом (Лефшец С., Алгебраическая топология, М., 1949, гл. II) основных понятий и результатов общей теории локально выпуклых пространств: сопряженного пространства, слабой и «относительно сильной» топологий, теоремы Макки—Аренса, сильной топологии, признаков сильной рефлективности. Отметим определение «линейной ограниченности»: подпространство $H \subset E$ называется линейно ограниченным, если $(H + U_\alpha)/U_\alpha$ конечномерно для каждой окрестности нуля U_α в данной линейной топологии на E. Д. А. Райков

2335. О вершинах единичной сферы в пространстве функционалов на данном полуупорядоченном пространстве. Маржик (Vrcholy jednotkové koule v prostoru funkcionál na daném polouspořádaném prostoru. Mařík Jan), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 1, 3—40 (чеш.)

Первая часть посвящена определению и выводу основных свойств K-линеала и пространства $R(Y)$ всех регулярных функционалов на данном K-линеале Y (Терминология: Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950). Далее изучаются K-линеалы с нормой. Обобщая понятие L-линеала (Kakutani, Ann. Math., 1941, **42**, 994—1024; Bohnenblust, Kakutani, Ann. Math., 1941, **42**, 1025—1028), автор вводит понятие L_0-линеала как нормированного K-линеала, в котором имеет место равенство $\|a + b\| = \|a\| + \|b\|$ для каждой пары элементов a, b, для которых $a \wedge b = 0$. Аналогично и M_0-линеал является нормированным K-линеалом, где имеет место $\|a \vee b\| = \max(\|a\|, \|b\|)$ для каждой пары элементов a, b, для которых $a \wedge b = 0$.

Главным результатом работы является следующая теорема: Пусть Y есть K-линеал, а $R_1 \subset R(Y)$ есть K-линеал со следующим свойством: Если $f \in R_1$ можно записать в виде суммы $f = g + h$, где $g, h \in R(Y)$ и $g \wedge h = 0$, то $g \in R_1$, $h \in R_1$. Если R_1 является L_0-линеалом, то каждая вершина единичной сферы пространства R_1 является мультипликативным функционалом. Из этой теоремы легко вывести результаты Какутани и Боненблуста о представлении M-линеалов. В качестве следствия получается, что каждый M_0-линеал является M-линеалом и каждый L_0-линеал является L-линеалом. V. Pták

2336. Обобщение теоремы Хана-Банаха. Оно (A generalization of the Hahn-Banach theorem. Ono Takashi), Nagoya Math. J., 1953, **6**, October, 171—176 (англ.)

Пусть k — поле с нетривиальной нормой, S — нормированное пространство над k и σ — автоморфизм k. Отображение f пространства S в поле k называется σ-линейным, если $f(\alpha x + \beta y) = \alpha^\sigma f(x) + \beta^\sigma f(y)$ для всех $x, y \in S$ и $\alpha, \beta \in k$. Если, сверх того, f непрерывно, то оно называется σ-линейным функционалом. Для автоморфизма σ, сохраняющего норму, σ-линейное отображение непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено. Рассматриваются следующие условия, налагаемые на основное поле k и пространство S над ним:

A. Поле k полно и норма в нем архимедова (в этом случае оно представляет собой поле действительных или комплексных чисел, или тело кватернионов).

NA. Поле k полно и дискретно, норма в нем неархимедова и S — неархимедово пространство.

Основная теорема: Пусть σ — сохраняющий норму автоморфизм поля k. Тогда нормированное пространство S над полем k, удовлетворяющее условиям A или NA, обладает свойством распространимости для σ-линейных функционалов.

Для случая линейных функционалов и коммутативного поля k соответствующее предложение было установлено автором ранее (РЖМат, 1954, 4488).

В качестве приложений даются теоремы, обобщающие результаты Макки (Mackey) и Какутани (Kakutani) о структурной характеризации нормированных пространств. В частности, нормированное пространство над полем действительных чисел или над алгеброй с делением над полем p-адических чисел может быть охарактеризовано структурой своих замкнутых подпространств.

Пусть $\mathfrak{A}(S)$ — нормированная алгебра над полем k, образованная всеми непрерывными k-гомоморфизмами из S в S. Если, помимо условий A, NA, предположить коммутативность поля k, то $\mathfrak{A}(S)$ — полупростая алгебра. Это обобщение теоремы Хилла (Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, М., Изд-во ин. лит., 1951, гл. 22, § 3). Приводятся и другие результаты этого рода. Отметим также теорему о существовании единственного автоморфизма в поле p-адических чисел. А. Г. Пинскер

2337. О сходимости элементов и линейных операторов в пространствах типа (B) и некоторые общие виды линейных функционалов и операторов. Титов Н. С., Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та, 1954, № 5, 129—156

Пусть R — числовая прямая, а $[E, E']$ — пространство линейных операторов, отображающих банахово пространство E в банахово пространство E'. Вводятся определения сходимостей элементов и линейных операторов:

1) последовательность элементов $\{x_n\}$ из E сходится (E') к $x \in E$, если для любого оператора u из $[E, E']$

$$\lim_{n \to \infty} |u(x_n) - u(x)| = 0;$$

2) последовательность элементов $\{x_n\} \in E$ сходится R в отношении (E'), если для любого оператора $u \in [E, E']$ и любого функционала f в $[E', R]$

$$\lim_{n \to \infty} |f[u(x_n)] - f[u(x)]| = 0;$$

3) последовательность линейных операторов $\{u_n(x)\}$ из $[E, E']$ сходится (E'') к оператору u из $[E, E']$, если для любых $x \in E$ и $v \in [E', E'']$

$$\lim_{n \to \infty} |vu_n(x) - vu(x)| = 0.$$

Излагаются некоторые свойства сходимостей элементов и операторов (в значительной части своей имеющиеся в уже опубликованных работах автора (Успехи матем. наук, 1946, **1**, № 5—6, 228—229; Докл. АН СССР, 1946, **52**, № 7, 569—572)). Так, если элементами пространства $[E, E']$ являются только вполне непрерывные операторы, то введенная сходимость 1) совпадает со слабой.

Даются примеры бесконечномерных пространств типа (B), для которых эта сходимость совпадает со слабой, но не совпадает с сильной, и таких, в которых она отлична от сильной и слабой. Даются необходимые и достаточные условия для указанных сходимостей последовательностей элементов и операторов.

Во второй главе устанавливается общий вид линейных функционалов и линейных операторов в некоторых пространствах, что является обобщением соответствующих теорем И. М. Гельфанда (Матем. сб., 1938, **4**, № 2, 235—286). А. Т. Талдыкин

2338. Об одном методе приближенного решения функциональных уравнений. Каазик Ю. Я., Тамме Э. Э., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 6, 981—984

Методом последовательных приближений ищутся решения функционального уравнения

$$P(x)=0, \tag{1}$$

где P есть аналитический оператор из банахова пространства X в линейное нормированное пространство Y. Последовательные приближения x_n определяются из рекуррентных соотношений

$$P(x_0)+P'(x_0)\Delta x_1=0,$$

$$P(x_0)+ \tag{2}$$

$$+\left[P'(x_0)+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}P^{(k)}(x_0)\Delta x_{n-k+1}\cdots\Delta x_{n-1}\right]\Delta x_n=0$$

$(n=2, 3\ldots)$,
где $\Delta x_i=x_i-x_0$.

Теорема 1. Пусть для начального приближения x_0 выполнены условия: 1) существует обратный оператор $\Gamma=[P'(x_0)]^{-1}$, причем $\|\Gamma\|\leqslant B$; 2) $\|\Gamma P(x_0)\|\leqslant\eta$; 3) найдутся постоянные A и H такие, что $\|P^{(k)}(x_0)\|\leqslant k!\,HA^{k-2}$ $(k=2, 3\ldots)$; 4) постоянные B, η, A и H удовлетворяют неравенству $A\eta+2\sqrt{BH\eta}<1$; 5) оператор P аналитичен во внутренних точках (разлагается внутри сферы в степенной ряд около x_0) и непрерывен на краевых точках сферы

$$\|x-x_0\|\leqslant\eta/(1-\delta), \tag{3}$$

где $\delta=(1-A\eta-\sqrt{(1-A\eta)^2-4BH\eta})/2$.

Тогда уравгение (1) имеет в сфере (3) решение x^*, к которому процесс (2) сходится со скоростью $\|x^*-x_n\|\leqslant\eta m^n/(1-m)$, где $m=(A\eta+\delta)/(1-\delta)$.

Теорема 2. Если выполнены условия 1) — 4) теоремы 1 и условие: 5′) оператор P аналитичен в сфере

$$\|x-x_0\|<(1-\sqrt{BH\eta})/(A+BH), \tag{4}$$

то уравнение (1) имеет в сфере (4) единственное решение.
М. А. Мертвецова

2339. Одна теорема о параллельных перенесениях выпуклых тел. Сёкефалви-Надь (Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper. Sz.-Nagy Béla), Acta scient. math., 1954, **15**, № 3—4, 169—177 (нем.)

Доказывается следующее предложение, уточняющее один результат Нахбина (Nachbin L., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, 28—46), полученный в связи с вопросами о распространимости линейных операций в пространствах Банаха: Если выпуклое тело K в n-мерном евклидовом пространстве R_n не является параллелепипедом, то параллельным перенесением K в $n+1$ или меньшее число мест можно получить систему тел K_i такую, что каждые два тела системы имеют общие точки, но пересечение всех тел системы — пустое множество. В случае параллелепипеда это не справедливо.
Г. Ш. Рубинштейн

2340. О равномерной и полуравномерной непрерывности линейных аналитических функционалов. Пеллегрино, Руджини (Sulla uniforme e semiuniforme continuita' dei funzionali analitici lineari. Pellegrino Franco, Rugini Franco), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 169—172 (итал.)

Фантапье называет функционал $F[y(t)]$, определенный в функциональной области $\mathscr{R}$, непрерывным в $y_0\in\mathscr{R}$, если для любого $\varepsilon>0$ существует в $\mathscr{R}$ такая (A,σ)-окрестность y_0, что для любой функции $y(t)$ из этой окрестности $|F[y(t)]-F[y_0(t)]|<\varepsilon$. Если для любого $\varepsilon>0$ можно выорать окрестность с одним и тем же A (или σ) для всех y из $\mathscr{R}$, то функционал называется полуравномерно непрерывным в $\mathscr{R}$ относительно A (или σ), если же можно для любого $\varepsilon>0$ выбрать одну и ту же (A,σ)-окрестность, то F называется равномерно непрерывным. Для того чтобы аналитический линейный функционал $F[y(t)]$, определенный в линейной области (A), был равномерно непрерывен в (A), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ окрестность непрерывности была образована с помощью характеристического множества A, определяющего (A). Всякий линейный функционал, определенный в (A), равномерно непрерывен в любой области $(\overline{A})$, лежащей в (A), если все точки из A являются внутренними для $\overline{A}$. Если A состоит из конечного числа точек, то для того чтобы значения линейного функционала F, определенного в (A), зависели лишь от значений $y(t)$ в точках из A, необходима и достаточна равномерная непрерывность F в (A). Полуравномерно непрерывный линейный функционал равномерно непрерывен.
Н. Я. Виленкин

2341. Линейные нормальные преобразования с простым спектром и комплексная проблема моментов. Кильпи (Lineare normale Transformationen mit einem einfachen Spektrum and das komplexe Momentenproblem. Kilpi Yrjö), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1954, **AI**, № 176, 1—34 (нем.)

Теоремы из книги Стоуна (Stone M. H., Linear transformations in Hilbert space, New York, 1932), относящиеся к гипермаксимальным симметрическим (т. е. самосопряженным) операторам с простым спектром, к симметрическим матрицам Якоби, а также к проблеме моментов Гамбургера

$$c_n=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\,d\rho(x),\quad n=0, 1, \ldots,$$

переносятся на случай, когда эти понятия заменяются следующими: вместо симметрических рассматриваются нормальные операторы (в смысле Накано) (ср. РЖМат, 1955, 5147), вместо симметрических матриц Якоби рассматриваются нормальные матрицы (a_{mn}) со следующими свойствами: $a_{mn}=0$ для $m>n+1$, $a_{n+1,n}\neq 0$, $\sum_m a_{mn}\overline{a}_{mp}=\sum_m\overline{a}_{nm}a_{pm}$; наконец, вместо проблемы моментов Гамбургера рассматривается следующая проблема моментов:

$$c_{nm}=\iint_G z^n\overline{z^m}\,d\rho(z)\quad(n, m=0, 1, \ldots),$$

где интегрирование относительно (искомой) положительной меры $\rho(z)$ производится по комплексной плоскости G. Перенос этих теорем удается только частично. Опечатки и неточности выражений затрудняют чтение работы.
B. Sz.-Nagy

2342. Множества «полжительных» функций в H-системах. Питчер (Sets of «positive» functions in H-systems. Pitcher Tom), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 3, 481—489 (англ.)

Рассматривается H-система (в смысле Эмброза, РЖМат, 1955, 345), порожденная сепарабельной, локальнокомпактной унимодулярной группой G, т. е. гильбертово пространство $H(G)=L^2(G)$ с частично определенной на нем операцией свертывания в качестве умножения. Выясняется, в какой мере такая H-система определяет группу G.

Пусть $A(G)$ — совокупность всех операторов умножения в $H(G)$, являющихся ограниченными операторами в $H(G)$; $W(G)$ — слабое замыкание кольца $A(G)$, $P(G)$ — совокупность почти всюду неотрицательных функций из $H(G)$. Элементы g группы G можно раз-

лизовать как унитарные операторы $l(g)$ левого сдвига: $l(g_0)x(g) = x(g_0 g)$ в $H(G)$; эти унитарные операторы $l(g_0)$ являются элементами кольца $W(G)$ и исходная топология в G при такой реализации совпадает с топологией, индуцированной сильной операторной топологией в $W(G)$.

Основные результаты:

1) При такой реализации G есть совокупность всех унитарных операторов $U \in W(G)$, удовлетворяющих условию $UP(G) \subset P(G)$.

2) Пусть G_1, G_2 — две сепарабельные, локальнокомпактные, унимодулярные группы и пусть w — линейное отображение $H(G_1)$ на $H(G_2)$, удовлетворяющее условиям: а) $w(P(G_1)) = P(G_2)$; б) $(w(f), w(\varphi)) = (f, \varphi)$ для любых $f, \varphi \in H(G_1)$; в) если $f, \varphi \in H(G_1)$ и $f\varphi$ определено, то $w(f)\,w(\varphi)$ также определено и $w(f\varphi) = w(f)\,w(\varphi)$. Тогда существует топологический изоморфизм $\overline{w}$ группы G_2 на G_1 такой, что $l(g)\,w(f) = w l(\overline{w}(g)) f$ для всех $g \in G_2$ и всех $f \in H(G_1)$.

Даются также обобщения этого последнего результата на тот случай, когда w есть линейное отображение $H(G_1)$ в $H(G_2)$; в этом случае топологический изоморфизм следует заменить непрерывным гомоморфизмом.

В заключение даются необходимые и достаточные условия, при которых заданная H-система с выделенным на ней множеством P является H-системой $H(G)$ некоторой сепарабельной, локально компактной унимодулярной группы и притом такой, что $P = P(G)$.

В статье имеются опечатки, некоторые из которых затрудняют понимание; так, на стр. 483, в доказательстве теоремы 1.1 вместо равенства $T_n = (x_n^{-1}\overline{U}(S_{k(n)})) \cap S_n$ напечатано $T_n = x_{k(n)}^{-1}\overline{U}(S_{k(n)} \cap S_n)$. М. А. Наймарк

2343. О гильбертовом пространстве с ядерной функцией. Мешковский (Über Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. Meschkowski Herbert), Arch. Math., 1955, 6, № 2, 151—156 (нем.)

В гильбертовом пространстве H функций $f(x)$, определенных на множестве M, рассматривается ортонормированная последовательность функций $\varphi_\nu(x)$. Если система $\{\varphi_\nu(x)\}$ полна в H и $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)$ сходится по норме, то функцию

$$K(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x)\,\overline{\varphi_\nu(y)} \qquad (1)$$

многие авторы называют воспроизводящим ядром (ядерной функцией) пространства H.

Ароншайн (Aronszajn N., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, № 3, 337—404) называет некоторую функцию $K(x, y)$ воспроизводящим ядром пространства H, если: 1) для всякого $y \in M$ $K(x, y)$ как функция от x принадлежит H; 2) имеет место «воспроизводящее свойство»: для любых $y \in M$ и $f \in H$ $f(y) = (f(x), K(x, y))_x$, где индекс x у скалярного произведения показывает, что оно берется по функциям от x.

Основные результаты: 1. В сепарабельном гильбертовом пространстве производящее ядро, в смысле Ароншайна, представимо в виде (1), а несепарабельное гильбертово пространство таким ядром не обладает. 2. Для унитарного преобразования U и обратного к нему U^{-1}, действующих в некотором гильбертовом пространстве с производящей функцией, даются представления, внешне напоминающие интегральные преобразования Фурье в $L^2(-\infty, +\infty)$.

Примечание референта. 1. В статье имеется существенная опечатка: на стр. 151 в формуле (2) слева вместо $K(x, y)$ должно быть $f(y)$. 2. Представимость производящего ядра, в смысле Ароншайна, в виде (1) была доказана А. Я. Повзнером (Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1952, 40, 27—47). Д. Ф. Харазов

2344. Об описании всех унитарных представлений комплексных классических групп. I. Наймарк М. А., Матем. сб., 1954, 35(77), № 2, 317—356

Неприводимые унитарные представления классических комплексных групп (т. е. комплексной унимодулярной, комплексной ортогональной и комплексной симплектической групп) были описаны и подробно изучены в совместных работах И. М. Гельфанда и автора. Найденные классы представлений были ими названы основными и дополнительными сериями. Целью работы является доказательство следующих двух утверждений: 1. Всякое неприводимое унитарное представление комплексной классической группы эквивалентно одному из ее представлений основных или дополнительных серий. 2. Всякое унитарное представление комплексной классической группы разлагается в прямую континуальную сумму ее неприводимых унитарных представлений (краткое сообщение автора об этих результатах дано в Докл. АН СССР, 1952, 84, № 5, 883—886). Ранее эти результаты были получены совместно И. М. Гельфандом и автором для случая комплексной унимодулярной группы второго порядка, а также для унитарных представлений комплексной унимодулярной группы порядка n, содержащих единичное представление унитарной подгруппы.

Данная часть работы содержит некоторые необходимые для дальнейшего построения. Пусть $\mathfrak{G}$ — исходная группа, $\mathfrak{U}$ — ее унитарная подгруппа, $g \to T_g$ — заданное унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Соответствующее представление $u \to T_u$ унитарной подгруппы $\mathfrak{U}$ распадается в прямую сумму конечномерных унитарных представлений. Пусть $c(u)$ — какое-либо из этих представлений, имеющее размерность r, и $\|c_{ij}(u)\|$ — матрица оператора $c(u)$ в весовом базисе. В кольце $L_1(\mathfrak{G})$ суммируемых функций на группе рассматривается совокупность R_0' функций $x(g)$, для которых $x(g) = r\int \overline{c_{11}(u)}\,x(gu)\,d\mu(u) = r\int x(ug)\,\overline{c_{11}(u)}\,d\mu(u)$, где $d\mu(u)$ — инвариантная мера в $\mathfrak{U}$, причем $\int d\mu(u) = 1$. R_0' есть замкнутое подкольцо с инволюцией кольца $L_1(\mathfrak{G})$. Представление T_g группы $\mathfrak{G}$ индуцирует представление T_x кольца $L_1(\mathfrak{G})$ в пространстве $\mathfrak{H}$ и представление A_x кольца R_0' в подпространстве функций φ, для которых $\varphi = r\int c_{11}(u)\,T_u\varphi\,d\mu(u)$. При этом из неприводимости представления T_g следует неприводимость представления A_x, ввиду чего задача об отыскании всех неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}$ сводится к задаче об отыскании неприводимых представлений колец R_0'. Два неприводимых представления T_g' и T_g'' группы $\mathfrak{G}$, содержащих фиксированное неприводимое представление $c(u)$ группы $\mathfrak{U}$, эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие представления A_x' и A_x'' кольца R_0'. Рассматривается также множество $\mathfrak{R}'$ функций $x(g)$, для которых $x(g) = r\int \overline{c_{11}(u)}\,x(gu)\,d\mu(u) = r'\int x(ug)\,\overline{c'_{11}(u)}\,d\mu(u)$, где $c'(u)$ — некоторое не обязательно эквивалентное $c(u)$ неприводимое унитарное представление размерности r' группы $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{R}'$ может быть отлично от 0 лишь тогда, когда в пространствах представлений $c(u)$ и $c'(u)$ имеются весовые векторы одного веса.

Пусть χ — характер подгруппы диагональных матриц из $\mathfrak{G}$. Непрерывной, равной нулю вне компактного множества функции $x(g)$ можно сопоставить функцию $K(u_1, u_2, \chi)$ — ядро оператора T_x представления, отвечающего χ. Изучаются отображения R_0' и $\mathfrak{R}'$ в кольцо ядер $K(u_1, u_2, \chi)$. М. И. Граев

2345. Формула Планшереля для комплексных полупростых групп Ли. Хариш-Чандра (The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups. Harish-Chandra), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 76, № 3, 485—528 (англ.)

Путем весьма сложных построений выводится аналог формулы Планшереля для комплексных полупростых групп Ли. Первоначально формула была получена (также путем сложных вычислений) И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком для случая комплексной унимодулярной группы (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, 36). Позднее И. М. Гельфанд и референт (РЖМат, 1954, 3246) указали простой общий метод получения аналога формулы Планшереля для полупростых групп Ли. Последняя статья автору, повидимому, неизвестна. М. И. Граев

2346. Многочлены Бернштейна и полугруппы операторов. Кендал (Bernstein polynomials and semigroups of operators. Kendall David G.), Math. scand., 1954, 2, № 2, 185—186 (англ.)

Рассматривается сильно непрерывная полугруппа $\{T_t : t \geqslant 0\}$ ограниченных линейных операторов в действительном банаховом пространстве X. Доказывается, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ последовательность операторов $[(1-t)I + tT_{1/n}]^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сильно сходится к T_t, притом равномерно относительно t. Применив этот результат к случаю, когда X — пространство непрерывных действительных функций $x(u)$ на интервале $0 \leqslant u < \infty$, таких, что $x(u) \to 0$ при $u \to \infty$, T_t — полугруппа переносов $[(T_t x)(u) = x(u+t)]$, $x(u)$ — элемент пространства X — задается на $[0,1]$ произвольно, а при $u > 1$ $x(u) = x(1)/u$, автор получает теорему С. Н. Бернштейна о равномерном приближении непрерывной функции $x(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ многочленами $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (1-t)^{n-r} t^r f(r/n)$. Д. А. Васильков

2347. Об одном классе операторов в пространстве непрерывных векторных функций. Орлич (On a class of operations over the space of continuous vector valued functions. Orlicz W.), Studia math., 1954, 14, № 2, 285—297 (англ.)

Автор рассматривает пространство $C(X)$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, принимающих значения в банаховом пространстве X, а также пространство $C(X)_p$ непрерывных на всей прямой функций с периодом p и со значениями в X. Эти пространства являются банаховыми при норме $\|x\|_C = \max \|x(t)\|$. Символы $L_\omega(X)$ и $L_\omega(X)_p$ означают соответственно подмножества пространств $C(X)$ и $C(X)_p$, состоящих из функций x, для которых

$$\mu = \sup \frac{\|x(t+h) - x(t)\|}{\omega(|h|)} < \infty,$$

где $\omega(u)$ — функция, не убывающая на $[0, \infty)$ и такая, что $\omega(0) = 0$, $\omega(u) > 0$ для $u > 0$ и $\lim_{u \to 0+} \omega(u) = 0$. Пространства $L_\omega(X)$ и $L_\omega(X)_p$ — банаховы при норме $\|X\|_\omega = \|X\|_C + \mu$. При $\omega(u) = |u|^\alpha$ пространства $L_\omega(X)$ и $L_\omega(X)_p$ обозначаются через $L_\alpha(X)$ и $L_\alpha(X)_p$.

Пространство называется инвариантным относительно сдвигов, если для каждого τ функция $x(t+\tau)$ принадлежит этому пространству вместе с $x(t)$.

Теорема 1. Если $C_0(X)_p$ означает замкнутое подпространство пространства $C(X)_p$, инвариантное относительно сдвигов, то существует последовательность линейных операторов $T_n(x) = y_n(t)$, отображающих $C_0(X)_p$ в $C_0(X)_p \cap L_1(X)_p$, такая, что а) функции $y_n(t)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной $A_n = n\|x\|_\omega\, \omega(1/n)$; б) $\|x - y_n\|_C \leqslant \omega(1/n)\|x\|_\omega$. Эта теорема справедлива также для пространства $C(X)$, но при этом правую сторону неравенства (б) надо помножить на 2. Автор дает три разных способа построения операторов $T_n(x)$.

Теорема 2. Если функции $y_n(t) \in C_0(X)_p$ удовлетворяют условиям: a_1) $\|y_n(t_1) - y_n(t_2)\|_C = O(n\omega(1/n) \times |t_1 - t_2|)$; $б_1$) $\|x - y_n\|_C = O(\omega(1/n))$, то $x(t) \in C_0(X)_p \cap \cap L_\omega(X)_p$.

Теорема 3. Пусть $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$(m) \quad \omega(uv) \leqslant c\omega(u)\,\omega(v),\ \lim_{u \to \infty} u^{-1}\,\omega(u) = 0.$$

Если $y_n \in C_0(X)_p$, $\|y_n(t)\|_C = O(\omega(1/n))$ и если выполнено условие (a_1), то всякий лакунарный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_{a^n}(t)$ равномерно сходится к некоторой функции из $C_0(X)_p \cap L_\omega(X)_p$, при условии, что $c\omega(1/a) < 1$, $c\omega(a)\,a^{-1} < 1$.

Теорема 4. Пусть пространство $C_0(X)_p$ инвариантно относительно сдвигов и пусть $U(x)$ — линейное преобразование в $C_0(X)_p$, переводящее пространство $C_0(X)_p \cap L_1(X)_p$ в себя. Тогда это преобразование отображает пространства $L_\omega(X)_p$ в себя и суженное до этих подпространств является линейным. Автор дает также некоторые варианты последней теоремы и приложения к теории множителей ортогональных рядов.

A. Alexiewicz

2348. Об экспоненциальных решениях дифференциальных уравнений для линейного оператора. Магнус (On the exponential solution of differential equations for a linear operator. Magnus Wilhelm), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 361—362 (англ.)

Пусть $A(t)$ — линейный оператор, зависящий от вещественного параметра t, и пусть $U(t)$ — оператор, определяемый уравнением $dU/dt = AU$. Если решение этого дифференциального уравнения представимо в виде $U = \exp \Omega$, то оператор Ω должен удовлетворять нелинейному уравнению

$$d\Omega/dt = F(A, \Omega),$$

где F — ряд из коммутаторов A и Ω.

Явный вид F, так же как и формальное выражение для Ω в терминах A, могут быть получены из формулы Бекера (Baker H. F., Proc. London Math. Soc., 1904, 3, 24—47) и Хаусдорфа (Hausdorff F., Ber. Saechsisch. Akad. Wiss. Math.-phys. Kl., Leipzig, 1906, 58, 19—48). Они могут быть получены также непосредственно с помощью метода, который, в свою очередь, дает упрощенный вывод результатов Бекера и Хаусдорфа.

В случае, когда A есть матрица коэффициентов конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, указывается область применимости формулы для Ω. Даются достаточные условия, при которых выражение для U содержит лишь конечное число квадратур.

В. Б. Лидский

2349. О базисе в пространстве непрерывных функций, определенных на компакте. Вахер Ф. С., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 4, 589—592

Доказывается существование базиса в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций, определенных на произвольном компакте Q. Сначала строится базис в пространстве $C(K)$, где K — основной параллелепипед гильбертова пространства, а для случая произвольного компакта Q существование базиса в $C(Q)$ доказывается погружением Q в K. В. И. Соболев

2350. **Метрические пространства последовательностей, суммируемых непрерывными методами. Влодарский** (Les espaces métriques des suites limitables par les méthodes continues. Włodarski L.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1954, **2**, № 1, 13—16 (франц.)
См. РЖМат, 1955, 3294.

2351. **О полных определяемых нормой топологиях в линейных пространствах. Лаугвиц** (Über vollständige Normtopologien in linearen Räumen. Laugwitz Detlef), Arch. Math., 1955, **6**, № 2, 128—131 (нем.)
На бесконечномерном линейном пространстве L либо вовсе нельзя ввести норму, превращающую его в банахово пространство, либо это можно делать $2^{\mathfrak{a}(L)}$ различными способами, где $\mathfrak{a}(L)$ — аффинная размерность пространства L (РЖМат, 1955, 869). Последнее во всяком случае имеет место, если $\mathfrak{a}(L)=b^{\aleph}$. То же справедливо и для гильбертовых нормирований, причем если возможны последние, то возможны и банаховы негильбертовы нормирования.
Д. А. Райков

2352 Д. **Элементы дифференциального исчисления и теории распределений на локально компактных абелевых группах. Рисс** (Eléments de calcul différentiel et théorie des distributions sur les groupes abéliens localement compacts. Riss Jean), Thèses docteur des sciences math. Fac. Sci. Univ. Nancy, 1950 (1953), 45—105) (франц.)
Полный текст докторской диссертации, которая была защищена автором 6 февраля 1950 г. в Нанси и опубликована в 1953 г. в журнале «Acta mathematica» (РЖМат, 1953, 603).
Г. Е. Шилов

2353 Д. **Некоторые топологические свойства нелинейных отображений в функциональных пространствах. Герчинский Р.** Автореф. дисс. канд физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

2354 Д. **К вопросу об оценке количества критических точек функционалов. Борисович Ю. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т. Казань, 1955

См. также: 1860, 1861, 1975, 2019, 2099, 2105, 2119, 2121, 2189, 2207, 2208, 2212, 2217, 2224, 2226, 2230. 2241, 2274, 2291, 2430, 2460

ГЕОМЕТРИЯ

2355. **Антисимметрия конечных фигур. Шубников А. В.,** Тр. Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1954, № 10, 3—5
Рассматривается антисимметрия конечных фигур. Операции симметрии в трехмерном пространстве могут быть определены как операции преобразования осей в четырехмерном пространстве при помощи ортогональной матрицы

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

Операциям антисимметрии соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Геометрически операции антисимметрии можно рассматривать как операции симметрии, сопровождающиеся выворачиванием фигуры наизнанку (последняя операция не обязательно должна сопровождаться переходом правой фигуры в левую). Автор указывает, что им получены все группы обобщенной симметрии для конечных фигур с особенной точкой или точками.
Э. Г. Позняк

2356. **Некоторые вопросы аксиоматики евклидовой геометрии. Рожанская Ю. А.,** Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, **20**, № 3, 59—123
Статья представляет собой научно-методический анализ вопросов аксиоматики евклидовой геометрии. В § 1 изложение начинается с основных понятий, например понятия совместности и независимости системы аксиом. Вопрос полноты системы аксиом связывается с вопросом изоморфизма, воспроизводится определение полноты, данное в книге Н. В. Ефимова (Высшая геометрия, 1945, стр. 166). В § 2 проводится разбор аксиоматики Гильберта; методом автора доказывается полнота этой аксиоматики. Исследуется также аналитическое пространство. Доказывается выполнение всех аксиом Гильберта в аналитическом пространстве. § 3 посвящен групповым свойствам аксиоматики в связи с идеями Клейна, § 4 — аффинно-метрической системе аксиом, § 5 — вопросам топологии евклидова пространства.
А. С. Кованько

2357. **Замечания к предыдущей работе «Пересечение линейного подпространства с положительной координатной областью». Дейвис** (Remarks on a previous paper. Davis Chandler), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 1, 23—25 (англ.)
Даются упрощенные доказательства результатов предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 1910). Кроме того, даны два доказательства следующей теоремы: Остроконечный выпуклый полиэдральный конус аффинно эквивалентен пересечению положительного ортанта в соответственно выбранном пространстве с линейным подпространством (положительным ортантом называется совокупность векторов с неотрицательными координатами). Так как каждый выпуклый политоп может быть получен пересечением такого конуса с гиперплоскостью, то отсюда следует, что каждый выпуклый политоп конгруэнтен сечению симплекса и может быть получен ортогональным проектированием симплекса.
В. В. Морозов

2358. **Заполнение и покрытие выпуклой сферической поверхности посредством круга. II. Молнар** (Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise. II. Molnár J.), Publs mathematicae, 1953, **3**, № 1—2, 150—157 (нем.)
Автор доказал теорему, что плотность перекрытий выпуклой сферической области на полусфере, которая покрыта по меньшей мере тремя конгруэнтными сферическими шапочками, больше, чем $2\pi/\sqrt{27}$. Если выпуклая область не лежит на полусфере, то утверждение доказано только при ограничении, что каждая окружность пересекает границу области не более чем в двух точках. Аналогичная теорема для распределения (Einlagerung) была доказана в части I (Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 266—275).
I. Vincze

2359. **Геометрия и интуиция. Хан** (Geometry and intuition. Hahn Hans), Scient. Amer., 1954, **190**, № 4, 84—88, 90—91 (англ.)
Частичное изложение лекции на тему «Кризис интуиции», прочитанной несколько лет назад Ханом в Венском (математическом) кружке. Приводятся примеры геометрических конструкций, противоречащих

интуиции: непрерывная кривая, ни в одной точке не имеющая касательной; кривая Пеано, заполняющая квадрат; кривая, у которой все точки суть точки ветвления (Серпинский); карта, изображающая три государства, расположенные так, что к каждой точке границы примыкают все три (Брауер).

Автор считает, что можно развить интуицию, согласующуюся с этими фактами. Статье предшествует краткое редакционное введение, содержащее общие соображения о разрыве между интуицией и современными научными концепциями. Н. М. Бескин

2360. **Конечная картина мира. Ернефельт** (Ein endliches Weltbild. Järnefelt G.), Sitzungsber. Finnischen Akad. Wiss., 1953 (1954), 159—175 (нем.)

Предлагается заменить евклидову модель пространства, в которой координатами точек являются вещественные числа, конечной моделью в виде евклидова пространства над полем вычетов по достаточно большому простому числу p. Хотя такое пространство состоит из конечного числа точек, при достаточно большом p эти точки расположены достаточно «густо», для того чтобы не противоречить опыту.

Б. А. Розенфельд

2361. **Тензорное исчисление с элементарной точки зрения. Варини** (Il calcolo tensoriale da un punto di vista elementare. Varini Bruno), Archimede, 1954, 6, № 4—5, 140—149 (итал.)

Продолжение (РЖМат, 1955, 912). Отправляясь от 3-мерного евклидова пространства автор отождествляет контравариантный (ковариантный) тензор 1-й валентности тройкой чисел, преобразующихся как совокупность декартовых координат вектора (коэффициентов инвариантной линейной формы). Рассматриваются алгебраические операции над тензорами и дается представление о переносе теории на кривое n-мерное пространство. Я. С. Дубнов

2362. **Геометрические задачи на построение и аналитическая геометрия. Потоцкий М. В.**, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, **20**, № 3, 175—179

На основе общего исследования уравнений, выражающих в выбранной системе координат условия данной задачи на построение, ищется синтетический метод решения этой задачи. Приведены элементарные примеры. В. Т. Базылев

2363. **Опыт классификации доказательств теоремы Пифагора. Натуччи** (Saggio di una classifica delle dimostrazioni del teorema di Pitagora. Natucci Alpinolo), Archimede, 1954, 6, № 4—5, 156—161 (итал.)

Цель классификации (предшественники — Ф. Бернштейн, Дж. Лориа и др.) — выделение доказательств, простейших в некотором условном смысле. Доказательства разбиты на пять групп в соответствии с последовательно расширяющимся логическим фундаментом. С педагогической оценкой доказательств эта классификация имеет мало общего. Я. С. Дубнов

2364. **О равносоставленности равновеликих параллоэдров Е. С. Федорова. Андронов И. К.**, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, **20** (3), 125—132

Е. С. Федоров установил (Начала учения о фигурах, 1885 г.) существование пяти (и только) различных выпуклых параллоэдров, параллельным перенесением которых заполняется пространство. В работе устанавливается, что все эти параллоэдры, будучи попарно равновеликими, являются в этом случае и равносоставленными. М. В. Потоцкий

2365. **Три обратные теоремы. Бест** (Een drietal omgekeerden. Best J.), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1954 (1955), **42**, № 3, 175—178 (голл.)

Доказывается, что если числа a, b, c, α, β, γ удовлетворяют одному из трех заданных условий (выражающих теорему синусов, теорему косинусов и теорему проекций), то они являются сторонами и углами некоторого треугольника. Результат не является новым (Новоселов С. И., Специальный курс тригонометрии, М., Изд-во «Сов. наука», 1953, № 57). Г. К. Энгелис

2366. **Математические фигуры. Уэлс** (Mathematical figures. Wells Franklin B.), School Sci. and Math., 1954, **54**, № 9, 695—698 (англ.)

Приводятся построения различных фигур, получаемых вращением некоторых отрезков в равностороннем треугольнике вокруг различных центров. Исходным отрезком является радиус OC описанного круга, вращающийся на определенный угол вокруг центра O. С. И. Зетель

2367. **Анри Брокар и геометрия треугольника. Гуггенбул** (Henri Brocard and the geometry of the triangle. Guggenbuhl Laura), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 420—421 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5211.

2368. **Заметка по элементарной геометрии. Даниэльссон** (Lidt elementaer geometri. Danielsson Olafur), Nord. mat. tidskr., 1954, **2**, № 4, 156, 191 (дат.; резюме англ.)

Если выпуклый четырехугольник разделить диагоналями на треугольники, то прямая, соединяющая центры тяжести двух противоположных треугольников, перпендикулярна к прямой, проходящей через точки пересечения высот оставшихся треугольников. С. Г. Кислицын

2369. **Обобщение теоремы Птолемея. Былинский** (Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ptolemaios. Bilinski Stanko), Simon Stevin, 1954, **30**, № 2, 90—93 (нем.)

Доказывается, что если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — множество точек, расположенных на окружности, и a_{ij} — длина отрезка $A_i A_j$ ($a_{ij} > 0$, если $i < j$), то ранг матрицы $M_n = \| a_{ij} \|$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) равен 2.

Теорема Птолемея представляется в форме $a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} = 0$ и является частным случаем доказанной теоремы. Частным случаем теоремы является теорема Пруэ (Prouhet M. E., Théorème sur l'hexagone, Nouv. ann. math., 1865, II ser., 4), о зависимости между сторонами и диагоналями шестиугольника, вписанного в круг. С. И. Зетель

2370. **Задача по элементарной геометрии. Малер** (A problem in elementary geometry. Mahler Kurt), Math. Gaz., 1954, **38**, № 326, 241—243 (англ.)

Рассматриваются два треугольника, из которых вершины первого лежат на сторонах второго. Утверждается, что при вращении первого треугольника на достаточно малый угол его вершины остаются внутри второго треугольника. Исследуются различные случаи в зависимости от расположения точки пересечения двух перпендикуляров, восставленных в вершинах первого треугольника к сторонам второго. С. И. Зетель

2371. **О точках Фейербаха. Бланшар** (Sur les points de Feuerbach. Blanchard René), Mathesis, 1954, **63**, № 9—10, 349—356 (франц.)

Автор аналитически устанавливает ряд новых свойств известных в геометрии треугольника точек Фейербаха. Им доказана теорема о том, что прямая, соединяющая две точки Фейербаха треугольника ABC, касается некоторого эллипса, имеющего своей главной окружностью окружность девяти точек (окружность Эйлера); фокусы этого эллипса лежат на прямой, проходящей через центр окружности Эйлера параллельно биссектрисе одного из углов треугольника. В частном случае, когда один из углов треугольника равен

60° или 120°, получается теорема В. Тебо (Mathesis, 1947, 56, 244).

Кроме того, автором аналогично доказаны еще две теоремы, выражающие другие свойства точек Фейербаха, связанные с рассмотренной конфигурацией. М. П. Черняев

2372. Прямая Симсона. Шюллер (La recta de Simson. Schüller J.), Rev. mat. elementales, 1954, 3, № 3—4, 54—61 (исп.)

Из точки M окружности, описанной около треугольника ABC, опускаются перпендикуляры из стороны треугольника ABC. Основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой, называемой прямой Симсона данного треугольника относительно точки M. Рассматриваются некоторые свойства прямой Симсона: 1) если из точки M, лежащей на плоскости треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны этого треугольника и основания перпендикуляров лежат на одной прямой, то точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, 2) касательная к параболе в ее вершине является прямой Симсона треугольника, образованного пересечением любых трех касательных к данной параболе, и т. д. И. Н. Григорьев

2373. Шестиугольники Паскаля, связанные с треугольником. Тебо (Pascal hexagons associated with a triangle. Thébault Victor), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 5, 328—330 (англ.)

Теорема Паскаля применяется к шестиугольникам, вписанным в окружность, связанную с данным треугольником ABC. Пусть M — произвольная точка на BC, $MP \parallel AB$, $MN \parallel AC$, $P \equiv MP \times AC$, $N \equiv MN \times AB$, (C) — окружность MNP, X, Y и Z — вторые точки пересечения этой окружности соответственно с BC, CA и AB. В таком случае паскалевой прямой шестиугольника $MNZXYP$ служит симедиана из вершины A (симедиана — прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы), а паскалевы прямые шестиугольников $MZNXPY$ и $MZNXYP$ (в работе все три шестиугольника названы ошибочно) пересекаются на этой симедиане. В частном случае, когда (C) есть окружность девяти точек, связь упомянутых шестиугольников с треугольником ABC становится еще более тесной. Н. М. Бескин

2374. Ортогонально-ассоциированные треугольники. Кавалларо (Triangoli ortogonalmente associati. Cavallaro Vincenzo G.), Giorn. mat. Battaglini, 1954, 82, № 2, 423—427 (итал.)

2375. О поверхностях второго порядка (квадриках), нормально вписанных, описанных или приписанных к тетраэдру. Мармион (Sur les quadriques normalement inscrites, circonscrites ou anscrites à un tétraèdre. Marmion A.), Mathesis, 1954, 63, № 6—8, suppl., 1—13 (франц.)

Кривые второго порядка называются нормально вписанными или описанными около треугольника, если нормали в точках касания, или соответственно в вершинах треугольника пересекаются в одной точке. Аналогично квадрики называются нормально вписанными или описанными около тетраэдра, если нормали в точках касания граней или соответственно в вершинах тетраэдра пересекаются в одной точке. Квадрика нормально приписана к тетраэдру, если она касается всех его ребер, и плоскости, перпендикулярные к ребрам в точках касания, пересекаются. Во всех трех случаях точка пересечения называется нормальным полюсом тетраэдра и обозначается соответственно λ, ρ, ν.

Рассматриваются свойства точек λ, μ, ν в различных тетраэдрах, в частности в ортоцентрическом.

Рассматриваются цилиндры Дарбу, определенным образом связанные с нормальным полюсом тетраэдра. С. И. Зетель

2376. О конической спирали. До (Sur la spirale conique. Deaux R.), Mathesis, 1954, 63, № 9—10, 328—334 (франц.)

Доказывается, что коническая винтовая линия («коническая спираль»): $x = av\cos v$, $y = av\sin v$, $z = bv$ получается как геометрическое место оснований перпендикуляров (псевдоподэра), опущенных из начала координат на соприкасающиеся плоскости цилиндрической винтовой линии:

$$x = -\frac{a^2+b^2}{a}\sin v,\quad y = \frac{a^2+b^2}{a}\cos v,\quad z = \frac{a^2+b^2}{b}v.$$

К. И. Гринцевичюс

2377. О винтовых конхоидах и винтовой линейчатой поверхности, возникающей при конхоидально-винтовом движении. Хорнингер (Über Konchoidenschraublinien und die durch Konchoidenschraubung erzeugbaren Regelschraubflächen. Horninger H.), Monatsh. Math., 1954, 58, № 4, 225—240 (нем.)

Частным видом рассмотренного ранее (РЖМат, 1955, 5225) трохоидально-винтового движения является конхоидально-винтовое движение (Konchoidenschraubung), которым порождаются винтовая конхоида (Konchoidenschraublinie), в частности, винтовая кардиоида (Kardioidenschraublinie) и линейчатая винтовая поверхность (Regelschraubfläche). Изучены взаимные отношения рассматриваемых движений, линий и поверхностей. Путем ортогонального проектирования последних на плоскость найден ряд свойств кривых Паскаля (в частности, кардиоиды), являющихся проекциями винтовых конхоид. И. В. Цыганков

2378. Площади, образованные отрезками касательных. Хаммер (Areas swept out by tangent line segments. Hammer Preston C.), Math. Mag., 1954, 28, № 2, 65—70 (англ.)

Площадь части развертывающейся поверхности, образованной отрезками касательных к пространственной кривой $\vec{x} = \vec{x}(s)$, дается формулой

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} [\rho(\alpha)]^2\, d\alpha,$$

где $d\alpha$ — угол между бесконечно близкими касательными к кривой, а $\rho(\alpha)$ — длина отрезка касательной. В плоском случае эта формула по существу эквивалентна одной из формул Гюльдена.

Формула прилагается к вычислению некоторых определенных интегралов. Г. Я. Поплавская

2379 К. Аналитическая геометрия (Учебник для вузов). **Привалов И. И.** Изд. 20-е, стереотип., М., Гостехиздат, 1955, 300 стр. с черт., 6 р. 90 к.

2380 К. Аналитическая геометрия (обзор вопросов и ответов, приведенных в соответствие со стандартными учебниками). Окли (Analytic geometry (review questions and answers keyed to standard textbooks). Oakley Cletus Odia, Barnes and Noble, 1954, 246 pp., 1.25), Cumul. Book Index, 1954, 57, № 9, 81 (англ.)

2381 К. Упражнения и задачи по курсу аналитической геометрии в высшей технической школе. Ч. 3. Мургулеску, Цино, Бэнэреску (Exerciţii şi probleme pentru cursul de geometrie analitică in şcolile tehnice supericare. Partea 3-a. Murgulesku Elena, Ţino Oviliu, Bănărescu Valeriu. Bucureşti, Ed. Inst. de căi ferate, 1955, 210 p., Litografiat) Bul. bibliogr., 1955, А4, № 8, 5 (рум.)

2382 К. Основы тензорного исчисления в аналитическом изложении. Часть I. Тензорная алгебра. Душек, Хохрайнер (Grundzüge der Tensorrech-

nung in analytischer Darstellung. Teil 1. Tensoralgebra. Duschek Adalbert, Hochrainer August. 3. Aufl. Wien, Springer, 1954, IV 129 S., 26 Textabb. 12 DM.), Oesterr. Bibliogr., 1955, № 2, 10 (нем.)

2383 Д. **Исследование становления и развития начертательной геометрии в России XIX века.** Гусев В. А. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. автомехан. ин-т, М., 1955

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2384. **К доказательству непротиворечивости геометрии Лобачевского.** Меркулов А. М., Уч. зап. Чувашск. гос. пед. ин-та, 1953, 1, 59—61

2385. **О геометрических построениях, применяемых при решении задач начертательной геометрии с помощью теории родственного соответствия.** Бушнев А. А., Тр. Азерб. индустр. ин-та, 1954, № 8, 98—113

Рассматриваются некоторые из тех задач начертательной геометрии, которые могут быть решены при помощи родственного соответствия двух полей проекций на комплексном чертеже. Вводится понятие «главных направлений плоскости» как такой пары прямых, которая проектируется на каждую из двух плоскостей проекций ортогональной парой. Далее рассматривается «эллипс главных направлений», представляющий собой геометрическое место точек, определяющих главные направления для данного пучка плоскостей.

Отмечается роль этих понятий на примерах решения задач. Н. Ф. Четверухин

2386. **Применение гиперболы к построению проекций линий пересечения некоторых поверхностей второго порядка.** Дешевой Г. М., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1954, 28, 26—30

Статья посвящена вопросу о построении проекции линии пересечения двух поверхностей второго порядка с пересекающимися осями на плоскость, параллельную плоскости осей. При этом предполагается, что проекция линии пересечения является гиперболой. Рассмотрены пересечения 1) двух круговых цилиндров, 2) круговых цилиндра и конуса. В обоих случаях проекция линии пересечения представляет собою равностороннюю гиперболу, для которой легко могут быть найдены ее оси и две ее точки. Автор приводит графическое построение равносторонней гиперболы, вытекающее из ее уравнения. Приведено также графическое построение вершины гиперболы с полуосями, вообще говоря, отличными друг от друга в случае, когда известны оси и какие-либо две точки гиперболы. Г. Ф. Морошкин

2387. **Дезарг и его необыкновенная теорема.** Корт (Desargues and his strange theorem. Court Nathan Altshiller), Scripta math., 1954, 20, № 1—2, 5—13 (англ.)

Изложение лекции, прочитанной на собрании Общества друзей Scripta Mathematica.

Рассматривается вопрос о треугольниках, перспективных двумя или тремя способами. Доказывается теорема: если треугольник ABC перспективен двум треугольникам из группы $A'B'C'$, $B'C'A'$, $C'A'B'$ или из группы $A'C'B'$, $C'B'A'$, $B'A'C'$, то он перспективен и третьему треугольнику той же группы. Н. М. Бескин

2388. **Пучки кривых постоянной кривизны на плоскости Лобачевского.** Нахимовская А., Уч. зап. Белорус. ун-та, сер. физ.-матем., 1954, № 16, 44—55

Рассматриваются однопараметрические семейства окружностей, эквидистант и орициклов на плоскости Лобачевского, уравнения которых имеют вид $mL_1 + nL_2 = 0$, где $L \equiv Ax + By + Cz - D = 0$ — уравнение окружности, эквидистанты или орицикла ($x = \operatorname{ch}\frac{u}{k}\operatorname{sh}\frac{u}{k}$, $y = \operatorname{sh}\frac{u}{k}$, $z = \operatorname{ch}\frac{u}{k}\operatorname{ch}\frac{v}{k}$, $z^2 - x^2 - y^2 = 0$, причем u, v — декартовы координаты плоскости Лобачевского, k — постоянная Лобачевского). В состав пучка входит прямая, называемая радикальной осью пучка. Доказывается, что степень любой точки радикальной оси пучка ($\operatorname{ch}\frac{t}{k}$, где t — отрезок касательной, проведенной из данной точки к кривой) относительно любой кривой пучка одинакова и исследуется структура всех возможных пучков окружностей, эквидистант и орициклов на плоскости Лобачевского. М. А. Джафаров

2389. **О плоских конфигурациях (12_4, 16_3).** Метелка Иозеф (O rovinných konfiguracích (12_4, 16_3). Metelka Josef), Časop. pěstov mat. 1955, 80, № 2, 133—145 (чеш.; резюме русс., нем.)

Совокупность 12 точек и 16 прямых на проективной плоскости называем конфигурацией (12_4, 16_3), если каждая из этих точек инцидентна с четырьмя прямыми и каждая из прямых инцидентна с тремя точками. Занумеруем точки конфигурации 1,2, ..., 12. Символ 1—11—12 означает, что точки 1, 11, 12 «соединены» (лежат на прямой конфигурации). Символ 2 : 3 означает, что точки 2,3 «отделены», т. е. не лежат на прямой конфигурации. Допустим 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4. Тогда по определению точка 1 есть точка типа A, если 2 : 3, 2 : 4, 3 : 4; она будет типа B, если 2—3, 3—4, 2—4 и не имеет место 2—3—4; она будет типа C, если 2—3, 2—4, 3—4; она будет типа D, если 2 : 3, 2 : 4, 3 —4. Две конфигурации эквивалентны, если схема инциденций одной переходит в схему другой, измененной перестановкой точек. Автор показывает, что существует только 8 неэквивалентных конфигураций (12_4, 16_3), которые содержат хотя бы одну точку типа A и реализуются проективными прямыми над полем комплексных чисел. Четыре из них были известны ранее Гессе (O. Hesse), де-Врису (J. de Vries), Быджовскому (B. Bydžovský) и автору. Четыре остальных — новые. K. Havliček

2390. **О точечных преобразованиях между совмещенными проективными плоскостями.** Мураккини (Sulle transformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti. Muracchini Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 4, 360—366 (итал.)

Совмещенные проективные плоскости π и $\bar{\pi}$ относятся к одному треугольнику референции. Между точками этих плоскостей устанавливается точечное преобразование, которое автор называет преобразованием T, посредством формул $\bar{x} = f(x, y)$, $\bar{y} = \varphi(x, y)$, где (x, y) — проективные неоднородные координаты некоторой точки A, а $(\bar{x}, \bar{y})$ — проективные неоднородные координаты соответствующей точки $\bar{A}$ в преобразовании T. Предполагается, что функции f и φ однозначны и дифференцируемы. С каждым точечным преобразованием связывается ряд проективитетов и изучаются геометрические понятия, связанные с этими проективитетами. Например, между прямыми пучков с центрами в паре соответствующих точек A и $\bar{A}$ преобразованием T индуцируется проективитет

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot m \cdot \bar{m} + \frac{\partial f}{\partial x}\bar{m} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} m - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

где m и $\bar{m}$ — направляющие параметры прямых. Б. Н. Саморуков

2391 К. Начертательная геометрия. Меншик (Deskriptivní geometrie. (Topografické a šroubové plochy). Mensik Miroslav, 72 [2] s., 41 s., obr. příl. 2 obr., tb., Praha, SNTL, 1954, 8, 10 Kčs), Česka kniha, 1954, № 29, 785 (чеш.)

2392 К. Неевклидова геометрия. Михэйляну (Geometrie neeuclidiană. Mihăileanu N.), Bucureşti Ed. Acad. RPR, 1954, 143 s. (рум.)

Изложение неевклидовой геометрии Лобачевского и Римана. В первой части — аналитическое изложение обычной сферической геометрии и тригонометрии. Во второй части автор дает определение неевклидовых плоскостей Лобачевского и Римана как проективной плоскости, метризованной с помощью абсолюта, и, опираясь на формальное сходство полученных формул с формулами сферической геометрии, доказывает большое число теорем неевклидовой геометрии (метрические соотношения, свойства окружностей и эквидистант, формулы тригонометрии, теорема о сумме углов треугольника, свойства движений). Здесь же приводится классификация кривых второго порядка на плоскости Лобачевского, в которой пропускается случай одноветвевой вогнутой гиперболической параболы (приводится только случай двухветвевой вогнутой гиперболической параболы). Приводится также ряд определений и фактов трехмерной неевклидовой геометрии. В третьей части излагается аналитическая геометрия плоскости Лобачевского, в четвертой — основы дифференциальной геометрии плоскости и пространства Лобачевского, в пятой — евклидова интерпретация (Пуанкаре). В частности, в четвертой части, опираясь на дифференциальную геометрию, автор доказывает, что площадь треугольника на плоскости Лобачевского пропорциональна его угловому дефекту, что на орисфере имеет место евклидова геометрия, что плоскость Лобачевского частично реализуется на псевдосфере, а также излагаются первоначальные понятия геометрии римановых пространств. В пятой части излагается аксиоматика Гильберта плоскости Лобачевского и проверяется на модели Пуанкаре.

Примечание референта. Изложение сильно выиграло бы, если бы автор в первой части, изложив геометрию на обычной сфере, ввел понятие евклидова пространства со знаконеопределенной метрикой (псевдоевклидова пространства) и рассмотрел геометрию на сферах в этом пространстве. Тогда во второй части он мог бы, не опираясь на формальную аналогию и даже не привлекая проективной геометрии, определить неевклидовы плоскости как сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками — при этом все выкладки автора получили бы ясный геометрический смысл. Далее автор мог бы получить и интерпретацию Кели — Клейна и интерпретацию Пуанкаре, проектируя сферу из ее центра на касательную плоскость в одном из полюсов или из одного из полюсов на экваториальную плоскость.

Б. А. Розенфельд

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2393. Дискриминант кривой 3-го порядка как определитель кубической матрицы. Ваккаро (Il discriminante di una curva del terzo ordine come determinante di una matrice cubica. Vaccaro Michelangelo), Rend. mat. ed appl., 1954, **13**, № 1—2, 133—156 (итал.)

Ставится целью определение детерминанта, элементы которого имеют более двух индексов, заменить более естественным и тесно связанным с теорией алгебраических форм. Общий определитель K — кубической матрицы предполагается определить так, чтобы он сводился к дискриминанту формы k-й степени с n переменными, и первое затруднение состоит в том, что коэффициенты алгебраической формы симметричны относительно своих индексов; автор надеется преодолеть его переходом с помощью подходящей индукции от матрицы симметричной к матрице общей. Другое затруднение представляется в том, что уже для плоской кубической кривой дискриминант имеет бо́льшее число членов. Автор ограничивается попыткой построения определения кубического детерминанта при допустимых значениях индексов 1, 2, 3 (т. е. третьего рода) и большую часть статьи заполняет развертыванием (не окончательным) дискриминанта плоской кубической кривой. Исследование не закончено, так как для определения ряда коэффициентов полинома D требуется еще более подробное развертывание дискриминанта. С. С. Бюшгенс

2394. Об аполярных кривых. Ваккаро (Sulle curve apolari. Vaccaro Giuseppe), Giorn. mat. Battaglini, 1954, 82, № 2, 349—358 (итал.)

Плоская алгебраическая кривая C^n n-го порядка

$$\sum a_{i_1 i_2, \ldots, i_n} x_{i_1} x_{i^2}, \ldots, x_{i_n} = 0,\ i_1, i_2, \ldots, i_n = 1,2,3.$$

и кривая Γ^n n-го класса

$$\sum \alpha_{i_1 i_2, \ldots, i_n} \xi_{i_1} \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n} = 0$$

называются аполярными, если

$$\sum a_{i_1 i_2, \ldots, i_n} \alpha_{i_1 i_2, \ldots, i_n} = 0.$$

В работе выясняется геометрический смысл условия аполярности для некоторых частных случаев кривой C^n. Так, например, C^n аполярна Γ^n, 1) если она распадается на касательную к Γ^n, считаемую $n-1$ раз, и прямую, проходящую через точку касания; 2) если Γ^n имеет точку возврата и C^n распадается на касательную к Γ^n в точке возврата, считаемую $n-2$ раза, и пару прямых, проходящих через эту точку; 3) если C^n распадается на считаемую $n-2$ раза касательную t к Γ^n в некоторой ее точке O, и на коническое сечение, пересекающее t в точках O и P, где P — точка касания t с полярой Γ^n относительно прямой r, касательной в O к коническому сечению. Я. П. Бланк

2395. О многообразии плоских алгебраических кривых, распределенных в некотором наперед заданном смысле. Маммана (Sulla varietà delle curve algebriche piane spezzate in un dato modo. Mammana Carmelo), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1954, **8**, № 1—2, 53—75 (итал.)

Плоские алгебраические кривые C^n порядка n изображаются точками пространства S_N измерения $N = n(n+3)/2$ так, что каждой данной кривой $f \equiv \equiv \sum a_{i_0 i_1 i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = 0$ $(i_0 + i_1 + i_2 = n)$ ставится в соответствие точка в S_N с однородными координатами $a_{i_0 i_1 i_2}$ — коэффициентами формы f, распределенными в заранее данном порядке. Известно, что в этом взаимно однозначном отображении кривые C^n с одной двойной точкой, не указанного заранее типа, имеют в S_N своими образами точки неприводимой, рациональной гиперповерхности V^{δ}_{N-1} порядка $\delta = 3(n-1)^2$. Кривые C^n, имеющие какие-либо частные особенности, изображаются в S_N точками некоторого вполне определенного многообразия, погруженного в гиперповерхность V^{δ}_{N-1}.

Автор изучает многообразие V_d, точки которого изображают в S_N совокупность плоских кривых C^n, имеющих уравнение вида $f \equiv f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \dots f_t^{\nu_t} = 0$, где $f_1, f_2, \dots, f_t$ являются формами порядков $n_1, n_2, \dots, n_t$, а $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_t$ — данными целыми положительными числами, $\sum_{i=1}^{t} n_i \nu_i = n$; очевидно, V_d погружено в гиперповерхность V_{N-1}^{δ}.

Пространство S_d, касательное к многообразию V_d в некоторой его точке, которая служит образом кривой $\overline{C}^n$, $\overline{f} \equiv \overline{f}_1^{\nu_1} \overline{f}_2^{\nu_2} \dots \overline{f}_t^{\nu_t} = 0$, является образом кривых линейной системы $\overline{f}_1^{\nu_1 - 1} \overline{f}_2^{\nu_2 - 1} \dots \overline{f}_t^{\nu_t - 1} g = 0$, где $g = 0$ есть уравнение линейной системы плоских кривых порядка $\sum_{i=1}^{t} n_i$, проходящих через общие точки $(\overline{f}_i, \overline{f}_j)$ всех $\binom{t}{2}$ пар кривых $\overline{f}_i = 0$, $\overline{f}_j = 0$. Необходимым и достаточным признаком того, что указанное пространство S_d касается V_d вдоль точек некоторого многообразия V_α измерения $\alpha \geqslant 1$, служит то, что для некоторого подходящего значения i выполняются условия $2n_i \geqslant \sum_{j=1}^{t} n_j$, $\nu_i = 1$. При наличии этих двух условий для индекса i, V_α оказывается некоторым линейным пространством S_α измерения, равного числу $\alpha = (2n_i - \sum_{j=1}^{t} n_j + 2)$, а в случае, когда одновременно $t = 2$, $n_1 = n_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$, число измерений равно $\alpha = 2$.

Далее изучаются многообразия $V_{d'}$ — геометрические места подпространств S_d, касательных к V_d. Многообразие $V_{d'}$ имеет число измерений $d' = 2d - \alpha - \beta$, где β означает размерность совокупности пространств S_d, касательных к V_d и проходящих через текущую точку многообразия $V_{d'}$. Если все целые числа ν_i больше единицы, за исключением самое большее одного, то $\beta = 0$; если же по крайней мере два из чисел ν_i равны единице, то может оказаться, что $\beta > 0$ как при $\alpha = 0$, так и при $\alpha > 0$. Многообразие W, точки которого в S_N являются образами плоских кривых C^n порядка n, распределенных всеми возможными способами, распадается на $m = [n/2]$ (наибольшее целое положительное число $\leqslant n/2$) различных неприводимых и рациональных частей $V_{d_1}, V_{d_2}, \dots, V_{d_m}$, где V_{d_i} — многообразие, точками которого являются образы плоских кривых C^n, содержащих как часть кривую порядка i ($i = 1, 2, \dots, m$). Эти m многообразий имеют убывающие измерения ($d_i > d_{i+1}$) и все проходят через поверхность Веронезе $V_2^{n^2}$, точками которой в S_N являются образы кривых C^n, выродившихся в n-кратную прямую.

Сегре (Segre B., Rend. Accad. Lincei, 1946, 313, 559) было показано для последовательности многообразий

$$V_2^{n^2} \equiv V_{d_{1n}}, V_{d_{1n-1}}, \dots, V_{d_{13}}, V_{d_{12}}, V_{d_{11}} \equiv V_{d_1},$$

где $V_{d_{1j}}$ есть многообразие, точками которого являются в S_N образы кривых C^n, содержащих как часть j-кратную прямую ($j = 1, 2, \dots, n$), что никакое из этих многообразий не будет геометрическим местом пространств S_d, касательных к предыдущему. Аналогичное свойство имеет место для V_{d_2}, т. е. для многообразия, точками которого являются образы кривых C^n, содержащих как часть коническое сечение, как при $n = 2\bar{n}$, так и при $n = 2\bar{n} + 1$, а именно многообразия

$$V_{d_{2n}}, V_{d_{2n-1}}, \dots, V_{d_{23}}, V_{d_{22}}, V_{d_{21}} \equiv V_{d_2}$$

таковы, что каждое из них, начиная со второго, есть геометрическое место пространств S_d, касательных к предыдущему. При n четном это свойство имеет место также и для V_{d_m}, а именно многообразия $V_{d_{m2}}, V_{d_{m1}} \equiv V_{d_m}$ таковы, что второе является геометрическим местом пространств S_d, касательных к первому. Наконец, то же свойство не имеет места для многообразий $V_{d_3}, V_{d_4}, \dots, V_{d_{m-1}}$, а при n нечетном и для многообразия V_{d_m}.

Рассматривая общее многообразие V_d, определенное выше, автор показывает, что оно рационально и принадлежит к S_N. Порядок многообразия V_d равен $K = \eta \nu_1^{m_1} \nu_2^{m_2}, \dots, \nu_t^{m_t}$, $m_i = \frac{1}{2} n (\nu_i + 3)$, где η есть индекс непрерывной системы кривых C^n, определенной многообразием V_d, т. е. число кривых C^n типа $f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \dots f_t^{\nu_t} = 0$, проходящих через d точек общего положения плоскости.

Наконец, учитывая влияние плоской кривой C^n рассматриваемого типа на подсчет инварианта Цейтена — Сегре, автор доказывает, что многообразие V_d имеет кратность

$$s - (2n - \sum_{i=1}^{t} n_i - 3)(n - \sum_{i=1}^{t} n_i) + \sum n_i n_j$$

относительно отмеченной в начале реферата гиперповерхности V_{N-1}. Библ. 22 назв. С. Д. Россинский

2396. О рациональных линейных рядах на кривой данного жанра с общими модулями. **Франчетта** (Sulle serie lineari razionalmente determinate sulla curva a moduli generali di dato genere. Francchetta A.), Matematiche, 1954, 9, № 2, 126—147 (итал.)

Рассматриваются неприводимые алгебраические системы алгебраических кривых в пространстве произвольной размерности. Основными результатами являются две теоремы: 1) полный рациональный линейный ряд на производящей канонической кривой жанра $p > 2$ является кратностью канонического ряда кривой и 2) полный рациональный линейный ряд на производящей кривой неспециального семейства жанра $p > 1$ является линейной комбинацией ряда гиперплоскостных сечений и канонического ряда. Вторая теорема обобщает соответствующий результат Энриквеса для эллиптических кривых и, в известной мере, обращает известный результат М. Нетера о возможности рационального построения канонического ряда кривой жанра $p > 1$ и его кратностей. Первая теорема связана с результатом Энриквеса — Кизини (Enriques — Chisini, Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, Bologna, 1921, 3, 354), некоторые рассуждения которых автор подвергает критике.

Автор различает рациональные и определенные (determinate) линейные ряды на кривой и устанавливает некоторые свойства тех и других. В. В. Морозов

2397. Особые точки поверхностей третьего порядка конечной геометрии. **Маршо** (Points singuliers des surfaces du troisième ordre de la géométrie finie. Marchaud André), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 240—241 (франц.)

Автор продолжает исследование особых точек

(J. math., 1952, **31**, № 4). По определению поверхность S_3 есть замкнутое множество проективного пространства, каждое плоское сечение которого есть кривая не выше третьего порядка и по крайней мере одна из них — невырожденная. Точка O поверхности называется особой, если она изолирована или если ее окрестность на S_3 содержится в пучке касательных в точке O. Особая точка — первого или второго рода в зависимости от того, обладает ее окрестность неособыми точками или нет.

Рассматривается поверхность S с четырьмя особыми точками O: первого рода в общем положении. Эти четыре точки — единственные особые точки поверхности; ребра определяемого ими тетраэдра принадлежат ей. Кроме них она содержит еще только 3 прямых: диагонали четырехсторонника, высекаемого гранями этого тетраэдра на плоскости П, которая определяет поверхность третьего порядка Σ с теми же особыми точками и прямыми, что и S. С. П. Фиников

2398. Регулярность осей первой группы кручения алгебраических поверхностей. Н о л л е (La régularité des axes du premier groupe de torsion des surfaces algébriques. N o l l e t L o u i s), Bull. Soc. roy. Liège, 1954, Suppl., № 3—4, 115—124 (франц.)

Пусть F — неприводимая алгебраическая поверхность над полем комплексных чисел, p_a и p_g — ее арифметический и геометрический жанры, $q = p_g - p_a$ — иррегулярность и t — дивизор Севери, причем $t > 1$, т. е. первая группа кручения F (порядка t) существует. Пусть K — каноническая F-кривая и D — алгебраический дивизор F-нуля. Если D алгебраически не эквивалентен нулю, то система $|K + D|$ называется псевдоканонической. Классическая задача определения размерности $|K + D|$ (Enriques, Le superficie algebriche, Bologna, 1949, 354—357) решается для псевдоканонических систем следующим предложением. Если $p_a \geqslant 0$, то на F существует $t - 1$ различных регулярных линейных псевдоканонических систем размерности p_a. Если F регулярна, то все ее псевдоканонические системы регулярны и имеют размерность p_a; если F иррегулярна, то системы эти почти всюду регулярны и имеют размерность p_a.

Основой вывода служит лемма (доказываемая сначала для конечного семейства коммутативных циклических гомографий); пусть G — конечная абелева группа гомографических преобразований проективного пространства S; $H_1, \ldots, H_m$ — ее каноническая система производящих, порядок $H_i = t_i$, t_i — делитель t_{i+1} и порядок $G = t = \Pi t_i$. Неподвижные для всех преобразований G точки S распадаются на конечное число попарно не пересекающихся линейных пространств, которые автор называет осями группы. Тогда, если число осей превосходит $t(1 - 1/t_m)$, то они определяют S (что следует понимать в смысле: определяют размерность S). Результаты, цитированные выше, получаются с помощью этой леммы через построение на F конечного числа регулярных псевдоканонических систем, называемых автором осями первой группы кручения F, так как они соответствуют осям изоморфной ей группы гомографий проективного пространства размерности $t(p_a + 1) + q - 2$. В. В Морозов

2399. Некоторые поверхности, содержащие иррациональные пучки максимального рода. Н а й т (Some surfaces containing irrational pencils of maximum genera. K n i g h t A. J.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, part 1, № 113, 38—43 (англ.)

Семейство алгебраических кривых, лежащих на некоторой алгебраической поверхности, называется пучком, если уравнения этих кривых зависят от одного параметра, пробегающего некоторую алгебраическую кривую. Род этой кривой называется родом пучка. Известно, что род пучка не превосходит иррегулярности (одномерного числа Бетти) той поверхности, на которой расположен пучок. До сих пор были известны весьма частные примеры поверхностей, содержащих пучок максимального, т. е. совпадающего с иррегулярностью рода (например, поверхности вращения, когда все кривые пучка имеют род 0). Автор строит более общие примеры поверхностей, содержащих пучок максимального рода. Поверхности имеют иррегулярность вида $(n-1)(n-2)/2$, где n может быть любым целым числом, начиная с 3. Кривые пучка имеют сколь угодно большой род. И. Р. Шафаревич

2400. Некоторые кремоновы преобразования, связанные с прямолинейными конгруэнциями первого порядка. Г о т ь е (Sur certaines transformations Crémonniennes associées aux congruences de droites d'ordre un. G a u t h i e r L u c), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 218—219 (франц.)

В проективном пространстве S_r возьмем прямолинейную конгруэнцию C первого порядка и пусть F будет ее собственно фокальное многообразие, которое автор для упрощения считает порядка $r - 2$.

1. Присоединим к C два пучка $|V^{(r-1)n+1}|$ и $|\overline{V}^{(r-1)m+1}|$, содержащие F соответственно с кратностями n и m, и установим проективное соответствие h этих пучков; точки P и P' будут соответственными точками кремонова преобразования T, когда прямая PP' принадлежит C и V, проходящее через P, в проективитете h соответствует $\overline{V}$, проходящему через P'. Фундаментальными многообразиями T будут, кроме базы пучков, особые и специальные фокальные многообразия C.

2. Присоединим к C пучок $|V^{(r-1)n+2}|$, содержащий F с кратностью n, тогда гиперповерхности пучка высекают на лучах C пары некоторой инволюции I. Эти инволюции как частный случай содержит T, если пучки $|V|$ и $|\overline{V}|$ совпадают и h инволютивно. Произведение двух любых инволюций I относительно одного и того же фокального многообразия F дает T.

3. Инволюции I рациональные и определяют (1,2)-значное преобразование, связывающее их пары с точками S_r. С. С. Бюшгенс

2401. О некоторых плоских конфигурациях (12_4, 16_3), содержащих хотя бы одну точку типа D. Метелка (O jistých rovinných, konfiguracích (12_4, 16_3), které obsahují aspoň jeden bod typu. D. M e t e l k a V á c l a v), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 2, 146—151 (чеш.; резюме русск., нем.)

Сохраняем обозначения предыдущего реферата. Утверждается существование геометрически реализуемой конфигурации (12_4, 16_3), которая содержит две пары точек типа D; автор ее подробно описывает. Кроме того, строятся два новых примера конфигураций (12_4, 16_3) с точкой типа D, которые можно геометрически реализовать так, что однородные проективные координаты всех двенадцати точек будут целочисленными. K. Havliček

2402. Об одном типе групп инволюционных преобразований Кремоны на плоскости. В а н я т о в а (O jednom druhu grup involutorních Cremonových transformací v rovině. V a ň a t o v á L a d a), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 2, 152—171 (чеш.; резюме русс., нем.)

Симметрическая инволюция пятой степени на плоскости имеет шесть главных точек, не лежащих на коническом сечении. Они могут быть двух родов. Если главная точка A лежит на коническом сечении которое в инволюции ей соответствует, то это коническое се-

чение содержит все главные точки, кроме одной A'. Тогда точки A, A' образуют пару главных точек первого рода. Главная точка второго рода не лежит на коническом сечении, которое ей соответствует. Шесть точек в плоскости служат главными точками инволюции первого рода, если они попарно принадлежат трем прямым одного пучка (первое характеристическое положение). Инволюции второго рода имеют четыре главных точки второго рода и две первого рода. Шесть точек плоскости образуют совокупность главных точек инволюции второго рода, если обе точки первого рода полярно сопряжены относительно пучка конических сечений, проходящих через четыре точки второго рода (второе характеристическое положение). Автор ищет шестерку точек, которые имели одновременно и первое и второе характеристическое положение. Если это имеет место, то в каждом из этих положений они находятся двумя разными способами (в специальном случае ровно шестью разными способами). Иных возможностей нет. В первом случае инволюция пятой степени порождает конечную группу преобразований $\mathfrak{G}_8$ восьмого порядка, которая наряду с единицей содержит четыре инволюции пятой степени, одну центральную коллинеацию (гомологию) и две циклические коллинеации с периодом четыре. Во втором случае возникает подобная группа $\mathfrak{G}_{72}$, образуемая тридцатью шестью преобразованиями пятой степени и тридцатью шестью коллинеациями.

K. Havlíček

2403. Связь главных элементов симметрической инволюции 5-й степени с прямыми кубической поверхности. Кубалкова (Souvislost hlavních elementů rovinné symetrické involuce 5 stupně s přímkami kubické plochy. Kubálková Svatava), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 2, 172—190 (чеш.; резюме русс., нем.)

Автор продолжает работу Л. Ванятовой (реф. 2402). С помощью бирационального отображения кубической поверхности без особых точек на плоскость расширяются группы $\mathfrak{G}_8$, соответственно $\mathfrak{G}_{72}$, построенные Л. Ванятовой, до групп преобразований $\mathfrak{G}_{24}$ и $\mathfrak{G}_{120}$, соответственно $\mathfrak{G}_{648}$. Каждая из этих групп сохраняет трехмерное семейство плоских кривых 3-го порядка, проходящих через шесть главных точек симметрической инволюции пятой степени. Группа $\mathfrak{G}_{24}$ содержит 4 инволюции 5-й степени, одну центральную коллинеацию, 2 циклические коллинеации, 16 кубических преобразований и тождественное преобразование. Группа $\mathfrak{G}_{120}$ содержит 3 коллинеации. 32 квадратических преобразования, 48 преобразований 3-й степени, 32 преобразования 4-й степени, 4 симметрических инволюции 5-й степени и тождественное преобразование. Обе группы $\mathfrak{G}_{24}$ и $\mathfrak{G}_{120}$ содержат группу $\mathfrak{G}_8$. Группа $\mathfrak{G}_{648}$ содержит 36 коллинеаций, 72 квадратических преобразования, 432 преобразования 3-й степени, 72 преобразования 4-й степени и 36 преобразований 5-й степени. Подгруппой ее является группа $\mathfrak{G}_{72}$, Кроме того, статья содержит новые коллинеации, сохраняющие кубическую поверхность без особых точек. Группа $\mathfrak{G}_{24}$ изоморфна группе 24 коллинеаций, сохраняющих кубическую поверхность с шестью планарными точками, в которых касательная плоскость пересекает поверхность по трем прямым. Группа $\mathfrak{G}_{120}$ изоморфна с группой 120 коллинеаций, сохраняющих кубическую поверхность с 10 планарными точками (поверхность Клебша). Наконец, группа $\mathfrak{G}_{648}$ изоморфна с группой 648 коллинеаций, сохраняющих кубическую поверхность с 18 планарными точками (эквиангармоническую кубическую поверхность). K Havlíček

2404. Изучение циклической инволюции пятого порядка. Хатчерсон, Чилдресс (Étude d'une involution cyclique de période cinq. Hutcherson W. R., Childress N. A.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 2, 103—108 (франц.)

Строится пример поверхности F 25-го порядка, инвариантной относительно циклической гомографии пятого порядка, действующей в 5-мерном проективном пространстве. Эта поверхность бирационально эквивалентна плоскости. Параметрические уравнения F имеют вид:

$$\frac{X_1}{x_1^5}=\frac{X_2}{x_1^2x_2x_3^2}=\frac{X_3}{x_1x_2^3x_3}=\frac{X_4}{x_2^5}=\frac{X_5}{x_3^5}=$$

$$=\frac{X_6}{u_1x_1^3x_2^2+u_2x_1^2x_2^2x_3+u_3x_1x_2^4+u_4x_2x_3^4}$$

(в тексте работы опечатки). Гомография

$X_1':X_2':X_3':X_4':X_5':X_6'=X_1:X_2:X_3:X_4:X_5:\varepsilon X_6\,(\varepsilon^5=1)$

переводит поверхность F в себя, а на плоскости $x_1:x_2:x_3$ индуцирует гомографию: $x_1':x_2':x_3'=x_1:\varepsilon^4x_2:\varepsilon^3x_3$.

И. З. Розенкноп

2405. Трехмерники, допускающие бесконечную группу бирациональных преобразований в себя. Холл (Threefolds possesing an infinite group of birational self-transformations. Hall R.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 4, 419—428 (англ.)

Исследуются трехмерники, допускающие А) непрерывную группу преобразований; Б) непрерывное семейство преобразований и В) бесконечную разрывную группу преобразований. Исследование ведется по характеру траектории общей точки трехмерника под действием рассматриваемых преобразований. Для получаемых типов трехмерников рассматриваются вопросы их существования.

Вполне законченные результаты получаются для класса А. Здесь группу можно считать алгебраической. Если эта группа однопараметрическая, то трехмерник в соответствии с тем, будут ли траектории эллиптическими или рациональными кривыми, будет эллиптическим или квазилинейчатым, т. е. бирационально эквивалентным линейчатому. Если группа двупараметрическая и траектории — рациональные кривые (или эллиптические поверхности), гиперэллиптические или рациональные поверхности, то трехмерник будет соответственно квазилинейчатым, гиперэллиптическим или планарным, т. е. бирационально эквивалентным пластинчатому (геометрическому месту плоскостей). Наконец, если группа трехпараметрическая и действует транзитивно, то отмечается еще тип, соответствующий коммутативной группе — это трехмерники, изученные Севери и являющиеся либо абелевыми, либо произведениями абелева и линейного многообразий.

Аналогичное исследование приводится для классов Б и В, где образы общей точки лежат либо на кривой, либо на поверхности, либо не содержатся ни в каком алгебраическом подмногообразии. Однако здесь остаются неясными вопросы существования трехмерников класса Б, для которых образы общей точки образуют рациональную или гиперэллиптическую поверхность, и трехмерников класса В, где эти образы лежат на соответствующей поверхности. Для них указывается лишь возможный способ построения (См. также РЖМат, 1954, 3061). В. В. Морозов

2406. О бирациональной тождественности кратных гиперповерхностей, разветвляющихся по одному и тому же многообразию. Маркионна (Sull' identità birazionale delle ipersuperficie multiple diramate da una medesima varietà. Marchionna Ermanno), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **37**, 265—290 (итал.)

В более ранней работе (Rend. Ist. Lombardo, 1952, 85, 473—483) автор установил теорему существования m-значной ($m > 4$) алгебраической функции от r комплексных переменных, связанных алгебраической зависимостью, т. е. функции u, определенной системой алгебраических уравнений $A(x_1, \ldots, x_r, u) = 0$, $F(x_1, \ldots, x_r) = 0$ ($r \geqslant 3$), где A — степени m относительно u и гиперповерхности A и F общие. В реферируемой работе устанавливается, что многообразие (м.) разветвления D функции u на F определяет ее единственным образом, именно, что две алгебраические функции от точки м. F, разветвляющиеся по м. D, которое является м. разветвления для общей кратной гиперповерхности порядка $m > 4$, бирационально тождественны. Ограничение $m > 4$ существенно, так как известно, что кривая разветвления четырехкратной плоскости является одновременно кривой разветвления некоторой трехкратной плоскости.

В. В. Морозов

2407. Геометрические приложения теории валюаций. Зариский (Applicazioni geometriche della teoria delle valutazioni. Zariski Oscar), Rend. mat. e appl., 1954, 13, № 1—2, 51—88 (итал.)

Работа в большей своей части обзорного характера. Указывается, как понятие бесконечно близких точек приводит к понятию места; дается определение места, валюации и центров места и валюации. Эти понятия здесь поясняются, так как они представляются референту не получившими широкой известности.

Рассматриваются расширения K и Δ поля k; алгебраическое образование, полученное из Δ присоединением символа ∞, удовлетворяющего обычным правилам действий с ним, обозначается (Δ, ∞). Местом p в K/k называется гомоморфизм над k поля K в (Δ, ∞), обладающий тем свойством, что хотя для одного $x \in K$ $xp \neq 0$. Δ называется полем вычетов K по месту p. Каждое кольцо $R \subset K$, такое, что из двух элементов Kx и x^{-1} один не принадлежит R, определяет место в K/k. Валюация поля — это способ его упорядоченного нормирования; точнее — гомоморфизм мультипликативной группы K в упорядоченную аддитивную группу Γ, удовлетворяющий требованиям: 1) $v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$, 2) существует такое x, что $v(x) \neq 0$, и 3) если $x \in K$, то $v(x) = 0$. Кольцо тех элементов K, для которых $v(x) \neq 0$, называется кольцом валюаций v в K. Каждое место в K/k определяет валюацию этого поля, и обратно. Если Γ изоморфна прямому произведению s аддитивных групп целых чисел, то валюация называется дискретной. Обозначим через r и ρ степени трансцендентности K и Δ над k; тогда $0 \leqslant \rho \leqslant r-1$. ρ называется размерностью места p. Места, для которых $\rho = r-1$, называются простыми дивизорами K/k. Если V — проективная модель поля K/k и $P = (x)$ — ее производящая точка, то $xp \in V$. xp называется центром p на V и обозначается pV (или pV/k); аналогично для валюации v определяется многообразие $W \subset V$, называемое центром валюации v на V.

Рассматриваются различные приложения этой теории: к теории бирациональных преобразований (точки Q и Q' двух проективных моделей V и V' поля K/k бирационально соответствуют друг другу, если существует место p в K/k, центрами которого на V и V' являются соответственно Q и Q'), теории алгебраических соответствий, нормальных многообразий и их связи с простыми дивизорами, связи валюаций с бесконечно близкими точками, теории поверхностей Римана поля алгебраических функций и локальной униформизации.

В. В. Морозов

2408. Редукция алгебраических многообразий относительно дискретной валюации основного поля. Симура (Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field. Shimura Goro), Amer. J. Math., 1955, 77, № 1, 134—176 (англ.)

Пусть K — поле с дискретной валюацией ω, O — его кольцо валюаций, P — идеал валюации и k — соответствующее P поле вычетов (реф. 2407). В общих чертах понятие редукции алгебраического многообразия (м.) V над полем K по модулю P можно описать, как приведение (mod P) уравнений, определяющих V; полученные этим приведением уравнения определяют м. $\overline{V}$ над полем k, которое называется м., полученным из $\overline{V}$ редукцией (mod P).

Автор развивает общую теорию редукции, рассматривая процесс редукции как процесс специализации над O и изучает поведение свойств V при редукции. Так как кольца дискретных валюаций являются локальными областями (локальной областью называется коммутативное нётерово кольцо без делителей нуля и с единицей, в котором совокупность элементов, не являющихся единицами, образует идеал; изучение локальных областей и специализаций в них начато Норткоттом (Northcott, Proc. London Math. Soc., 1951, 1, 129—137)), то предварительно, следуя общей схеме Вейля (Weil A. Foundations of algebraic geometry, New York, 1946), строится теория специализации над локальными областями. Затем, в терминах теории специализацией над O, дается определение редукции м. и цикла на м. для аффинного пространства. Определение это оказывается инвариантным относительно расширений поля K в том смысле, что если X — рациональный цикл на V и $\rho(X)$ — цикл на $\overline{V}$, полученный из X редукцией относительно O, K' — расширение K, O' — соответствующее продолжение O и $\rho'(X)$ — цикл, полученный из X редукцией относительно O', то $\rho(X)$ и $\rho'(X)$ совпадают. В случае абсолютной неприводимости V и $\overline{V}$ отображение ρ осуществляет отображение группы рациональных V-циклов над K данной размерности в группу рациональных $\overline{V}$-циклов над K той же размерности, сохраняющее операции над циклами (как пересечение, прямое произведение и т. д.).

В последующем теория переносится на абстрактные м. в смысле Вейля, причем развивается общая теория специализации циклов в них. Затруднительно дать общий обзор полученных результатов ввиду их многообразия. В заключение рассматривается случай поля K, допускающего бесконечное множество $\{\omega_i\}$ валюаций ω_i, подчиненных тому условию, что каждый отличный от нуля элемент K является P_i-единицей для почти всех i (в смысле: за исключением конечного числа). Тогда абсолютно неприводимое м. остается абсолютно неприводимым при редукции относительно почти всех этих валюаций.

В. В. Морозов

2409. Замечания о точках Чжоу алгебраических многообразий. Накаи (Notes on Chow points of algebraic varieties. Nakai Yoshikazu), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, **A28**, № 2, 125—127 (англ.)

Пусть V — алгебраическое многообразие, лежащее в некотором проективном пространстве, и $c(V)$ — соответствующая ему точка Чжоу. Показывается, что:

1) если k' — простое поле характеристики p, k — поле определения для V и M_i — последовательность независимых производящих точек V над k, то для достаточно большого m $c(V) \subset k'(M_1, \ldots, M_m)$;

2) если $V = V^n$, A_i, B_j — простые подмногообразия V размерности $n-1$, $X = \sum a_i A_i - \sum b_j B_j$ — дивизор, то

$\dim_k(c(X))$ равняется максимальному числу независимых производящих точек V над k, лежащих на X.
В. В. Морозов

2410. Арифметические жанры нормальных многообразий в алгебраическом семействе. Игуса (Arithmetic genera of normal varieties in an algebraic family. Igusa Jun-ichi), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 1, 34—37 (англ.)

Показывается, что известное свойство линейной эквивалентности дивизоров на данном многообразии сохраняться при специализации дивизоров, остается в силе и при специализациях объемлющего многообразия. Точнее: если V^r — многообразие, V'^r — его специализация над полем k, причем V'^r не имеет кратных подмногообразий размерности $r-1$, D — дивизор, линейно эквивалентный нулю на V, и D' — специализация D над $V^r \to V'^r$, то D' линейно эквивалентен нулю на V'. Отсюда вытекает основной результат работы: если V'^r — специализация V^r и V'^r нормально, то нормально и V^r, причем гильбертовы характеристические функции для V^r и V'^r совпадают, а следовательно, совпадают и их арифметические жанры. Следствие: если в проективном пространстве задано максимальное алгебраическое семейство положительных r-циклов и если два цикла этого семейства нормальны, то их арифметические жанры совпадают.
В. В. Морозов

2411. Одновременное обобщение многообразий Веронезе и Грассмана и неприводимые представления проективных групп. Бурау (Eine gemeinsame Verallgemeinerung aller Veroneseschen und Grassmannschen Mannigfaltigkeiten und die irreduziblen Darstellungen der projektiven Gruppen. Burau Werner), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, **3**, № 2, 244—269 (нем.)

Изучается многообразие $J^{\rho_1, \ldots, \rho_s}_{n;\, n_1, \ldots, n_s}$, координаты точек которого имеют вид $p_{j_1 j_2, \ldots, j_s} = p^{\rho_1}_{j_1} p^{\rho_2}_{j_2}, \ldots p^{\rho_s}_{j_s}$, где p_{jl} — грассмановы координаты n_i-мерной плоскости X_{n_i} n-мерного проективного пространства X_n, причем плоскости $X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_s}$ связаны условиями включения $X_{n_1} \supset X_{n_2} \supset \ldots \supset X_{n_s}$. При $s=1$, $\rho=1$ это многообразие является многообразием Грассмана, изображающим многообразие n_1-мерных плоскостей пространства X_n, а при $n_1 = n_2 = \ldots = n_s = 0$ это многообразие является многообразием Веронезе. Рассматриваются представления групп проективных преобразований пространства X_n в пространстве, в котором расположено изучаемое многообразие.
Б. А. Розенфельд

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

2412. Плоские кривые с монотонной кривизной. Кнезер (Monoton gekrümmte ebene Kurven. Kneser Hellmuth), Arch. Math., 1954, **5**, № 1—3, 77—80 (нем.)

Доказываются основные теоремы об эволютах в предположении двукратной дифференцируемости эвольвенты. Пусть C — плоская кривая с заданным направлением и пусть кривизна ее положительна и монотонна. Если к данной точке кривой C слева (справа) не примыкает участок постоянной кривизны, то эволюта в соответствующей точке имеет левую (правую) касательную, которая совпадает с нормалью кривой C; разность радиусов кривизны кривой C в концах какой-нибудь ее дуги равна длине соответствующей дуги эволюты. Если радиус кривизны кривой C на какой-нибудь дуге не является монотонным, но имеет ограниченную вариацию, то длина соответствующей дуги эволюты равна его полной вариации.
Н. В. Ефимов

2413. О семействе кривых, зависящих от одного параметра. Булиган (Sur une famille de courbes à un paramètre. Bouligand Georges), Rev math. spéc., 1955, **65**, № 10, 533—534 (франц.)

Составляется дифференциальное уравнение семейства плоских кривых, таких, что расстояние каждой точки кривой до фиксированной точки плоскости равно расстоянию от начала координат касательной к кривой в соответствующей точке. Исследование составленного уравнения позволяет сделать заключение о форме и расположении кривых семейства. Представив уравнение кривых семейства в параметрической форме, автор получает возможность изучить поведение интегральных кривых.
М. П. Черняев

2414. Исследование одной кривой со счетным множеством замкнутых ветвей. Нечай (Дослідження однієї кривої із зчисленною множиною замкнених галузок. Нечай О. С.), Зб. студ. наук.- досл. праць Київськ. сільськогоспод. ин-та, 1954, № 1, 99—109 (укр.)

При различных значениях параметра a исследуется кривая

$$(e^{\cos x}\cos y - a)^2 + (e^{\cos x}\sin y - a)^2 = a^2.$$

2415. О нормальной прямолинейной конгруэнции вдоль линий кривизны. Сакелларион (On the normal rectilinear congruence along lines of curvature. Sakellarioy Nilos), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 249—250 (англ.)

Задается поверхность S класса C^4 без омбилических точек. Относя ее к линиям кривизны, автор устанавливает следующие формулы:

$$\frac{\partial R_1}{\partial u_2} = (R_2 - R_1)\,a, \quad \frac{\partial R_2}{\partial u_1} = (R_1 - R_2)\,b,$$

где u_1, u_2 — параметры линий кривизны, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны, $a = \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial u_2}$, $b = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_1}$, $e = \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1}\right)^2$, $g = \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2}\right)^2$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S.

Если $\frac{\partial R_1}{\partial u_2} = \frac{\partial R_2}{\partial u_1} = 0$, то линии $u_i = \text{const}$ являются линиями кривизны на эволютных поверхностях поверхности S. В этом случае имеют место равенства $L = \psi_1(u_1)\,E$, $N = \psi_2(u_2)\,G$.

В общем случае для эволютных поверхностей имеют

$$F^{(i)} = \frac{\partial R_i}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial R_i}{\partial u_2},\ M^{(i)} = 0,$$

$$\overline{\mathbf{n}}^{(1)} = -\frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial u_1} : \sqrt{E},\ \overline{\mathbf{n}}^{(2)} = -\frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial u_2} : \sqrt{G}$$

($\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}(u_1, u_2)$ — уравнение поверхности S).
Н. И. Кованцов

2416. Поверхности изгибания эллипсоида вращения, имеющие конические точки. Гебель (Biegungsflächen der Rotationsellipsoide mit konischen Punkten. Goebel Wolfgang), Math. Nachr., 1954, **11**, № 1—2, 5—34 (нем.)

Р. Штейервальд в неопубликованном докладе (Зальцбург, 1952) привел все поверхности постоянной положительной кривизны, у которых линии кривизны одного семейства — плоские (поверхности Эннепера). Среди них есть поверхности, содержащие часть, изометричную сфере, разрезанной вдоль дуги большого круга, и имеющие только две особенности — конице-

ские точки. В реферируемой работе приведены их параметрические уравнения и исследуется их форма. Отсюда, применяя преобразование Бэклунда — Бианки, автор получает поверхности, изометричные куску вытянутого эллипсоида вращения. В двух случаях рассматриваемые поверхности содержат части, изометричные всему эллипсоиду и получаются следующим образом. Эллипсоид вращения разрезается вдоль дуги экватора и края разреза закручиваются вовнутрь. Далее эти края выводятся наружу и соединяются между собой. Так возникает непрерывная совокупность поверхностей, среди которых бесконечно много замкнутых и имеющих только две особенности — конические точки. Параметрические уравнения выражаются в эллиптических функциях. Промежуточные вычисления опущены. Ю. Г. Решетняк

2417. Параметрические поверхности. III. 1. Поверхности минимальной площади. Безикович (Parametric surfaces. III, 1. Surfaces of minimum area. Besicovitch A. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 2, 169—175 (англ.)

Работа содержит исправление доказательства теоремы о существовании минимальной параметрической поверхности П с данным параметрическим контуром Г (Surface П subtending, Г), полученной автором в предыдущих работах (Proc. Cambridge Philos. Soc., 1948, **44**, 313—414; 1949, **45**, 5—13; 1949, **45**, 14—23; J. London Math. Soc., 1948, **23**, 241—246), связанное с выявившейся ошибочностью одной из лемм, на которые опиралось предыдущее доказательство.

Пусть на круге H определена непрерывная функция $P = \Phi(M)$, где P — точка трехмерного пространства, M — точка круга. Для любого P множество $\Phi^{-1}(P)$ пусто или замкнуто; пусть Q — любая компонента $\Phi^{-1}(P)$, круг Q представляется как сумма всевозможных Q: $H = \Sigma Q$. Точкой параметрической поверхности П называется любая пара (P, Q), где $P = \Phi(Q)$. Параметрический контур образуется теми $X = (P, Q)$, для которых Q примыкает к границе H (кратность точек контура и границы П может различаться). Расстояние между точками $X_1 = (P_1, Q_1)$ и $X_2 = (P_2, Q_2)$ определяется как $\inf_\gamma d\Phi(\gamma)$, где $d\Phi(\gamma)$ диаметр $\Phi(\gamma)$, а γ — любой континуум, содержащий Q_1 и Q_2. Бугром (bump) на поверхности П называется область с плоской границей; наибольшее удаление точек бугра от плоскости p его основания называется высотой. Если на поверхности П нет бугров по отношению к p с высотой $> \varepsilon (> 0)$, то поверхность называется ε-гладкой (просто гладкой) по отношению к p. Операция сглаживания поверхности П по отношению к плоскости p состоит в проектировании всех точек бугров П по отношению к этой плоскости на p; остальные точки поверхности при этом не изменяют своего положения (в этом и сходных определениях фактически под точкой поверхности понимается только ее первая компонента p, принадлежащая E_3). ε — гладкая поверхность (поверхность гладкая по отношению к любой плоскости). После доказательства ряда лемм, автор получает теорему: для данного параметрического контура Г и любых $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ существует η-гладкая поверхность П с контуром Г и площадью в хаусдорфовой Λ^2-мере, меньшей чем $a + \varepsilon$, где a — нижняя грань площадей всевозможных поверхностей, натянутых на Г (subtending Г). Отсюда путем построения минимизирующей последовательности Π_n, и пользуясь ранее установленными автором компактностью такой последовательности и полунепрерывностью площади $\Lambda^2\Pi_n$ снизу, автор получает теорему о существовании параметрической поверхности минимальной Λ^2-площади, натянутой на Г. В. В. Рыжков

2418. О классах поверхностей, все бесконечно малые изгибания которых представляются в квадратурах. Зауэр (Über Flächenklassen, bei denen Sämtliche infinitesimale Verbiegungen durch Quadraturen darstellbar sind. Sauer R.), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 122—129 (нем.)

Хорошо известные поверхности, уравнения которых $z = z(x, y)$ являются решениями дифференциальных уравнений $rt - s^2 = \pm 1$, характеризуются тем, что проекции их асимптотических линий на плоскость XOY образуют действительную или мнимую сеть возврата (так называется плоская сеть, находящаяся во взаимно однозначном соответствии с прямолинейной сетью той же плоскости так, что касательные к линиям одного семейства, исходящие из точек линии L другого семейства, перпендикулярны прямой, соответствующей линии L), а также тем, что все их бесконечно малые изгибания могут быть представлены в квадратурах. Аффинные преобразования этих поверхностей суть несобственные аффинные сферы. Проективные преобразования этих поверхностей характеризуются тем, что асимптотические линии являются базисными (Туганов Н. Г., Докл. АН СССР, 1947, **57**, 327—330). Р. Н. Щербаков

2419. Некоторые приложения дифференциальной геометрии изотропного пространства. Штрубеккер (Alcune applicazioni della geometria differenziale dello spazio isotropo. Strubecker Karl), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 322—331 (итал.)

Приводятся некоторые основные положения дифференциальной геометрии изотропного пространства (эта геометрия разработана в 12 работах автора, список которых дан в конце реферируемого доклада). В этом пространстве линейный элемент представляется формулой $ds^2 = dx^2 + dy^2$, а роль движений играет группа преобразований $x' = a + x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $y' = b + x\sin\varphi + y$, $z' = c + c_1 x + c_2 y + z$; ее подгруппы $x' = a + x$, $y' = b + y$, $z' = c \pm bx \mp ay + z$, называемые правым и левым скольжениями, дают отображение элементов $E(x, y, z, p, q)$ пространства на пары точек E_1 и E_2 плоскости xy так, что любая поверхность Φ устанавливает на плоскости xy взаимно однозначное соответствие $\Phi_1 - \Phi_2$. Поверхности $rt - s^2 = -1$ характеризуются тем, что они несут асимптотические линии с изотропными кручениями, равными ± 1, а их отображения при помощи скольжений на плоскость xy вырождаются в линии. Известные поверхности $z = Rf(x + iy)$ обладают в изотропном пространстве свойствами, аналогичными свойствам минимальных поверхностей обычного пространства. Дается также краткая характеристика отображения $\Phi_1 - \Phi_2$ для поверхностей $rt - s^2 = 1$ Отмечается, что эти классы поверхностей исследуются и в докладе Зауэра (реф. 2418) на этом же съезде классическими методами. При помощи того же отображения для полосы доказывается следующая теорема: Если два плоских овала имеют равные площади, а также параллельные касательные в соответствующих точках, то имеется по крайней мере четыре пары соответствующих точек на этих овалах, в которых овалы имеют одинаковые кривизны. Р. Н. Щербаков

2420. О поверхностях, у которых диагонали четырехсторонника Демулена принадлежат линейной конгруэнции. Бол (Über die Flächen, bei denen die Diagonalen der Vierseite von Demoulin linearen Kongruenzen angehören. Bol Gerrit), Math. Z., 1953, **59**, № 2, 97—150 (нем.)

Рассматриваемые поверхности автор называет поверхностями конгруэнции (п. к.). Они представляют собой частный случай проективно-минимальных поверхностей и зависят от двух произвольных функций одного аргумента.

M-преобразованием (M-п.) называется переход от данной поверхности к любой из четырех поверхностей, описанных вершинами четырехсторонника Демулена данной поверхности. Если данная поверхность есть п. к., то ее M-п. есть также п. к., имеющая ту же самую линейную конгруэнцию K, что и данная поверхность. Данная п. к. есть M-п. любой из своих M-п. Цепь Годо (ц. Г.) каждой из M-п. проективно-эквивалентна ц. Г. данной п. к.

Производя M-преобразования от M-п. данной п. к., получают M-п. второго порядка и т. д. Совокупность всех полученных таким образом поверхностей образует M-систему, которую можно изобразить точками некоторой M-диаграммы (такая диаграмма была ранее введена для произвольных проективно-минимальных поверхностей). Все поверхности M-системы можно разбить на 4 класса проективно-эквивалентных между собой поверхностей. Луч конгруэнции K, проходящий через данную точку поверхности r, и луч, лежащий в касательной плоскости этой поверхности, описывают расслояемую пару конгруэнций. Расслаивающими поверхностями являются поверхности, в состав которых входят проективно-эквивалентные поверхности M-системы.

В § 5 рассматриваются случаи вырождения M-п. и в § 6 — тройная классификация действительных п. к. Каждый тип классификации содержит несколько случаев. Возможно только 23 сочетания этих случаев, из которых одно делится еще на два случая. Среди получающихся 24 случаев 7 соответствуют п. к. с замкнутыми ц. Г. Такая классификация сохраняется при M-преобразованиях.

В § 7 рассматривается группа проективитетов M-системы, соответствующих некоторым параллельным перенесениям M-диаграммы, и одновременно выводится необходимое и достаточное условие конечности группы M-системы. В § 8 рассматриваются так называемые противоположные поверхности (Gegenfläche) к данной п. к. с замкнутой ц. Г. Так называются поверхности, асимптотическими касательными которых являются те члены ц. Г. (их общее число в данном случае равно $4n$), которые противоположны u и v. Эти поверхности принадлежат к числу указанных выше расслаивающих поверхностей.

В § 9 (последнем) рассматриваются некоторые дополнительные замечания и примеры. В частности, отмечается, что поверхности ц. Г. имеют через интервал в 4 элемента равные инварианты Дарбу. Эти инварианты равны таким же инвариантам цепи $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ в плоскостных координатах. Если п. к.— изотермически-асимптотическая, то все ее M-п.— также изотермически-асимптотические.

Поверхности, для которых $\beta_1 = \beta_2 = 0$, названы поверхностями совпадения, так как на них совпадают все прямые канонического пучка. П. к., представляющие собой поверхности совпадения, являются W-поверхностями в смысле Клейна и Ли и одновременно тетраэдральными поверхностями. Приводятся различные формы уравнения таких поверхностей. У этих поверхностей конгруэнция K— сингулярная.

Отмечаются поверхности, у которых диагонали четырехсторонника Демулена принадлежат линейному комплексу. Класс таких поверхностей зависит от 4 произвольных функций одного аргумента. Отмечаются те п. к., которые проективно отображаются на одну из своих M-п., а также ряд других частных классов поверхностей.

Н. И. Кованцов

2421. К проективной кинематике однопараметрического семейства квадрик. К у н л е (Zur projektiven kinematik einparametriger quadrikscharen. K u n l e H e i n z), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 238 (нем.)

Краткое сообщение об однопараметрических семействах квадрик и их огибающих, в частности о том случае, когда характеристика семейства вырождается в четырехсторонник («характеристический четырехсторонник»). Линейчатые поверхности, описываемые противолежащими сторонами четырехсторонника, оказываются W-трансформируемыми. К линейчатой фигуре, образованной четырехсторонником, принадлежат четыре полосы второго порядка, тесно между собою связанные. Плоскости и соответствующие им точки этих полос полярно сопряжены относительно соответствующих квадрик семейства. Проективные длины дуг на всех четырех полосах одинаковы.

Отмечается, что с каждой полосой второго порядка связано ∞' фигур, образованных сторонами четырехсторонников. Для четверки полос второго порядка автором подсчитаны полосовые инварианты (Streifeninvarianten) Бола; устанавливается ряд предложений для четверок пангеодезических, проективных и коинцидентных (kojnzidenzstreifen) полос.

Н. И. Кованцов

2422. Проективно-дифференциальные свойства систем кривых, поверхностей или многообразий. В а о н а (Proprietà proiettivo-differenziali di sistemi di curve, superficie o varietà. V a o n a G u i d o), Boll. Unione mat. ital., 1954, 5, № 4, 373—380 (итал.)

Делается распространение на перечисленные в заглавии образования понятия тангенциального проективитета, введенного Бомпьяни для сетей плоских кривых (Bompiani E., Atti Accad. naz. Lincei. Rend, 1949, 6, 7—12).

1. Берется семейство поверхностей $x_i = x_i(u_1, u_2, u_3)$ $(i = 1,2,3.4)$ (u_3 — параметр, определяющий поверхность семейства) таких, что через каждую точку пространства проходит одна поверхность семейства. Пусть P и $P + \delta P$ — две точки пространства, отвечающие значениям параметров u_i и $u_i + \delta u_i$, π и $\bar{\pi}$ — касательные плоскости к поверхностям семейства, проходящим через точки P и $P + \delta P$. При приближении точки $P + \delta P$ к точке P по кривой с касательной $\bar{p}$, линия пересечения плоскостей π и $\bar{\pi}$ стремится к предельному положению p, зависящему только от $\bar{p}$. Между совокупностью прямых $\bar{p}$, проходящих через точку P, и совокупностью прямых p, лежащих в плоскости π, устанавливается проективитет, который автор называет тангенциальным. В пучке прямых плоскости π, проходящих через точку P, этот проективитет устанавливает инволюции сопряженных направлений на поверхности σ семейства, проходящей через P.

Умножая тангенциальный проективитет на поляритет Дарбу относительно поверхности σ, получают гомологию как в связке прямых с центром в точке P, так и в поле прямых плоскости π. Оси этих гомологий соответствуют друг другу и в тангенциальном проективитете, и в поляритете Дарбу. Та ось, которая не лежит в π, представляет собой инвариантную прямую окрестности 3-го порядка на поверхности.

2. Уравнения $x_i = x_i(u_1, u_2, u_3)$ можно рассматривать как уравнения конгруэнции кривых $u_2 = \text{const}$, $u_3 = \text{const}$ такой, что через каждую точку пространства проходит одна кривая конгруэнции. Пусть P и $P + \delta P$ — две точки пространства, π и $\bar{\pi}$ — соприкасающиеся плоскости кривых конгруэнции, проходящих через эти точки. Получается проективитет между связкой прямых с центром в точке P и полем прямых в плоскости π, называемый соприкасающимся. Фиксируя на произвольной неразвертывающейся поверхности ∞^2 кривых и проводя вдоль них касательные плоскости поверхности, получают развертывающиеся поверхности,

ребра возврата которых образуют конгруэнцию указанного вида.

3. В пространстве S_r берем из однопараметрического семейства гиперповерхностей две гиперплоскости, касательные к гиперповерхностям в точках P и $P+\delta P$; получаем проективитет между произвольной прямой $\bar{p}$, проходящей через точку P, и подпространством S_{r-2}, представляющим собой предельное положение пересечения указанных гиперплоскостей.

4. Беря в пространстве S_r совокупность ∞^{r-1} кривых, каждая из которых погружена в пространство измерения $\geqslant (r-1)$, находят гиперплоскости, соприкасающиеся с кривыми, и получают соприкасающийся проективитет между произвольной прямой $\bar{p}$, проходящей через некоторую точку P, и подпространством S_{r-2}, являющимся предельным положением пересечения двух соседних соприкасающихся гиперплоскостей.

Н. И. Кованцов

2423. К теории комплексов кривых. Папаиоанну (Sur la théorie des complexes de courbes. Papaïoannou Constantin), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 244 (франц.)

Сообщение об изучении комплекса произвольных аналитических кривых в сравнении с комплексом характеристических кривых уравнения в частных производных первого порядка. Получено соответствие между комплексом произвольных кривых и специальным комплексом уравнения в частных производных. Это соответствие позволяет связать с произвольным комплексом кривых некоторую конгруэнцию, которая названа «фокальной конгруэнцией» соответствующего ему специального комплекса, определяемого некоторым уравнением Монжа. Автор ставит перед собой задачу перенести полученные результаты на евклидово пространство n измерений. Н. И. Кованцов

2424. Гиперсоприкасающиеся окружности к поверхности в данной точке и связанные вопросы. Ваккаро (Hyperosculating circles at a surface at one point, and related questions. Vaccaro Giuseppe), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 261 (англ.)

Приводится без доказательства следующий результат автора: Пусть P — обыкновенная точка поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Существует 10 кривых на поверхности, проходящих через P и имеющих в точке P соприкасающуюся окружность 4-го порядка касания. Г. И. Кручкович

2425. О проективном инварианте. Николеску (Asupra unui invariant proiectiv. Nicolescu Alexandru), Studii şi cercetări mat., 1954, 5, № 1—2, 225—234 (рум.; резюме русс., франц.)

В первой части рассматривается совместный инвариант двух плоских кривых $I_a = (MT_1^3/\gamma_1):(MT_2^3/\gamma_2)$, где T_1T_2 — некоторые точки кривых, γ_1, γ_2 — радиусы кривизны кривых в этих точках, M — точка пересечения касательных к кривым в точках T_1, T_2. В частности, если кривые касаются друг друга в точке $T = T_1 = T_2$, то получают инвариант Смита—Мемке. I_a не меняется при всевозможных гомографических преобразованиях плоскости. При преобразованиях Лежандра L, определяемых равенствами $\bar{x} = y'$, $\bar{y} = xy' - y$, величина I_a преобразуется в $1/I_a$. Произвольная корреляция C плоскости может быть представлена в виде произведения $C = HL$, где H — подходящая гомография. Следовательно, всякая функция $F(I_a, 1/I_a)$, симметричная относительно своих аргументов, будет инвариантом общих проективных преобразований плоскости.

Беря точки T_1 и T_2 на одном и том же коническом сечении, можно получить как частный случай соотношение, найденное Демуленом: $I_a = 1$. Это соотношение позволяет написать дифференциальное уравнение всех конических сечений в таком каноническом виде: $y^3y''/(xy' - y)^3 = 1$ (все такие коники проходят через начало координат и касаются здесь оси абсцисс).

Во второй части указывается способ нахождения абсолютных и относительных инвариантов преобразования Лежандра. Так, например, если взять семейство кривых, определяемых уравнением $y' = f(x, y)$, то с ним можно связать поверхность $u = x + f(x, y)$, $v = y$, $w = xf(x, y) - y$. Преобразованию Лежандра будет соответствовать симметричное отражение этой поверхности относительно плоскости $v = w$. Всякой интегральной кривой данного дифференциального уравнения соответствует некоторая кривая на поверхности. Всякий инвариант двух кривых на поверхности относительно указанной симметрии будет абсолютным инвариантом двух соответствующих кривых на плоскости относительно преобразования Лежандра.

В третьей части рассматривается группа G преобразований, которая оставляет неизменным дифференциальное уравнение 2-го порядка $y'' = F(x, y, y')$. Такая группа может быть представлена в виде $G = \Gamma P \Gamma^{-1}$, где Γ — преобразования, переводящие точки плоскости в интегральные кривые данного дифференциального уравнения, а P — некоторая группа точечных преобразований. Н. И. Кованцов

2426. Вопросы аффинной дифференциальной геометрии поверхностей. Сантало (Cuestiones sobre geometria diferencial afin de superficies. Santaló L. A.), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Villavicencio-Mendoza, julio 1954, Montevideo, Centro coop., cient., UNESCO América Latina, 1954, 21—33 (исп.)

Основной целью доклада, повидимому, являлось ознакомление слушателей с методом подвижного репера в применении к вопросам аффинной дифференциальной геометрии.

Поверхность S предполагается трижды непрерывно-дифференцируемой. Триэдр $(X, \mathbf{I}_i)$ связывается с точками $X = X(u, v)$ поверхности; $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ касаются асимптотических линий. Устанавливаются формулы

$$dX = \omega^1\mathbf{I}_1 + \omega^2\mathbf{I}_2,\ d\mathbf{I}_1 = \omega_1^1\mathbf{I}_1 + r\omega^1\mathbf{I}_2 + \omega^2\mathbf{I}_3,$$

$$d\mathbf{I}_2 = s\omega^2\mathbf{I}_1 + \omega_2^2\mathbf{I}_2 + \omega^1\mathbf{I}_3,\ d\mathbf{I}_1 = \omega_3^1\mathbf{I}_1 + \omega_3^2\mathbf{I}_2,$$

где ω^i, ω_i^k имеют обычный смысл и независимыми являются ω^1, ω^2. Приведены формулы преобразования ω_i, ω_i^k и коэффициентов линейных зависимостей между ω^i, ω_i^k. Из этих формул легко находятся аффинные, конечные и дифференциальные, инварианты поверхности.

Для замкнутых ориентированных поверхностей с помощью формулы Стокса получены формулы

$$\Omega = \int_S Hwd\Omega,\ M = \int_S Hd\Omega = \int_S Kw\,d\Omega, \qquad (1)$$

где $w = (X, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$ — аффинное расстояние между X и началом координат, H — средняя аффинная кривизна, K — аффинная кривизна, Ω — аффинная площадь, элемент которой $d\Omega = \omega^1 \times \omega^2$.

Из формул (1) и формулы для объема $V = \frac{1}{3}\int w\,d\Omega$ следуют неравенства $3H_mV \leqslant \Omega \leqslant 3H_MV$; $3K_mV \leqslant M \leqslant 3K_MV$. Индексы m, M соответственно означают минимум и максимум.

В качестве применения приводится отличающееся краткостью доказательство известных теорем, характеризующих эллипсоид условиями $H = \text{const}$, $K = \text{const}$ (> 0). Имеются опечатки. Г. И. Дринфельд

2427. О системах сфер в геометрии Лагерра. Клингенберг (Sui sistemi di sfere nella geometria di Laguerre. Klingenberg Wilhelm), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 185—199 (итал.)

Строится дифференциальная геометрия двупараметрических семейств сфер в трехмерной геометрии Лагерра (сферами в этой геометрии называются ориентированные сферы и плоскости, а фундаментальной группой этой плоскости является группа преобразований многообразия этих сфер, при которых плоскости переходят в плоскости — эти преобразования называются преобразованиями Лагерра). Строящаяся теория сводится к теории двумерной поверхности в 4-мерном пространстве Минковского, точки которого изображают сферы Лагерра, а движения — преобразования Лагерра. Особенно подробно рассматриваются сферические семейства Рибокура. Б. А. Розенфельд

2428. Об одном аксиоматическом обосновании внутренней геометрии поверхностей.Ринов (A felületek belsö geometriájának egy Axiómatikus megalapozásáról. Rinow W.), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, 3, № 2, 227—233 (венг.)

Автор дает аксиоматическое обоснование теории поверхностей, опираясь на следующую группу аксиом: три аксиомы связи $V_1 — V_3$ и четыре аксиомы порядка $A_1 — A_4$ приблизительно, как они приводятся в «Grundlagen der Geometrie» Гильберта при обосновании плоской геометрии. Затем следуют две аксиомы непрерывности $S_1 — S_2$, из которых первая требует, чтобы прямая была сепарабельным множеством, а вторая, чтобы каждое дедекиндово сечение на прямой определяло точку. Необходимое упорядочение точек вводится соответственно аксиомам порядка. На основе аксиом связи и порядка определяется внутренняя область многоугольника. Если она присоединяется как окрестность каждой ее точки, то получается топология, которая эквивалентна топологии евклидовой плоскости. После того как введено понятие сходимости, аксиома I_1 устанавливает то, что является инфинитезимальной аналогией теоремы инволюции Паппа о точке пересечения прямой со сторонами полного четырехугольника. Эта аксиома следующая: На поверхности четыре точки A, B, C, D пробегают четыре последовательности, сходящиеся к одной и той же точке O. При этом прямые AB, BC, CD, DA, AC стремятся к прямым a, b, c, d, e. Среди этих пяти прямых никакие три не должны совпадать и не может быть одновременно $a = b$ и $c = d$ или $a = d$ и $c = b$. Тогда BD стремится к прямой f. Обстоятельство, что f определяется при помощи a, b, c, d, e однозначно и независимо от способа перехода к пределу, используется следующим образом для определения инволюции. Если закрепить a, b, c, d, то каждая прямая e будет соответствовать прямой f. Это соответствие будет инволютивным. С помощью этой инволюции теперь можно ввести в пучке координаты, которые в силу I_1 и $S_1 — S_2$ становятся элементами тела действительных чисел. Отсюда элементарным способом вводятся на поверхности координаты в виде двойных отношений. Работа завершается указаниями на дальнейшие еще не решенные вопросы. Так, например, нехватает доказательства, что прямые поверхности удовлетворяют системе дифференциальных уравнений вида

$$u^i + F^i(u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

В заключение следует еще замечание о зависимости между теоремой Дезарга — Паскаля и аксиомами непрерывности, которая совершенно аналогична обычной плоской проективной аксиоматике. O Varga

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

2429. О сетях, производных от сетей O. Калапсо (Sulle reti derivate dalle reti O. Calapso Renato), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 287—300 (итал.)

В n-мерном евклидовом пространстве рассматривается сопряженная ортогональная сеть O. Вводится производная сеть P' от сопряженной сети P как сеть, образованная пересечением двух гармонических к P конгруэнций (конгруэнция называется гармонической к сопряженной сети, если ее луч лежит в касательной плоскости сети, а развертывающиеся поверхности соответствуют линиям сети). Ставится задача об отыскании и характеристике сетей O, которые допускают среди производных сетей ортогональную сопряженную сеть так, что расстояние между соответствующими точками остается постоянным.

Вводится полная кривизна сети O как сумма обратных величин произведений двух радиусов кривизны по отношению к каждой нормали, инвариантная относительно изменения нормалей и в трехмерном пространстве совпадающая с кривизной Гаусса. Сетью M называется сеть O, допускающая преобразование Комбескюра (обратные значения полных кривизн в соответствующих точках обеих сетей имеют постоянную сумму). Сеть O, имеющая производную сеть O' с постоянным расстоянием между соответствующими точками, необходимо является сетью M, и обратно: всякая сеть M допускает такое преобразование.

Рассматривается специальный случай, когда сеть O и ее преобразование O' взаимно являются производными друг от друга сетями. В этом случае сеть O принадлежит трехмерному пространству и является системой линий кривизны на псевдосферической поверхности, а преобразованная сеть совпадает с ее сферическим изображением. Т. А. Шульман

2430. Сферические спиноры в четырехмерном евклидовом пространстве. Пейс (Spherical spinors in a Euclidean 4-space. Pais A.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 9, 835—841 (англ.)

Пусть $\psi_\alpha(x^1, \ldots, x^4)$ $(\alpha = 1, \ldots, 4)$ — произвольное спинорное поле в 4-мерном евклидовом пространстве, отнесенном к прямоугольным декартовым координатам $x^1, \ldots, x^4$.

Вводятся полярные координаты r, θ, φ, $\tilde{\varphi}$ так, что $x^1 = r\sin(\theta/2)\cos\varphi$, $x^2 = r\sin(\theta/2)\sin\varphi$, $x^3 = r\cos(\theta/2)\times$ $\times\cos\tilde{\varphi}$, $x^4 = r\cos(\theta/2)\sin\tilde{\varphi}$, причем $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi$, $\tilde{\varphi} \leqslant 2\pi$. Спинорные поля ψ_α рассматриваются в дальнейшем лишь в зависимости от угловых координат $(\psi_\alpha = \psi_\alpha(\theta, \varphi, \tilde{\varphi}))$, т. е. на единичной гиперсфере При этом цель автора — построить полную ортонормированную систему таких спинорных полей, закономерно связанную с данной системой полярных координат. В результате получаются спинорные поля следующего вида:

$$\psi^+_{k+1/2,k,m,n} = \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\left(\sqrt{k+m+1/2}\,Y_{k,m-1/2,n};\right.$$

$$\left.\sqrt{k-m+1/2}\,Y_{k,m+1/2,n};\ 0;\ 0\right),$$

$$\psi^{+}_{k-1/2,k,m,n}=\frac{1}{\sqrt{2k+1}}(-\sqrt{k-m+1/2}\,Y_{k,m-1/2,n};$$
$$\sqrt{k+m+1/2}\,Y_{k,m+1/2,n},\ 0;\ 0),$$
$$\psi^{-}_{k,k+1/2,m,n}=\frac{1}{\sqrt{2k+1}}(0;\ 0;\ \sqrt{k+n+1/2}\,Y_{k,m,n-1/2};$$
$$\sqrt{k-n+1/2}\,Y_{k,m,n+1/2}),$$
$$\psi^{-}_{k,k-1/2,m,n}=\frac{1}{\sqrt{2k+1}}(0;\ 0;\ -\sqrt{k-n+1/2}\,Y_{k,m,n-1/2};$$
$$\sqrt{k+n+1/2}\,Y_{k,m,n+1/2}).$$

Здесь $k=0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ldots$; в первой паре формул n и во второй паре формул m принимают значения $-k,\ -k+1,\ -k+2,\ldots,\ k$; в первой паре формул m и во второй паре формул n принимают значения $-k-1/2,\ -k+1/2,\ldots,\ k+1/2$. При этом

$$Y_{kmn}(\theta,\varphi,\tilde{\varphi})=2N^{-1/2}_{kmn}\,f_{kmn}(x)\,\frac{1}{2\pi}\,e^{i(m+n)\varphi+i(m-n)\tilde{\varphi}},$$

где

$$k=0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ldots;\ m,\ n=-k,\ -k+1,\ldots,\ k;$$
$$N_{kmn}=\frac{2}{2k+1}\,\frac{(k+m)!\,(k+n)!}{(k-m)!\,(k-n)!},\quad x=\cos\theta,$$
$$f_{kmn}=(-1)^{m+n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(m+n)/2}D_mD_nP_k(x)\quad(\text{если } k-\text{целое}),$$
$$f_{kmn}=\frac{(-1)^{m+n-1}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(m+n)/2}(1+x)^{1/2}\,D_{m-1/2}\times$$
$$\times D_{n-1/2}\left(\frac{d}{dx}P_{k-1/2}(x)+P_{k+1/2}(x)\right)\quad(\text{если } k-\text{полуцелое}).$$

Основой метода является отыскание собственных спиноров и собственных значений оператора H, $H\psi=\eta\psi$, где $H=\frac{1}{2}S_{ik}K_{ik}$, $K_{ik}=-i\left(x^i\frac{\partial}{\partial x^k}-x^k\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, $S_{ik}=-\frac{i}{4}(\beta_i\beta_k-\beta_k\beta_i)$; β_i — четырехрядные матрицы, обладающие свойством $\beta_i\beta_k+\beta_k\beta_i=2\delta_{ik}$ и выбираемые в дальнейшем численно определенными. П. К. Рашевский

2431. О развертывающихся поверхностях в четырехмерном пространстве постоянной кривизны. Фернандес (On developable surfaces in the four dimensional space of constant curvature. Fernández Germán), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 215—216 (англ.)

В четырехмерном пространстве $\{M(x,y,z_1,z_2)\}$ постоянной кривизны поверхность Σ дается уравнениями $z_1=z_1(x,y)$, $z_2=z_2(x,y)$. В каждой точке $P\in\Sigma$ строится ортонормированный репер (P,e_1,e_2,e_3,e_4), причем e_1, e_2 лежат в касательной, а e_3, e_4 — в нормальной плоскостях к Σ в точке P. Известно, что каждому направлению в P на Σ соответствует вектор нормальной кривизны и вектор геодезического кручения; оба вектора лежат в нормальной плоскости. Концы этих векторов описывают «конику кривизны» Q. Развертывающаяся поверхность определяется как поверхность нулевой гауссовой кривизны.

Приведены (без доказательства) следующие теоремы: 1) Всякая поверхность типа $z_1=z_1(x)$, $z_2=z_2(y)$ есть развертывающаяся. 2) Если поверхность развертывающаяся, то Q касается e_3 и e_4. 3) Если Q вырождается в отрезок с концом в P и только в этом случае, развертывающаяся поверхность является линейчатой.

В. Т. Базылев

2432. Обобщение понятий главных линий и определение V_3, обладающих некоторыми особыми свойствами. Гамботто (Estensione della nozione di linee principali e determinazione delle V_3 aventi certe particolarita. Gambotto Anna), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, 13, 291—305 (итал.)

Понятие главных линий для поверхности F в S_5 следующим образом обобщается на случай h-мерного многообразия V_h, расположенного в S_{2h+1}: главной линией V_h называется всякая линия, касательные Sh-пространства в двух бесконечно близких точках которой совпадают с точностью до бесконечно малых порядка $s\geqslant 4$. Направления главных линий, проходящих через заданную точку V_h (главные направления в этой точке), определяются одним алгебраическим уравнением, так что в общем случае главные направления в данной точке образуют конус размерности $h-1$ и порядка $h+3$. Изучается только случай $h=3$. Прежде всего дается классификация тех V_3 в S_7, главные направления которых — неопределенные. Затем рассматриваются V_3, являющиеся геометрическим местом поверхностей, на которых каждая линия — главная, т. е. касательная плоскость к производящей поверхности содержится в конусе, соответствующем точке касания. В частности, к ним принадлежат V_3, являющиеся геометрическим местом поверхностей, каждая из которых располагается в некотором S_3. Этот случай изучается особо подробно. Пусть F — поверхность, проходящая через точку P многообразия V_3, T — касательная плоскость к F в P и K — конус главных направлений в P. Оказывается, что T является двойной компонентой для K, если же система объемлющих поверхности F пространств S_3 такова, что в ней бесконечно близкие S_3 пересекаются (система Δ), то кратность T в K равна 3; если поверхности F — плоскости (и T совпадает с F), то кратность T в K равна четырем (а в некоторых случаях — шести) и конус K распадается на T и еще одну двойную плоскость; точно также T будет четвертой кратности в K, если поверхности F — конусы с вершинами на линии, касательной к пространствам S_3.

В заключение рассматривается случай, когда пространства S_3 образуют Δ-систему и бесконечно близкие S_3 совпадают с точностью до бесконечно малых второго порядка, и для этого случая устанавливаются необходимые и достаточные условия вхождения T в K с четвертой кратностью. Поверхности F оказываются при этом некоторыми квадриками.

В. В. Морозов

2433. Эквидистантность и параллелизм конгруэнций кривых, проходящих через точки подпространства. Мишра (Equidistance and parallelism of the congruences of curves through points of a subspace. Mishra R. S.), Proc. Indian Acad. Sci., 1953, A57, № 1, 159—165 (англ.)

В риманово пространство V_m, отнесенное к координатам y^α, вложено заданное в координатах x^i подпространство V_n с нормалями $N^{|\alpha}_\nu$; $m>n$; $\alpha,\beta,\ldots=1,2,\ldots,m$; $i,j,\ldots=1,2,\ldots,n$; $\mu,\nu,\ldots=n+1,n+2,\ldots,m$, $(m-n)$ конгруэнций таких, что кривая каждой конгруэнции проходит через каждую точку V_n, задаются полем касательных к кривым конгруэнции ортов $\lambda^{|\alpha}_r$. Рассматриваются векторы угловой дисперсии (angular spread vector) $S^{\lambda\lambda\,|\,\alpha}_{r\nu}=\lambda^\alpha_{r|}$; ${}^\beta\lambda^{\beta}_{\nu|}$ и линейной дисперсии (distantial spread vector) $T^{\lambda\lambda\,|\,\alpha}_{r\nu}=S^{\lambda\lambda|\alpha}_{r\nu}-S^{\lambda\lambda\,|\,\alpha}_{\nu r}$ конгруэнции $\lambda^\alpha_{r|}$ по отношению к конгруэнции, определен-

ной ортом $\lambda_\nu^{|\alpha}$, а также коэффициенты вращения репера $\gamma_{\rho\sigma\tau}$, и для них даются различные представления. Для частного случая, когда $\lambda_r^{|\alpha}$ параллелен подпространству нормалей $N_\nu^{|\alpha}$ в V_m, находятся признаки того, что кривые конгруэнции геодезические и параллельные ($S_{r\nu}^{NN|\alpha}=0$), эквидистантные ($T_{r\nu}^{NN|\alpha}=0$), нормальные к V_n ($\gamma_{\rho\sigma\tau}=0$). Библ. 4 назв. И. В. Цыганков

2434. О некоторых римановых пространствах. Оцуки (On some Riemann spaces. Ōtsuki Tominosuke), Math. J. Okayama Univ., 1953, 3, № 1, 65—88 (англ.)

Изучаются собственно римановы ($ds^2>0$) n-мерные пространства V_n, тензор Риччи которых удовлетворяет условиям: а) $K_i^m K_m^j=\frac{K}{n-1}K_i^j$, где $K_i^i=K$; б) $K_{ij,m}=0$, где запятой обозначена ковариантная производная в связности V_n. Эти пространства являются обобщением пространств Эйнштейна, у которых $K_{ij}=\frac{K}{n}g_{ij}$, $K=\mathrm{const}$, и, следовательно, б) выполнено, а в а) множитель $K/(n-1)$ заменяется на K/n. Доказываются следующие теоремы:

1) Если V_n удовлетворяет условию а) и $K=0$, то его тензор Риччи K_{ij} равен нулю.

2) Если V_n с условием а) имеет $K\neq 0$, то в каждой точке тензор Риччи имеет нуль-направление, т. е. найдется ненулевой вектор a^i в данной точке, что $K_j^i a^j=0$.

3) Любое V_n можно включить в семейство гиперповерхностей пространства V_{n+1}, обладающего свойством а) и $K\neq 0$, причем так, что в каждой точке V_{n+1} нуль-направление его тензора Риччи ортогонально гиперповерхности семейства, проходящей через эту точку, и в касательном к гиперповерхности n-мерном линейном пространстве форма Риччи V_{n+1} пропорциональна его метрической форме.

4) Пусть V_n удовлетворяет условиям а), б) и $K\neq 0$. Если кривые, касательные к нулевому направлению тензора Риччи, являются ортогональными траекториями семейства гиперповерхностей, то V_n есть прямое произведение эйнштейнова пространства с $K\neq 0$ на прямую линию. Обратное также верно.

Длинными выкладками автор получает систему $n^3+\frac{5}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$ уравнений в частных производных от $2n^2+n$ неизвестных функций и утверждает: 5) Для того чтобы любое V_n можно было вместить в качестве гиперповерхности в V_{n+1} со свойствами а), б) и $K\neq 0$ так, чтобы нормаль к V_n в каждой точке шла по нуль-направлению тензора Риччи из V_{n+1}, необходимо и достаточно, чтобы эта система имела решение.

Примечание референта. Автор прошел мимо известной теоремы о том, что из существования в собственно римановом пространстве V_n симметрического тензора K_{ij}, удовлетворяющего условию б), следует приводимость V_n: $ds^2=ds_1^2+\ldots+ds_l^2$, а также $K_{ij}dx^i dx^j=\lambda_1 ds_1^2+\ldots+\lambda_l ds_l^2$ ($\lambda_p=\mathrm{const}$). Если K_{ij} является тензором Риччи, то V_n распадается в прямое произведение эйнштейновых пространств, откуда совершенно тривиально следует: для того чтобы V_n удовлетворяло а), б) и $K\neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы оно было прямым произведением эйнштейнова пространства с $K\neq 0$ на прямую. Это показывает, что добавочное условие в теореме 4) лишнее, а система, полученная в теореме 5), бесцельна, так как для неэйнштейнова пространства V_n ее решения не существует, в эйнштейновом же случае решение тривиально.

Г. И. Кручкович

2435. О символическом представлении. Аоки (On symbolic representation. Aoki Kiyoshi), Proc. Japan. Acad., 1954, 30, № 3, 160—164 (англ.)

Рассматривается двумерное замкнутое римановo многообразие Σ рода $p\geqslant 1$. Предполагается, что ни одна геодезическая Σ не содержит пары сопряженных точек. Многообразие постоянной отрицательной кривизны того же рода S изображается в виде канонического равностороннего многоугольника S_0 на круге Пуанкаре Ф. На Σ строятся геодезические петли с общей вершиной P, образующие каноническую систему разрезов Σ; строится гомеоморфизм Σ на S, позволяющий изображать Σ многоугольником S_0, а геодезические петли — сторонами S_0. С помощью движений соответствующей фуксовой группы, S_0 включается в покрытие Ф конгруэнтными многоугольниками; конгруэнтные стороны этих многоугольников обозначаются одинаковыми символами. Геодезическая g многообразия Σ ($P\in g$), перенесенная на накрывающее многообразие Ф, пересекает стороны многоугольников покрытия в некотором порядке, определяющем последовательность символов в смысле Морса и Хедлунда (Morse M., Hedlund G. A., Amer. J. Math., I, 1938, 60, 815—866; II, 1940, 62, 1—42). Изучаются связи между геодезическими на Σ и изображающими их последовательностями символов. Теоремы, ввиду их громоздкости, здесь не приводятся. Доказательства изложены нечетко и с пробелами.

А. И. Фет

2436. Определение полных многообразий с неопределенной метрикой. Авез (Définition des variétés complètes à métriques indéfinies. Avez André), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 5, 485—487 (франц.)

Дается определение полноты пространства для случая неопределенной метрики. Многообразие V_n n измерений класса C^2 с метрикой $g_{\alpha\beta}$ сигнатуры $n-1$ (имеется в виду индекс квадратичной формы) называется полным, если оно полно в метрике: $h_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}+2u_\alpha u_\beta$, где $u_\alpha(x)$ — непрерывное поле единичного вектора, а полнота с метрикой $h_{\alpha\beta}$ понимается в обычном смысле (сходимость всякой фундаментальной последовательности точек).

Чтобы это определение было корректным, т. е. полнота не зависела от выбора поля $u_\alpha(x)$, автор исключает из рассмотрения поля, которые определяются следующим образом: Непрерывное регулярное поле $V_\alpha(x)$ на многообразии V_n называется асимптотичным к полю изотропного конуса или полем T, если на V_n существует поле $\varepsilon_\alpha(x)$ и последовательность точек x_i, не содержащаяся ни в каком компакте, такие, что

$$N[V_\alpha(x)-\varepsilon_\alpha(x)]=0, \qquad \lim_{i\to\infty}\frac{\varepsilon_\alpha(x_i)}{\sqrt{|N[V_\alpha(x_i)]|}}=0.$$

Поле, не обладающее этим свойством, называется полем $\overline{T}$.

Теорема. Пусть на V_n задано непрерывное поле $u_\alpha(x)$ единичного вектора типа $\overline{T}$. Если V_n является полным в метрике $h_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}+2u_\alpha u_\beta$, то оно будет полным и в метрике $e_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}+2v_\alpha v_\beta$, где $v_\alpha(x)$ — произвольное непрерывное поле единичного вектора типа $\overline{T}$,

Автор утверждает, что результаты этой работы легко распространяются на метрику любой сигнатуры.

А. С. Феденко

2437. О некоторых неравенствах, касающихся одного класса интегралов Дирихле. Дингас (Sur quelques inégalités concernant une classe d'intégrales de Dirichlet. Dinghas Alexandre), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 13, 639—641 (франц.)

Пусть S_n — единичная сфера $\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2=1$. Пусть $\psi(x)=\sin\sqrt{K}x/\sqrt{K}$, где K — некоторое действительное число. Пусть C^n — пространство точек $(l,\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $(\xi_1,\ldots\xi_n)\in S_n$, $0\leqslant\sqrt{K}l\leqslant\pi$ (при $K>0$), в котором метрика задается формулой $ds^2=dl^2+\psi^2(l)(d\xi_1^2+\ldots+d\xi_n^2)$. Пусть $v(P)$ — неотрицательная и дифференцируемая функция, заданная в некоторой области $A\subset C^n$ и обращающаяся в нуль на границе A. Пусть далее ω_n $(n-1)$-мерный объем S_n, $\tau(l)=\omega_n\int_0^l\psi^{n-1}(\alpha)\,d\alpha$, $\sigma(l)=\tau(l)/\tau'(l)$. Пусть l_0 определяется равенством $\int_A dO_n=\tau(l_0)$, где dO_n — элемент объема C^n. Пусть, наконец, $q=\sigma(l_0)$. Утверждается, что тогда имеет место неравенство

$$q\int_A\nabla(v)^{1/2}dO_n\geqslant\int_A v dO_n \qquad (1)$$

где ∇ — первый дифференциальный параметр Бельтрами. Отсюда с помощью неравенства Гёльдера для всякой функции u, дифференцируемой и обращающейся в нуль на границе A, и произвольного числа $a\geqslant1$ получается неравенство

$$(2aq)^{2a}\int_A\nabla^a(u)\,dO_n\geqslant\int_A u^{2a}dO_n.$$

В реферуемой статье неравенство (1) приводится без подробного доказательства, но указывается путь, которым это доказательство можно получить.

Е. М. Ландис

2438. Дифференциальные формы, определенные на многообразии, допускающем непрерывную группу изометрии. Лелон-Ферран (Formes différentielles définies sur une variété admettant un groupe continu d'isométries. Lelong-Ferrand Jacqueline), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 3, 268—269 (франц.)

Рассматривается риманово пространство V_n с бесконечно дифференцируемой метрикой, допускающее непрерывную группу движений. Предполагается, что V_n некомпактно и его граница инвариантна относительно инфинитезимальной группы движений G. Дифференциальная форма $\varphi=\varphi_{(i_1\ldots i_p)}\,dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}$ называется инвариантной относительно группы G, если для любого оператора $X\in g$ $X\varphi=0$, где $X\varphi$ обозначает производную Ли формы φ,

$$X\varphi=\frac{1}{p!}\left(\xi^k\frac{\partial\varphi_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k}+\sum_{r=1}^{p}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^{i_r}}\varphi_{i_1\ldots i_{r-1}i_{r+1}\ldots i_p}\right)dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}.$$

Доказывается следующая теорема: если выполнена одна из двух гипотез: а) G — полупростая группа, б) $|\varphi|$ ограничен,— то из обращения в нуль всех производных Ли формы φ порядка k (т. е. вида $X_1\ldots X_k\varphi=0$, где $X_i\in g$), хотя бы для одного значения k, следует инвариантность формы φ.

Г. И. Кручкович

2439. C^1-изометричные вложения. Наш (C^1 isometric imbeddings. Nash John), Ann. Math., 1954, **60**, № 3, 383—396 (англ.)

Рассматривается вопрос о непрерывном изометричном вложении римановых многообразий в евклидовы пространства; полученные результаты справедливы для поверхностей в целом. Автор пользуется также понятием изометричного погружения, определяя его как несингулярное вложение, допускающее самопересечение. Вводится понятие «короткого» погружения.

Пусть g_{ij} — метрический тензор, $x^i\,(i=1,\ldots,n)$ — внутренние координаты метрики, z^α — координаты евклидова пространства E^k. Пусть

$$h_{ij}=\sum_\alpha\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}$$

есть метрический тензор n-мерной поверхности $z^\alpha=z^\alpha(x^1,\ldots,x^n)$, $\alpha=1,\ldots,k$.

По определению, погружение «коротко», если $g_{ij}-h_{ij}$ есть положительно определенный тензор. Указывается конструкция, позволяющая строить бесконечную последовательность коротких вложений h_{ij}^s так, что при $s\to\infty$, $h_{ij}^s\to g_{ij}$, и в пределе получаем истинное вложение.

Теорема 1. Всякое замкнутое риманово многообразие U_n допускает C^1-изометричное влажение в E^{2n}.

Теорема 2. Произвольное риманово многообразие u_n допускает C^1-изометричное погружение в E^{2n} и изометричное вложение в E^{2n+1}.

Теорема 3. Если замкнутое риманово многообразие u_n допускает короткое C^∞ погружение или вложение в E^k, $k\geqslant n+2$, то оно допускает соответственно погружение или вложение в E^k.

Н. Н. Яненко

2440. Изометрическое вложение эллиптических пространств в пространства постоянной кривизны высшей размерности. Блануша (Über die isometrische Einbettung elliptischer Räume in höhere Räume konstanter Krümmung. Blanuša Danilo), Publs Inst. math. Acad. serbe des sci., 1954, **6**, 91—114 (нем.)

Автор пользуется следующими обозначениями и понятиями: R_n, S_n, El_nH_n — соответственно n-мерное евклидово, сферическое, эллиптическое, гиперболическое пространства; ρ — радиус El_n, т. е. радиус пространства S_n (которое всегда можно реализовать в виде гиперповерхности в R_{n+1}), из которого El_n получается отождествлением диаметрально противоположных точек. Доказываются следующие основные теоремы:

Теорема 2. $El_m\,(m=2n>0)$ радиуса ρ_0 можно изометрично вложить в S_{M-1}, где $M=m(m+3)/2=2n^2+3n$ с радиусом

$$\rho>\rho_1=\rho_0\sqrt{m/2(m+1)}=\rho_0\sqrt{n/(2n+1)}.$$

Предельный переход $\rho\to\infty$ дает вложение в R_{M-1}. Кроме того, вложение возможно в H_{M-1} любой кривизны.

Теорема 3. El_m, $m=2n+1>1$, допускает вложение в R_{M-1}, $M=m(m+3)/2=2n^2+5n+2$.

Н. Н. Яненко

2441. Структура групповых многообразий. Барсотти (Structure of group-varieties. Barsotti Iacopo), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 193 (англ.)

Групповым многообразием называется неприводимое подмногообразие G проективного пространства над любым полем k характеристики p, для которого существует собственное подмногообразие F (вырожденных

элементов) и рациональное отображение $DG \times G$ на G, имеющее следующие свойства: если $P, Q \in G - F$, то $R = D[P \times Q] \in G - F$; каждая из точек P, Q, R рационально определяется двумя другими и $G - F$ является группой, если положить $R = PQ$. Если F пусто, то G называется абелевым. Если k алгебраически замкнуто, то можно ввести понятия группового подмногообразия, гомоморфизма, фактор-многообразия и т. д., свойства которых аналогичны свойствам соответствующих понятий в теории групп. Если $G - F$ — коммутативная группа, то G содержит ровно одно максимальное неприводимое рациональное групповое подмногообразие V, причем $A = G/V$ абелево. G может быть построено, исходя из A, V и системы факторов. Если $p = 0$, то V является произведением конечного числа аддитивных и мультипликативных прямых, если же $p \neq 0$, то V равно прямому произведению конечного числа мультипликативных прямых и многообразия W такого, что P^{pl} равно единице для любого невырожденного P из W и фиксированного целого e. Группа систем факторов абелевого многообразия A относительно мультипликативной прямой, рассматриваемая по модулю подгруппы систем факторов, ассоциированных с тривиальной системой, изоморфна пикаровскому многообразию для A. Если G некоммутативно и C — центр G, то при $p = 0$ G/C является многообразием Вессио, а при $p \neq 0$ находится во взаимно однозначном алгебраическом соответствии с многообразием Вессио. Н. Я. Виленкин

2442. Группа голономий римановых многообразий. Приложения. Бергер (Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. Applications. Berger Marcel), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 9, 985—986 (франц.)

Работа является продолжением предыдущих (РЖМат, 1954, 2711 и 5250). Те же методы позволяют утверждать, что сокращенная однородная группа голономии псевдориманова несимметрического пространства V^h_m, если она неприводима, является (за конечным числом исключений) одной из следующих групп: для V^h_m: $SO^h(m)$, кроме того, для V^{2k}_{2n}: $T' \otimes SU^k(n)$, $SU^k(n)$ и для V^n_{2n}: $T' \otimes SO(n) \otimes SO(n)$, $SO(n) \otimes SO(n)$; кроме того, для V^{4k}_{4n}: $Sp(1) \otimes Sp^k(n)$, $T' \otimes Sp^k(n)$, $Sp^k(n)$ и для V^{2n}_{4n}: $Sp(1) \otimes SO^*(2n)$, $T' \otimes SO^*(2n)$, $SO^*(2n)$. Здесь верхний индекс везде обозначает число положительных квадратов в каноническом виде квадратичной формы, естественно связанной с соответствующим образом. $SU^h(n)$, $Sp^h(n)$, $SO^*(2n)$ — вещественные формы групп $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(2n)$, являющиеся соответственно подгруппами групп SO^{2h}_{2n}, SU^{2h}_{2n}, $SO^{2n}(4n)$. $SO(n) \otimes SO(n)$ — вещественное представление комплексной группы $SO(n)$ в группе $SO^n(2n)$.

Утверждается, что все группы Ли, эффективно и транзитивно действующие на квадрике Q^h_{m-1}, содержатся среди указанных выше групп (если их рассматривать на соответствующей единичной сфере), откуда следует полное их перечисление. На римановом многообразии всякая внешняя дифференциальная форма, ковариантная производная которой равна нулю, инвариантна относительно однородной группы голономии. Это позволяет автору найти базис таких форм для неприводимых несимметрических пространств.

А. М. Васильев

2443. Об интегральной кривизне риманова многообразия. Сэки (On the curvatura integra in a Riemannian manifold, Seki Setsuya), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1953, **1**, № 2, 41—50 (англ.)

Для замкнутого ориентируемого n-мерного риманова многообразия M^n дается новое доказательство теоремы Гаусса-Бонне, в основе которого лежит та же идея, что и в доказательстве Чжэнь Шэн-шеня (Chern S., Ann. Math., 1944, **45**, 747—752). Н. С. Синюков

2444. О понятии внешнего дифференциала. Папи (Sur la notion de différentielle extérieure. Papy Georges Leopold), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 154—155 (франц.)

Сообщение о разложении оператора внешнего дифференцирования в произведение операторов: $d = BAB^{-1}$, где A есть линейный оператор внешнего умножения слева на $dx_1 + \ldots + dx_n$ и B есть оператор, линейный относительно скалярных констант, определяемый равенством

$$Bf(x_1, \ldots, x_n) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n} =$$

$$= \frac{\partial f(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_n}} dx_{i_1} \wedge, \ldots, \wedge dx_{i_n},$$

и о приложении такого представления этого оператора к обобщениям внешнего дифференцирования.

В. В. Рыжков

2445. Внешние дифференциальные формы класса C^1 на дифференцируемом многообразии класса C^1. Папи (Formes différentielles extérieures de classe C^1 sur une variété différentiable de classe C^1. Papy Georges), Bull. Soc. math. Belgique, 1953 (1954), **6**, 62—69 (франц.)

Понятие внешней дифференциальной формы класса C^1 как формы с коэффициентами класса C^1 на многообразии того же класса не инвариантно относительно замены локальных координат. В связи с этим обычно вводится более общее и инвариантное понятие регулярной формы, имеющей (локально) обобщенный внешний дифференциал, определяемый с помощью формулы Стокса: если для ω_k существует в окрестности некоторой точки p форма ω_{k+1} такая, что $\int_{\partial\sigma^{k+1}} \omega_k = \int_{\sigma^{k+1}} \omega_{k+1}$, где σ^{k+1} — область ($k+1$-мерная) интегрирования, а $\partial\sigma^{k+1}$ — ее граница, то форму ω_{k+1} называют обобщенным внешним дифференциалом ω_k. Автор предлагает обобщение понятия формы класса C^1, не требующее вышеуказанного изменения понятия внешнего дифференциала и обладающее свойством инвариантности относительно преобразования локальных координат. При этом форма класса C^1 (точнее элемент формы, germe) представляется в виде $\omega_k = \Sigma^i f^0_i df^1_i \wedge \ldots \wedge df^k_i$, где все f^j_i — функции класса C^1 в окрестности точки p. Таким образом к классу C^1 относятся формы, выражаемые через дифференциал функций класса C^1 с коэффициентами того же класса. Ниже везде формы класса C^1 понимаются в указанном обобщенном смысле. Формы класса C^1 образуют подкольцо кольца регулярных форм.

Будем говорить о формах с коэффициентами класса C^1 в окрестности точки p по отношению к фиксированной системе локальных координат $x = \{x^1, \ldots, x^n\}$, что они принадлежат классу C^1_x. Тогда имеет место теорема о нормальном представлении формы ω_k (обобщенного) класса C^1: всякая форма класса C^1 на многообразии класса C^1 представляется как сумма мономов классов C^1, где x, вообще говоря, различны для разных мономов. Такое представление и используется при введении действия внешнего дифференцирования (которое приводит снова к форме класса C^1) и при определении произведения двух форм.

Наконец, доказывается, что из $d\omega = 0$, где ω — форма класса C^1, следует $\omega = d\bar{\omega}$, где $\bar{\omega}$ — также форма

класса C^1. Именно, для монома класса C^1_x определяется оператор λ^*:

$$\lambda^*(a(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}) = \left(\int_0^1 a(tx)\,t^{k-1}dt\right)\cdot\sum_s(-1)^s x^{i_s}\,dx^{i_1}\wedge\ldots$$
$$\ldots\wedge dx^{i_{s-1}}\wedge dx^{i_{s+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k},$$

распространяемый с помощью нормальных представлений на любые формы класса C^1. Тогда легко проверяется, что $\omega=\lambda^* d\omega+d\lambda^*\omega$ и при $d\omega=0$ получается $\omega=d\lambda^*\omega$, $\bar\omega=\lambda^*\omega$. В. В. Рыжков

2446. **О геометрии обобщенных метрических пространств.** Рунд (On the geometry of generalised metric spaces. Rund Hanno), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 114—121 (англ.)

Рассматриваются вопросы, связанные с введением ковариантного дифференцирования в финслеровом пространстве. Вводится понятие относительной ковариантной производной от векторного поля X^i, зависящего от точки x^k и направления $\dot x^k$:

$$X^i_{,k}=\frac{\partial X^i}{\partial x^k}+\frac{\partial X^i}{\partial \dot x^h}\cdot\frac{\partial \dot x^h}{\partial x^k}+P^i_{hk}(x,x')\,X^h.$$

Здесь x'^i обозначает направление дифференцирования, P^i_{hk} определяются по метрическому тензору g_{ij} пространства. Относительная ковариантная производная определена, если задано направление $\dot x^k$. Для относительного ковариантного дифференцирования равенство $Dg_{ij}(x,x')=0$ выполняется только вдоль геодезической при условии, что она отнесена к длине дуги.

Абсолютное ковариантное дифференцирование определяется посредством отображения векторов из некоторой окрестности точки P финслерова пространства на векторы касательного пространства в точке P. Аналитически:

$$X^i_{;k}=\frac{\partial X^i}{\partial x^k}-\frac{\partial X^i}{\partial x'^h}\,P^h_{jk}(x,x')\,x'^j+P^i_{hk}(x,x')\,X^h.$$

Для абсолютного ковариантного дифференцирования выполнены обычные уравнения $g_{ij;k}=0$.

Указывается, что относительное ковариантное дифференцирование полезно при рассмотрении специальных геометрических проблем (теория второй вариации интеграла длины дуги, геодезическое уклонение, теория подпространств и т. д.). Абсолютное дифференцирование более применимо для изучения пространства, как такового (теория кривизны и др.). Г. И. Кручкович

2447. **Об одной теореме Лихнеровича, относящейся к келеровой геометрии.** Таллини (Sopra un teorema di A. Lichnerowicz sulla geometria Kähleriana. Tallini Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 17, № 5, 204—209 (итал.)

Дается новое доказательство теоремы (A. Lichnerowicz. Généralisations dela géométrie kählerienne globale. Coll. de Géom. Différentielle. Louvain, 1951, 114—115). Если на четномерном римановом многообразии задано поле невырожденного кососимметрического тензора F_{ik}, то на многообразии существует положительно определенная метрика g_{ik} удовлетворяющая условию $F_{ij}F_{kp}g^{jp}=g_{ik}$ не обязательно совпадающая с первоначально заданной метрикой пространства). А. М. Васильев

2448. **Абелевы многообразия над функциональными полями.** Чжоу Вэй-лян (Abelian varieties over function fields. Chow Wei-Liang), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 2, 253—275 (англ.)

Рассматриваются алгебраические системы абелевых многообразий (м.) в проективном пространстве (или абелевы м. над функциональными полями) и устанавливается существование двух геометрических образов, бирационально инвариантно отнесенных каждой такой системе: K-образа и K-следа производящего абелева м. системы. Именно, если A^* — абелево м. над K^*, то существуют некоторое абелево м. A над K и рациональный гомоморфизм F м. A^* на A, обладающий свойством «универсального отображения»: всякий другой рациональный гомоморфизм H м. A^* на абелево м. B является произведением F и рационального гомоморфизма G м. A на B. Образ A м. A^* в этом отображении называется K-образом A^* над K^*, а F — каноническим гомоморфизмом A^* на A. В этом предложении K^* — примарное расширение K (т. е. $K^*\cap\bar K$ — вполне несепарабельное расширение K), B определено над сепарабельно порожденным (т. е. сохраняющим p-независимость, где p — характеристика K) расширением $K(v)$ поля K, независимым относительно K^* над K, H определен над $K^*(v)$ и G — над $K(v)$. Далее, если A^* — абелево м. над K^*, то над K существует абелево м. A' и рациональный изоморфизм F м. A' в A^*, обладающий аналогичным свойством: каждый рациональный гомоморфизм H абелева м. B над K_1 в A^* является произведением F и рационального гомоморфизма G м. B в A'. A' называется K-следом A^* над K^*, а F — каноническим изоморфизмом A' в A^*. В последнем предложении K^* — регулярное расширение K, K_1 — расширение K, независимое относительно K^* над K, H определен над K^*K_1 и G — над K_1. Исследуется поведение K-образа и K-следа при расширении основного поля.

В качестве вспомогательного материала устанавливаются некоторые свойства алгебраических подгрупп абелева м. и производящего элемента алгебраической системы абелевых м. В. В. Морозов

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

2449. **Почти топологические свойства.** Ефремович В. А., Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, 5, 3—8

Рассматриваются простейшие свойства множеств метрических пространств, инвариантных относительно взаимно однозначных отображений, в обе стороны удовлетворяющих условию Липшица. Заметка носит более методологический, чем математический, характер и не содержит ни одного утверждения, кроме доказываемых вполне тривиально М. М. Постников

2450. **Почти топологические свойства.** Ефремович В. А., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 2, 213. Краткое изложение работы с тем же названием (реф. 2449). Ю. М. Смирнов

2451. **О разбиении шара на меньшие части.** Хадвигер (Von der Zerlegung der Kugel in kleinere Teile. Hadwiger H.), Gaz. mat., 1954, 15, № 57, 1—2 (нем.), 2—3 (порт.)

Борсук доказал (Borsuk J., Verh. Int. Math. Kongress, Zürich, 1932, 2, 192), что n-мерный шар V диаметра 1 нельзя разбить на n множеств диаметра <1. Однако на $n+1$ множеств диаметра <1 шар V разбить можно. В работе оцениваются диаметры множеств такого разбиения. Именно доказано, что при любом

разбиении шара V на $n+1$ множеств по крайней мере одно из этих множеств имеет диаметр, не меньший чем

$$\sqrt{1/2+1/2\sqrt{(n-1)/2n}}. \quad (1)$$

Указано, что для $n = 2,3$ эта оценка точная (т. е. при $n = 2,3$ существует разбиение шара V на $n+1$ множеств, каждое из которых имеет диаметр, не превосходящий величины (1)). В. Г. Болтянский

2452. Компактная простая группа E_6 как группа движений комплексной октавной неевклидовой плоскости. Розенфельд Б. А., Докл. АН Аз.ССР, 1954, **10**, № 12, 829—833

Напоминается определение октавной проективной плоскости, принадлежащее Фрейденталю, и аналогично вводятся понятия комплексной октавной проективной плоскости KO_2 и двойной октавной проективной плоскости $'KO_2$. Указывается, что компактную группу E_6 можно реализовать в виде группы движений пространства KO_2, причем стационарная подгруппа изоморфна $D_5 \times D_1$. Некомпактная группа E_6 может быть реализована в виде группы движений $'KO_2$, причем стационарная подгруппа изоморфна прямому произведению некомпактных групп D_5 и D_1. Пространство KO_2 оказывается симметрическим римановым пространством ранга 2. Перечисляются все образы симметрии пространств O_1, O_2 и KO_2. А. Л. Онищик

2453. Исправление к статье «Единственность проективной плоскости с пятьюдесятью семью точками». Холл (Correction to «Uniqueness of the projective plane with 57 points». Hall Marshall, Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 994—997 (англ.)

Учитывая примечание Г. Пикерта о том, что уравнение $12+3s+2t=24$ должно иметь вид $12+3s+2t+u=24$ и, следовательно, что вывод $U=0$ незаконен, автор дает новое доказательство условия $U=0$. См. РЖМат, 1955, 392. Л. Я. Березина

2454. Булева геометрия. II. Блументал (Boolean geometry. II. Blumenthal Leonard Mascot), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 205—206 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1955, 2872.

Рассматривается булева алгебра, в которой определено расстояние $d(a, b) = a\,b' + a'\cdot b$, являющееся элементом той же алгебры (это расстояние удовлетворяет аксиомам метрического пространства); определенное таким образом пространство называется булевым пространством. Показывается, что всякое такое булево пространство изометрично подпространству некоторого метрически выпуклого пространства, определенному над булевой алгеброй, содержащей данную алгебру в качестве подалгебры. Далее изучается метрически выпуклое булево пространство, являющееся полной структурой, в которое вводится топология по Биркгофу — Канторовичу. Доказывается ряд свойств этого пространства, в частности, доказывается, что это пространство является метрически полным пространством и что движения этого пространства являются гомеоморфизмами. Б. А. Розенфельд

2455. Об R-пространствах. Титс (Sur les R-espaces. Tits Jacques), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 15, 850—852 (франц.)

Автор продолжает изучение R-пространств, начатое в предыдущей заметке (РЖМат, 1956, 1096). Пусть φ — неприводимое аналитическое представление полупростой комплексной связной группы Ли G в группу проективных преобразований комплексного проективного пространства P. В качестве Π возьмем все простые корни алгебры Ли группы G, для которых $(\rho, \alpha_i) \neq 0$, где ρ — старший вес представления φ, (x, y) — скалярное произведение Картана. Между R-пространством $G[\Pi]$ и некоторым подмногообразием V пространства P (линейная оболочка V совпадает с P) можно установить взаимно однозначное аналитическое соответствие, инвариантное относительно преобразований группы G. Таким образом, R-пространство $G[\Pi]$ оказывается погруженным в некоторое проективное пространство. В качестве примера рассматривается погружение проективной плоскости над октавами в 26-мерное проективное пространство. Г. И. Кац

2456. Многообразие $\omega M \omega_{-1} = 0$. Бенедикти (Le varietà $\omega M \omega_{-1} = 0$. Benedicty Mario), Rend. mat. e appl., 1954, **13**, № 1—2, 89—98 (итал.)

Рассматривается в проективном $2p^2-1$-мерном пространстве S_{2p^2-1}, точками которого являются матрицы ω порядка $(p, 2p)$ с точностью до постоянного множителя, многообразие $V(M)$, уравнение которого

$$\omega M \omega' = 0, \quad (1)$$

где M — фиксированная невырожденная кососимметрическая матрица порядка $(2p, 2p)$. Сначала рассматриваются комплексные матрицы M и ω. Для изучения многообразия автор производит проективное преобразование пространства S_{2p^2-1} $\omega \to \omega A$ с такой невырожденной матрицей $A^{(2p,\,2p)}$, что $V(M)$ переходит при этом преобразовании в $V(L)$, где

$$L = \begin{pmatrix} 0^{(p,\,p)} & E^{(p,\,p)} \\ -E^{(p,\,p)} & 0^{(p,\,p)} \end{pmatrix}.$$

Устанавливается: 1) многообразие $V(M)$ неприводимо, рационально, имеет размерность $1/2(3p^2+p-2)$, является полным пересечением гиперквадрик (1) и имеет, следовательно, порядок $2^{p(p-1)/2}$; 2) особыми точками многообразия $V(M)$ являются те и только те матрицы ω, ранг которых не превосходит $p-2$; 3) из $V(M) = V(N)$ следует, что M и N пропорциональны.

В заключение рассматривается интересный для теории римановых матриц случай, в котором M — невырожденная кососимметрическая рациональная (или целочисленная с взаимно простыми элементами) матрица, и содержатся очевидные следствия из предыдущих теорем. Г. И. Клейнерман

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

2457. Исследование возможностей варьирования решений некоторых классов дифференциальных уравнений. Дорфман А. Г., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 4, 167—174

В окрестности нулевой точки плоскости u, v рассматривается уравнение $F(f, z) = 0$, где $f(u, v)$ — известная функция, а $z(u, v)$ — искомое решение. Пусть $f(u, v)$ в данной окрестности допускает степенное разложение

$$f(u, v) = f^{(n)}(u, v) + f^{(n+1)}(u, v) + \ldots, \qquad n \geqslant 2,$$

где $f^{(k)}(u, v)$ — однородные формы степени k относительно u, v. Рассмотрим непрерывное семейство аналитических решений уравнения $F(f, z) = 0$: $z(u, v; t) = z^{(\nu)}(u, v, t) + z^{(\nu+1)}(u, v, t) + \ldots$ $(\nu \geqslant 2)$, включающее функцию $f(u, v)$ при $t = 0$ и обладающее следующими свойствами $z^{(k)}(u, v; t) = 0$ $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$, $z^{(k)}(u, v, t) = f^{(k)}(u, v)$ $(k = n, \ldots, n+l-1)$, $z^{(k)}(u, v, t) \neq f^{(k)}(u, v)$, хотя бы для одного семейства $z^{(k)}(u, v, t)$ при $k = n+l$ $(l > 0)$. В этом случае решение $z = f(u, v)$ (или, что то же, поверхность $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$) обладает свойством относительной устойчивости. Число l называется порядком относительной устойчивости.

Рассматривается вопрос об относительной устойчивости решений следующих дифференциальных уравнений:

$$f_{uu}z_{vv} - 2f_{uv}z_{uv} + f_{vv}z_{uu} = 0, \quad (1)$$

$$(z_{uu}z_{vv} - z_{uv}^2) - (f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2) = 0, \quad (2)$$

$$2(z_{uu}z_{vv} - z_{uv}^2) - (f_{uu}z_{vv} - 2f_{uv}z_{uv} + f_{vv}z_{uu}) = 0. \quad (3)$$

Показывается, что явление относительной устойчивости существует. Так, например, поверхность $x = u$, $y = v$, $z = 3u^2v + 3uv^2 + 6u^3v^2$ обладает относительной устойчивостью, как решение уравнения (2). Приводятся также примеры других поверхностей, обладающих относительной устойчивостью первого порядка для того же уравнения.

Используя результаты Н. В. Ефимова (Докл. АН СССР, 1948, 60, № 5, 761—764) и В. А. Тартаковского (Матем. сб., 1953, 32 (74), № 1), автор получает следующее предложение: Для каждого $n \geqslant 4$ существует параболоид $z = f^{(n)}(u, v)$, обладающий относительной неизгибаемостью не ниже 1-го порядка, изгибаемый бесконечно мало. И. Я. Бакельман

2458. Об основной кинематической формуле интегральной геометрии. Хадвигер (Zur kinematischen Hauptformel der Integralgeometrie. Hadwiger Hugo), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 225—226 (нем.)

Пусть K — выпуклое кольцо множеств, т. е. наименьшее кольцо множеств по системе выпуклых тел евклидова пространства E_k. Для тел $A \in K$ определяются интегралы $W_i(A)$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ Минковского по сечениям A с движущейся в E_k i-мерной плоскостью E_i, как интегралы Крофтона от характеристики $\chi(AE_i)$ Эйлера — Пуанкаре.

Пусть $\varphi(A)$ — определяемый на K функционал, обладающий свойствами: $\varphi(A)$ — аддитивный функционал; $\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$; $\varphi(A)$ непрерывен для выпуклых A; $\varphi(A)$ достаточно быстро убывает на бесконечности. Оказывается, что распространенный на все перемещения A в E_K кинематический интеграл от $\varphi(A)$ является линейной формой от $W_i(A)$. Зависящие только от φ коэффициенты этой формы представимы в виде интегралов Крофтона от $\varphi(E_i)$. В частности, если положить $\varphi(A) = \chi(A_0A)$, где $A_0 \in K$ — движущееся тело, то получается известная основная формула, дающая представление кинематического интеграла от $\chi(A_0A)$ в виде билинейной относительно $W_i(A_0)$ и $W_i(A)$ формы.

Упомянутые формулы не приведены и никаких указаний относительно доказательства не дано.

Г. И. Цринфельд

2459. К. Старое и новое о выпуклых телах. Хадвигер (Altes und Neues über konvexe Körper. Hadwiger H., Basel, Stuttgart, Birkhauser, 1955, 116 S., 13, 50 fr.), Schweiz. Buch., 1955, A 55, № 13, 327 (нем.)

См. также: 1860, 1944, 1949, 1990 1993, 2045, 2061, 2066, 2284, 2324, 2339

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

2460. О сходимости некоторых итерационных процессов. Салехов Г. С., Мертвецова М. А., Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1954, 5, 77—108

Дается обзор результатов о сходимости метода Ньютона и исследуется сходимость некоторых новых методов для решения нелинейных функциональных уравнений.

В гл. I приводятся результаты о сходимости метода Ньютона для численных и функциональных уравнений, принадлежащие О. Коши, А. Островскому, Д. А. Граве, Л. В. Канторовичу и другим авторам. В следующих трех главах подробно излагаются как опубликованные ранее, так и новые результаты авторов реферируемой работы. В гл. II доказывается теорема, которая дает достаточные условия сходимости метода касательных гипербол в применении к функциональному уравнению в пространстве Банаха, а также теорема о единственности решения этого уравнения. (Формулы для определения последовательных приближений по методу касательных гипербол см. в РЖМат, 1953, 338). Даны применения указанных теорем к численным уравнениям, к системам таких уравнений и к нелинейным интегральным уравнениям. В гл. III указано достаточное условие для того, чтобы последовательность функции $\{U_n\}$ — последовательных приближений при решении функционального уравнения — была последовательностью «верхних» («нижних») функций для решения рассматриваемого уравнения. В гл. IV рассматриваются квадратно-операторные уравнения, квадратно-функциональные уравнения и численные уравнения. Для всех названных видов уравнений указываются методы последовательных приближений и устанавливается их сходимость. Приведем соответствующую теорему для квадратно-операторного уравнения

$$Lx = HL^2x + x. \quad (1)$$

где H — некоторый линейный оператор, переводящий элементы пространства Банаха X в X, и L — искомый оператор. Последовательные приближения определяются формулами

$$L_{n+1}x = H_{n+1}L_{n+1}x + x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $H_{n+1} = HL_n$, $L_0 = 0$.

Теорема. Если $\|H\| = q \leqslant 1/4$, то в области $\|L\| < (1 - \sqrt{1-4q})/2q$ уравнение (1) имеет единственное решение L^*, которое является также линейным оператором. При этом $\|L^* - L_n\| < \delta^n/1 - \delta$ $(\delta = [1 - \sqrt{1-4q}]/[1 + \sqrt{1-4q}] < 1)$, если $q < 1/4$, и $\|L^* - L_n\| < 4[\pi/6 - \Sigma_{k=1}^{n+1} 1/k^2]$, если $q = 1/4$.

В работе имеются опечатки. Библ. 24 назв.

И. П. Мысовских

2461. Об одной интегральной форме приближенного решения уравнения. Коган Я. М., Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1954, № 2, 12—15

Рассматривается одна интегральная форма приближенного решения уравнения

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

предложенная автором ранее без оценки погрешности и доказательства сходимости процесса (Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1952, № 1, 30—35).

Предполагается, что $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и отличны от нуля на отрезке $[a, b]$, а числа a и b отделяют простой корень уравнения (1). За приближенное значение корня принимается абсцисса точки пересечения касательных в точках $A[a, f(a)]$ и $B[b, f(b)]$. Это приближение x_1 определяется в виде

$$x_1 = \int_a^b zf''(z)\,dz \Big/ \int_a^b f''(z)\,dz, \quad (2)$$

причем на основании указанной автором теоремы о среднем $a < x_1 < b$. Дается оценка $|x_1 - x| < (b - a) \times M_2/2m_2 = h_1$, где x — точный корень, M_2 и m_2 — соответственно наибольшее и наименьшее значения модуля $f''(x)$

в $[a, e]$. Полагая тогда $a = x_1 - h_1$, $b = x_1$ или $a = x_1$, $b = x_1 + h_1$, автор применяет формулу (2) вторично, и т. д. После n-кратного применения формулы (2) автор приходит к оценке $|x_n - x| < (b-a)(M_2/2m_2)^n = h_n$, откуда получается условие сходимости процесса:

$$M_2/m_2 < 2. \qquad (3)$$

При существовании и постоянстве знака $f'''(x)$ в $[a, b]$ автор показывает, что если $(b-a) < m_2/\max_{[a,b]}|f'''(x)|$, то выполнение условия (3) обеспечивается с первого этапа вычисления.

В заключение указывается, что формула (2) поддается различным истолкованиям, что дает возможность применить ее к решению некоторых задач, не имеющих прямого отношения к численному решению уравнений (например, x_1 является абсциссой центра масс системы материальных точек, непрерывно распределенных на отрезке $[a, b]$ оси OX, если масса каждой точки пропорциональна $f''(x)$). Д. Ф. Давиденко

2462. Об одном методе приближенного решения линейных интегральных и дифференциальных уравнений. Соколов (Про один метод наближеного розв'язання лінійних інтегральних та диференціальних рівнянь. Соколов Ю. Д.), Доповіді АН УРСР, 1955, № 2, 107—111 (укр.; резюме русс.)

Излагается новый метод решения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, z)\, y(z)\, dz,$$

где $|f(x)| \leqslant m$, $|K(x, z)| \leqslant M$, $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, а $K(x, z)$ в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant z \leqslant b$;

$$D = h - \int_a^b dx \int_a^b K(x, z)\, dz \neq 0 \quad (h = b - a > 0).$$

В качестве первого приближения берется функция

$$y_1(x) = f(x) + \alpha_1 \int_a^b K(x, z)\, dz,$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{h}\int_a^b y_1(x)\, dx = D^{-1}\int_a^b f(x)\, dx$, а n-е приближение пишется в виде

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^b K(x, z)\,[y_{n-1}(z) + \alpha_n]\, dz \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

где $\alpha_n = \frac{1}{h}\int_a^b \delta_n\, dx = D^{-1}\int_a^b dx \int_a^b K(x, z)\, \delta_{n-1}(z)\, dz -$

$$- \alpha_{n-1}\int_a^b dx \int_a^b K(x, z)\, dz \quad (\delta_n = y_n - y_{n-1},\ \delta_1 = y_1).$$

Доказана равномерная сходимость последовательных приближений $y_n(x)$ к решению уравнения $y(x)$ на сегменте $[a, b]$ при выполнении условия $(1 + h(1 + Mh)/|D|)\, Mh < 1$. Получена оценка погрешности n-го приближения. Проведенное на примерах сравнение предложенного метода с методом Пикара указывает на преимущество первого как по простоте вычислений, так и по точности приближений. Указано на возможность применения метода к приближенному вычислению собственных значений линейного однородного интегрального уравнения. К. В. Задирака

2463. Применение метода Монте Карло к решению некоторых интегральных уравнений. Пейдж (The Monte Carlo solution of some integral equations. Page E. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, № 3, 414—425 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$M(Z) = \alpha(Z) + \int_0^h K(Z, y)\, M(y)\, dy, \qquad (1)$$

где $\alpha(Z)$ и $K(Z, y)$ — известные непрерывные функции, причем ряд Неймана для решения этого уравнения сходится, и единица не является собственным значением ядра. Для решения этого уравнения предлагается рассматривать одномерное блуждание частицы со случайной длиной шага, имеющей плотность распределения $f(x)$ ($f(x) > 0$ при $x \in [-h, h]$), при поглощающих барьерах в точках с координатами вне интервала $(0, h)$. Последовательные положения блуждающей частицы за r шагов обозначаются через $\gamma_r = \{Z_0, \ldots, Z_r\}$, а число шагов до поглощения — через n. Вводятся обозначения:

$$V(\gamma_r) = \frac{K(Z_{r-1}, Z_x)}{f(Z_r - Z_{r-1})}\, V(\gamma_{r-1}) \quad (r \geqslant 1);\ V(\gamma_0) = 1,$$

$$S(Z) = \sum_{r=1}^{n} V(\gamma_{r-1})\, \alpha(Z_{r-1}),$$

$$c_r(Z) = \frac{V(\gamma_{n-r})\, \alpha(Z_{n-r})}{p_r(Z_{n-r})} \quad (r \leqslant n);\ c_r(Z) = 0 \quad (r > n),$$

где $p_r(x)$ — вероятность того, что частица, находящаяся в точке x, будет через r шагов поглощена. Устанавливается, что $E(S(Z)) = E(c_r(Z)) = M(Z)$ $(r \geqslant 1)$ так, что $M(Z)$ можно оценивать как математическое ожидание $S(Z)$ или $c_r(Z)$. Приводятся другие оценки, которые оказываются менее эффективными, чем $c_r(Z)$ (хотя эффективность оценки $c_r(Z)$ также невелика). Указываются некоторые условия, достаточные для существования моментов оценок $S(Z)$ и $c_r(Z)$, а также возможности уменьшения дисперсии $S(Z)$ при подходящим образом выбранной функции $f(x)$. Рассматривается числовой пример. В заключение отмечаются некоторые особенности метода Монте Карло в применении к рассматриваемой задаче, а также условия, когда его целесообразно предпочитать другим методам.

Опечатка: в левой части формулы (15) написано $d(Z)$ вместо $d_r^2(Z)$. Н. Н. Воробьев

2464. Решение интегрального уравнения Аккермана—Бирнбаума при помощи интерполяционной формулы. Еккель (Auswertung der Ackermann-Birnbaumschen Integralgleichung mit Hilfe einer Interpolationsformel. Jaeckel K.), Z. Flugwiss., 1955, 3, № 2, 46—48 (нем.; резюме англ., франц.)

Интерполяционная формула вида

$$Y(\varphi) = 2/n \sum_{\lambda=0}^{n} p_\lambda Y_\lambda \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu \cos\mu\varphi_\lambda \cos\mu\varphi, \qquad (1)$$

предложенная Мультхоппом (Multhopp H., Deutsche Luftfahrtforschung, 1938, 15, 153—169; см. также Техн. заметки ВВА им. Жуковского, 1947, № 24/6) для решения уравнения циркуляции Прандтля, применяется к решению интегрального уравнения Аккермана—Бирнбаума теории крыла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = V[y'(x) - \alpha] \qquad (2)$$

с искомой функцией $\gamma(\xi)$, после сведения его к уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(\vartheta) \ln\left|\frac{1 + \cos\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\varphi}\right| d\vartheta = y(\varphi).$$

Определение значений $g(\vartheta)$ сводится к вычислению выражений $G(\vartheta)$ по формуле

$$G(\vartheta) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi Y''(\varphi) \ln\left|\frac{\cos\varphi - \cos\vartheta}{1 + \cos\varphi}\right| d\varphi$$

с использованием интерполяционной формулы (1). Решение по разработанной автором вычислительной схеме с применением счетных машин с суммирующим устройством может иметь преимущества по сравнению с известными приемами решения уравнения (2) (Schmeid-

ler W., Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Bd. I. Akad. Verl.— Ges., Leipzig, 1950, S. 51). Дается оценка ошибки аппроксимации. Изложение иллюстрируется числовым примером.

К. Н. Юрчук

2465. Об устойчивости разностных уравнений. Филиппов А. Ф., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 6, 1045—1048

В области D с границей Γ рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu = f \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$l_i(u) = \varphi_i \text{ на } \Gamma_i,\ i = 1,2,\ldots,s,\ \bigcup \Gamma_i \subseteq \Gamma. \qquad (2)$$

В области D для любого h $(0 < h < h_0)$ определяется сетка D_h, на которой задается разностное уравнение

$$R_h u_h = f \qquad (3)$$

с граничными условиями

$$r_{hi}(u_h) = [\varphi_i]_h,\ i = 1,2,\ldots,s, \qquad (4)$$

где $[\ ]_h$ — оператор, с помощью которого из граничных условий дифференциального уравнения получаются граничные условия разностного уравнения.

Для функций u, f и φ_i определены нормы $\|u\|_A$, $\|f\|_B$, $\|\varphi_i\|_{Ci}$, причем для $h \to 0$, $\|u\|_{Ah} \to \|u\|_A$, $\|f\|_{Bh} \to \|f\|_B$, $\|[\varphi_i]_h\|_{Chi} \to \|\varphi_i\|_{Ci}$, где $\|u\|_{Ah}$, $\|f\|_{Bh}$, $\|[\varphi_i]_h\|_{Chi}$ — нормы для u_h, f, $[\varphi_i]_h$. Уравнение (3) и граничные условия (4) аппроксимируют уравнение (1) и граничные условия (2) на классе функций K, если для любого $u \in K$ $\|Lu - R_h u\|_{Bh} \leqslant \beta(h) M$, $\|[l_i(u)]_h - r_{hi}(u)\|_{Chi} \leqslant \gamma(h) M_i$, $\beta(h) \to 0$, $\gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$, M и M_i зависят только от u, но не от h.

Разностное уравнение (3) с граничными условиями (4) называется устойчивым, если при достаточно малом h существует решение (3), (4) и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ (не зависящее от h), что для данного u_h, удовлетворяющего (3) и (4), и любого такого $\tilde{u}_h$, что

$$\|R_h u_h - R_h \tilde{u}_h\|_{Bh} < \delta,\ \|r_{hi}(u_h) - r_{hi}(\tilde{u}_h)\|_{Chi} < \delta;$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s)$$

при любом $h\,(0 < h < h_0)$ выполняется неравенство $\|u_h - \tilde{u}_h\|_{Ah} < \varepsilon$. Если уравнение (3), (4) линейно, то оно устойчиво, если его решение существует при любых f, φ_i и $h < h_0$, причем

$$\|u_h\|_{Ah} \leqslant N\left(\|f\|_{Bh} + \sum_{i=1}^{s} \|[\varphi_i]_h\|_{Chi}\right),$$

где N не зависит от f, φ_i и h.

Теорема. Если 1) решение дифференциального уравнения (1), (2) существует и принадлежит K; 2) разностное уравнение (3), (4) аппроксимирует (1), (2) на классе K; 3) уравнение (3) с граничными условиями (4) устойчиво, — то А) $\|u - u_h\|_{Ah} \to 0$ при $h \to 0$; Б) решение дифференциального уравнения (1), (2) в классе K единственно и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что если $u \in K$, $\tilde{u} \in K$

$$\|Lu - L\tilde{u}\|_B < \eta,\ \|l_i(u) - l_i(\tilde{u})\|_{Ci} < \eta \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

то $\|u - \tilde{u}\|_A < \varepsilon$, при этом предполагается, что

$$\|[\varphi_i]_h - [\tilde{\varphi}_i]_h\|_{Chi} \leqslant \|[\varphi_i - \tilde{\varphi}_i]_h\|_{Chi} \cdot \text{const};$$

В) если уравнения (1), (3) и граничные условия (2), (4) линейны, то

$$\|u - u_h\|_{Ah} \leqslant (\beta(h) M + \gamma(h) \cdot \sum_{i=1}^{s} M_i) N$$

и для $u \in K$

$$\|u\|_A \leqslant \left(\|f\|_B + \sum_{i=1}^{s} \|\varphi_i\|_{Ci}\right) N.$$

Л. И. Камынин

2466. О разностных операторах с постоянными коэффициентами. Бачелис Р. Д., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, 69—80

Рассматриваются разностные уравнения вида

$$Lf(y_1, \ldots, y_k) = \begin{cases} 0, \text{ если } y_1^2 + \ldots + y_k^2 > 0, \\ 1, \text{ если } y_1^2 + \ldots + y_k^2 = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где

$$Lf(y_1, \ldots, y_k) =$$

$$= \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} f(y_1 - r_1; \ldots; y_k - r_k),$$

$\alpha_{r_1 \ldots r_k}$ — постоянные, а y_s и r_s — целые числа. Для таких уравнений строятся решения, имеющие порядок роста на бесконечности не выше многочлена от координат узлов. Если функция

$$P(e^{iu_1}, \ldots, e^{iu_k}) =$$

$$= \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} e^{ir_1 u_1} \cdots e^{ir_k u_k}$$

не обращается в нуль при $0 \leqslant u_1, \ldots, u_k \leqslant 2\pi$, то искомое решение берется в виде:

$$\Phi(y_1, \ldots, y_k) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i(u_1 y_1 + \ldots + u_k y_k)}}{P(e^{iu_1}, \ldots, e^{iu_k})} du_1 \cdots du_k, \qquad (3)$$

в противном случае выражение (3) приходится «подправлять».

Работа примыкает, как отмечает сам автор, к работам Штёра (Stöhr A., Math. Nachr., Berlin, 1950, № 4, 208—242; № 5, 295—315; № 6, 330—357). Автор не дает для своих операторов ответа на вопрос, будут ли найденные им решения иметь наименьший порядок роста на бесконечности. Существенным ограничением является требование неотрицательности r_s в выражении для L.

О. А. Ладыженская

2467. Об одном способе повышения асимптотической точности метода сеток. Королюк В. С., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 6, 985—987

Утверждается, что если граница Γ и функции f и φ удовлетворяют определенным условиям гладкости, то решение задачи Дирихле $\Delta u = \varphi$; $u|_\Gamma = f$ представимо в виде следующего асимптотического ряда:

$$u = u_0 + h^2 u_1 + \ldots + h^{2q-2} u_{q-1} + O(h^{2q}),$$

где функции $u_0, u_1, \ldots, u_{q-1}$ являются решением системы разностных уравнений

$$h^{-2} \cdot \Delta_h u_0 = \varphi, \quad \delta_h u_0 = f;$$

$$h^{-2} \Delta_h u_1 = L_1(u_0) = 0, \quad \delta_h u_1 = \delta_1(u_0);$$

$$h^{-2} \Delta_h u_{q-1} + L_1(u_{q-2}) + \ldots + L_{q-1}(u_0) = 0,$$

$$\delta_h u_{q-1} = \delta_1(u_{q-2}) \ldots + + \delta_{q-1}(u_0).$$

Здесь h — шаг сетки; $h^{-2}\Delta_h$ и $L_k\,(k=1,2,\ldots,q-1)$ — разностные операторы, приближающие с точностью до величин порядка h^2 соответствующие дифференциальные операторы в разложении

$$\Delta u = h^{-2}\cdot\Delta_h u + h^2 L_1(u) + \ldots + h^{2q-2}L_{q-1}(u) + O(h^{2q})$$

и

$$\delta_h u = f + h^2\delta_1(u) + \ldots + h^{2q-2}\delta_{q-1}(u) + O(h^{2q})$$

(δ_h — линейная интерполяция граничных значений по Коллатцу). В. К. Саульев

2468. Итерационные процессы для разностной задачи Дирихле. Райли (Iteration procedures for the Dirichlet difference problem. Riley James D.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 47, 125—131 (англ.)

Подробно разбирается для разностной задачи Дирихле метод Ричардсона второго порядка и экстраполяционный метод Либмана, рассмотренные в статье Франкеля (Frankel S. P., Math. Tables and Other. Aids Comput., 1950, 4, 65—75), и устраняются недостатки метода Ричардсона второго порядка, отмеченные Франкелем. Путем устранения ошибки в статье Франкеля устанавливается, что быстрота сходимости этих методов одного порядка. Приводя формулу метода Ричардсона второго порядка к виду, удобному для итерации, автор устанавливает, что оба метода, упомянутые выше, требуют одинакового числа операций и равного объема памяти машины. В результате автор приходит к выводу, что время, необходимое для вычисления значений с заданной степенью точности по методу Ричардсона второго порядка и по экстраполяционному методу Либмана, одинаково. Оба метода являются частными случаями метода последовательной верхней релаксации, разработанного Янгом (РЖМат, 1955, 1953). О. А. Федорова

2469. О численном решении дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. I. Бюргерхаут (On the numerical solution of partial differential equations of the elliptic type. I. Burgerhout Th. J.), Appl. Scient. Res., 1954, **B4**, № 3, 161—172 (англ.)

Краевая задача $d^2y/dx^2 + py + \varphi(x) = 0$; $y(x_0) = y_0$; $y(x_{n+1}) = y_{n+1}$ заменяется системой алгебраических уравнений

$$y_{i+1} + ay_i + y_{i-1} + (\Delta x)^2\varphi(x_i) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad (1)$$

где $a = p(\Delta x)^2 - 2$.

Автор исследует специальный класс квадратных матриц n-го порядка, называемых автором цепными, элементы которых удовлетворяют соотношению $a_{i,\,j-1} + a_{i,\,j+1} = a_{i-1,\,j} + a_{i+1,\,j}$, где элементы с индексом 0 или $n+1$ должны быть заменены нулями. Цепные матрицы вполне определяются элементами первой строки, симметричны и образуют поле (например, обратная цепной матрице матрица есть цепная). Матрица A_n системы (1) является цепной и имеют место равенства:

$$A_n^{-1} = \frac{1}{|A_n|}\{+|A_{n-1}|, -|A_{n-2}|, \cdots$$

и

$$\cdots, (-1)^{j+1}|A_{n-j}|, \cdots, (-1)^{n+1}|A_0|\}$$

$$|A_i| = a|A_{i-1}| - |A_{i-2}|,$$

где $|A_k|$ — определитель цепной матрицы порядка k задачи (1). Указанный прием обращения цепных матриц — матриц системы разностных уравнений — применен для решения задачи Дирихле для двумерного уравнения $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 + pz + \varphi(x, y) = 0$, в случае квадратной области. При этом матрица A_{nn} системы разностных уравнений

$$(-4 + ph^2)z_{ij} + z_{i+1,\,j} + z_{i-1,\,j} + z_{i,\,j+1} + z_{i,\,j-1} + h^2\varphi(x_i, y_i) = 0$$

n^2-го порядка, если ее разбить на квадратные клетки n-го порядка и каждую клетку рассматривать как элемент новой матрицы n-го порядка, является цепной и символически имеют смысл равенства

$$\|A_k^n\| = A_n\|A_{k-1}^n\| - \|A_{k-2}^n\|$$

и

$$A_{nn}^{-1} = \frac{1}{\|A_n^n\|}\{\|A_{n-1}^n\|, \ldots,$$

$$\ldots, (-1)^{j+1}\|A_{n-j}^n\|, \ldots, (-1)^{n+1}\|A_0^n\|\},$$

где матрица $A_{nn}(\|A_k^n\|)$ совпадает с $A_n(|A_k|)$, если в последней числа a, 1 и 0 заменить на A_n, единичную и нулевую матрицы. Так как матрица A_{nn}^{-1} цепная, она может быть легко построена по первой строке, для чего достаточно решить систему n линейных уравнений. В работе приведен пример; рассмотрен случай более общих, чем квадрат, областей. Устанавливается связь обращения матрицы системы разностных уравнений с релаксацией. В. К. Саульев

2470. Ортогональный метод для решения полуоднородных краевых задач с частными производными. Эдман (Die Orthogonalmethode zur Lösung von halbhomogenen partiellen Randwertaufgaben. Ödman Sven T. A.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 8/9, 301—302 (нем.)

Для полуоднородной линейной граничной задачи $2m$-го порядка $L(w) = f(x, y)$; $U_i(w) = 0$; $i = 1, \ldots, 4m$, ищется приближенное, по возможности более точно удовлетворяющее данным краевым условиям, решение в виде $\psi \equiv c\cdot u(x; \lambda)\cdot v(y; \mu)$, где неопределенные параметры c, λ и μ находятся из следующих условий ортогональности:

$$\iint [L(\psi) - f]\,uv\,dx\,dy = 0; \int [L(\psi) - f]\,u\,dx = 0;$$

$$\int [L(\psi) - f]\,v\,dy = 0.$$

Эти условия автор получает из соображений минимума интегралов от произведений невязок для данного и двух вспомогательных (обыкновенных дифференциальных) уравнений. Метод сравнивается с методом Ритца. Примеров не имеется. В. К. Саульев

2471. К численному решению дифференциальных уравнений. Виттинг (Zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen. Witting Hermann), Phys. Bl., 1955, **11**, № 1, 6—14 (нем.)

Излагается ряд известных вопросов, относящихся к численному решению обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Указывается на различие в подходе к решению начальных и краевых задач. Разбираются причины возникновения неустойчивости. Приведены примеры устойчивых и неустойчивых схем для решения волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Отмечается то новое, что внесло в оценку трудности задач применение машин с программным управлением. Л. М. Голубева

2472. Устойчивое численное решение задачи о нестационарном тепловом потоке. Лепперт (A stable numerical solution for transient heat flow. Leppert George), J. Amer. Soc. Naval Engrs, 1953, 65, № 4, 741—752 (англ.)

Численное решение методом сеток одномерного уравнения теплопроводности $\partial T/\partial t = a^2\partial^2 T/\partial x^2$ осуществляется путем приближенной замены его уравнениями в конечных разностях

$$\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta t}=a^2\frac{T_{m+1,n}-2T_{m,n}+T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (1)$$

или

$$\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta t}=a^2\frac{T_{m+1,n+1}-2T_{m,n+1}+T_{m-1,n+1}}{(\Delta x)^2}, \quad (2)$$

где первые индексы служат для нумерации значений пространственной координаты, а вторые — для фиксации моментов времени.

Уравнения (1) более удобны для решения, но устойчивы в отношении ошибок округления лишь при $M=(\Delta x)^2/a^2\Delta t\geqslant 2$. Уравнения (2) решать труднее, но они устойчивы в указанном выше смысле при любых M, что дает возможность пользоваться сравнительно большими Δt. Кроме того, (2) вообще дают более точные результаты. Последний вывод автор основывает на сопоставлении результатов численного и точного решений, относящихся к одному простому случаю. С. Г. Кислицын

2473. Роль симметрии в конечноразностных аппроксимациях. Фаулер (Symmetry as a factor in finite difference approximations. Fowler C. M.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 3, 293—294 (англ.)

Автор отмечает, что требование симметричности решения конечноразностных аппроксимаций дифференциальных уравнений может играть существенную роль в вопросах сходимости этих решений во времени. Для этого приводится пример применительно к решению разностной аппроксимации одномерного уравнения диффузии с постоянными параметрами: $T_{x,t}=[T_{x+1,t-1}+(M-2)T_{x,t-1}+T_{x-1,t-1}]/M$, где «модуль» M определяется из соотношения $\Delta t=(\Delta x)^2/M\alpha$. При малых значениях M решение этого уравнения расходится во времени, так что возникает вопрос о минимуме модуля M. Известно, что этот минимум зависит от граничных условий и от принятого числа l приращений Δx (Dusinberre G. M., Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1945, 67, 703—709; Fowler C. M., Quart. Appl. Math., 1946, 3, № 4, 361—376; Van Arsdel W. B., Report, No. ED-6-12-19, Western Regional Research Laboratory, 1948). Прием, выясняющий возможность понизить минимум модуля M в связи с требованием симметрии решения, заключается в следующем. При граничных условиях $T_{0,t}=T_{l,t}=0$ и начальном условии $T_{x,0}=F(x)=F(l-x)$ решение уравнения будет

$$T_{x,t}=\sum_{n=0}^{l}A_n(1-4/M\sin^2 n\pi/2l)\sin n\pi x/l,$$

где $A_n=2/l\sum_{x=0}^{l}F(x)\sin n\pi x/l$, так что для сходимости во времени нужно, чтобы $M\geqslant 2\sin^2 n\pi/2l$ при всех n, т. е. $M\geqslant 2$. Если, однако, потребовать, чтобы решение было симметричным (в связи с чем все четные A_n будут равны 0), то для сходимости решения нужно, чтобы $M\geqslant 2\cos^2\pi/2l$ (l четное) и $M\geqslant 2$ (l нечетное), так что модуль M может быть понижен.

А. П. Шварцман

2474. Неявные и явные рекуррентные формулы для линейного уравнения диффузии. Крандалл (Implicit vs explicit recurrence formulas for the linear diffusion equation. Crandall Stephen H.) J Assoc Comput. Machinery, 1955, 2, № 1, 42—49 (англ.)

Автор исследует различные разностные аппроксимации уравнения $\partial^2\psi/\partial x^2=\partial\psi/\partial t$; $0\leqslant x\leqslant 1$; $t>0$ с начальными и граничными условиями $\psi(x,0)=\partial\psi(1,t)/\partial x=0$, $\psi(0,t)$ — заданная функция. Общий вид этих аппроксимаций таков:

$$\psi_{j,k+1}-r\theta(\psi_{j-1,k+1}-2\psi_{j,k+1}+\psi_{j+1,k+1})=\psi_{j,k}+r(1-\theta)(\psi_{j-1,k}-2\psi_{j,k}+\psi_{j+1,k}),$$

где

$$r=\Delta t/(\Delta x)^2,\ \Delta x=h=1/M,\ \psi(j\Delta x,k\Delta t)=\psi_{j,k}.$$

При $\theta=0$ имеем наипростейшую (явную), хорошо известную формулу; при $\theta=1/2$ и $\theta=1$ имеем неявные рекуррентные формулы аппроксимации, требующие решения системы M линейных алгебраических уравнений на каждом слое. Эти рекуррентные формулы изучаются посредством сравнения их общих решений с общим решением исходной дифференциальной проблемы; при этом, если взять значение $r=r_f$ в рекуррентной формуле немного отличным от значения r, равного $\Delta t/(\Delta x)^2$, то, как показывает автор, можно получить более точные аппроксимации. Именно, r в аппроксимационной формуле выбирается так, чтобы экспоненциальные множители $\exp[-\pi^2((2n-1)/2)^2 r/M^2]$ для $n=1$ и $n=2$, т. е. для первых двух собственных значений, в общем решении данной задачи точно совпадали с соответствующими множителями $1-4r_f\sin^2((2n-1)/4\cdot\pi/M)$ в общем решении дискретной аппроксимирующей задачи В. К. Саульев

2475. Вычислительная устойчивость численного решения уравнения вихря в зависимости от краевых условий. Платцман (The computational stability of boundary conditions in numerical integration of the vorticity equation. Platzman G. W.), Arch. Meteorol., Geophys. und Bioklimatol., 1954, A7, 29—40 (англ.; резюме нем., франц.)

Уравнение вихря для среднего уровня атмосферы в квазигеострофическом приближении подвергается линеаризации относительного основного состояния — однородного потока, направленного вдоль оси Ox. В результате получается уравнение

$$\partial\zeta/\partial t=-U\partial\zeta/\partial x \quad (-A\leqslant x\leqslant A), \quad (1)$$

в котором ζ — возмущение вихря, наложенное на однородный поток; U — скорость потока. Изменение параметра Кориолиса с широтой не учитывается. Изучается вычислительная устойчивость решения (1) методом конечных разностей в зависимости от соотношения интервалов по x и t, а также от характера краевых условий.

Представляя (1) в конечных разностях, автор использует центрированные разности по времени, вследствие чего получается уравнение второго порядка. Зависимость решений последнего от времени будет типа $e^{\nu\tau}$, $e^{-\nu\tau}$ ($\tau=-ut/\Delta x$), где Δx — разностный интервал по x.

Определены частоты решений ν для следующих трех типов краевых условий, заданных на конце A отрезка, где поток уходит за пределы последнего: 1) ζ_A — заданная функция времени; 2) $\zeta_A=\zeta_1$, где ζ_1 — значение ζ в ближайшей к A точке сетки; 3) $\zeta_A=2\zeta_1-\zeta_2$, случай линейной экстраполяции извутри по двум точкам ζ_1 и ζ_2. На другом конце отрезка во всех трех случаях ζ_B есть заданная функция времени.

Как показывает исследование соответствующих уравнений в матричной форме, для всех указанных случаев необходимым условием устойчивости решения является следующее соотношение разностных интервалов:

$$|\Delta\tau|=\left|\frac{U}{\Delta x}\Delta t\right|\leqslant 1. \quad (2)$$

Помимо соотношения (2), устойчивость решения определяется еще и характером краевых условий. Так, при первом из трех указанных выше случаев характеристические корни ν чисто мнимые, и решение устойчиво. В остальных случаях действительные части кор-

ней отрицательны, так что появляется неустойчивость, связанная с наличием решений типа $e^{-\nu\tau}$. Степень неустойчивости в третьем случае выше, чем во втором. Так, при $|\Delta\tau|<1$ и при 20 точках деления отрезка AB во втором случае достаточно 10 шагов по времени для того, чтобы удвоилась амплитуда решения, соответствующего корню ν с наибольшей действительной частью. В третьем случае для удвоения амплитуды достаточно 5 итераций. С увеличением числа точек деления неустойчивость уменьшается. Если $\Delta\tau$ превышают единицу, то наиболее неустойчивое решение удваивается уже при одном шаге по времени.

С. Л. Белоусов

2476. Применение метода сеток в гидромеханике. Мак-Наун, Сюй Ень-юнь, И Цзя-шунь (Applications of the relaxation technique in fluid mechanics. McNown John S., Hsu En-Yun, Yih Chia-Shun), Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1953, **79**, № 223, 1—24 (англ.)

Указывается, что метод сеток в настоящее время находит широкое применение для решения многих задач математической физики, позволяет решать задачи с разнообразными сложными краевыми условиями и при наличии различных особенностей в решении.

Приводятся простейшие разностные аппроксимации оператора Лапласа на квадратной сетке для двумерного случая и для трехмерных задач с осевой симметрией в обычных узлах сетки и в некоторых неправильных (приграничных) узлах сетки, а также две разностные аппроксимации первых производных на границе области.

Дается целый ряд полезных практических выводов и советов, в частности о применении замены переменных для получения правильной «сеточной» области решения, о выборе и измельчении шага сетки в различных частях области, о процессе вычислений при решении разностных уравнений, использовании симметрии и др. Для решения задач с так называемыми свободными поверхностями, например при истечении жидкости через насадки и движении жидкости в пористой среде, рекомендуется применять метод последовательных приближений на сетке. При этом первоначальная форма свободной поверхности выбирается из каких-либо косвенных соображений.

В заключение дается краткое описание ряда задач, решенных методом сеток, в частности задачи об истечении жидкости из резервуара через двумерный насадок (щель), обтекания жидкостью тела с осевой симметрией, задачи о стоке тяжелой жидкости, задачи об ударе плоской струи о бесконечную пластину (симметричный случай), исследования кавитации при обтекании жидкостью тела и некоторые задачи теории фильтрации. Указывается, что приближенные решения этих задач, полученные методом сеток, хорошо согласуются с некоторыми решениями, полученными другими способами, и с экспериментальными данными. Библ. 9 назв.

Е. А. Волков

2477. Проблемы, связанные с ромбом. II. Пластическое кручение. Сундара-Раджа-Ийенгар, Лакшмана-Рао (Problems connected with the rhombus. II. Plastic torsion. Sundara Raja Iyengar K. T., Lakshmana Rao S. K.), J. Indian Inst. Sci., 1955, **37**, № 2, B113—B120 (англ.)

Исходя из решения задачи упругого кручения стержня с поперечным сечением в виде ромба с углом 60° (РЖМат, 1955, 5847) и пользуясь обычной гипотезой теории пластичности Мизеса — Генки, авторы проводят численное решение задачи пластического кручения для указанного стержня.

Я. С. Уфлянд

2478. Об одном видоизменении метода Чаплыгина для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Артемов Г. А., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 2, 197—200

Для системы $x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $x_i|_{t_0} = x_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ в предположении, что:

1) f_i непрерывны по t и имеют непрерывные 2-е производные по x_k $(i, k = 1, \ldots, n)$;

2) $\partial f_i / \partial x_k > 0$ $(i, k = 1, \ldots, n)$;

3) $\sum_{k, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} x_k x_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ отрицательно определены;

4) $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \geqslant 0$ $(i, j, k = 1, \ldots, n;\ j \neq k)$

предлагается метод построения последовательности верхних и нижних функций $\{\bar{x}_k\}$ $\{\underline{x}_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (здесь, как и в дальнейшем, используются векторные обозначения). При этом нулевые приближения $\bar{x}_0$, $\underline{x}_0$ должны удовлетворять неравенствам $\bar{x}_0' - f(t, \bar{x}_0) > 0$, $\underline{x}_0' - f(t, \underline{x}_0) < 0$.

Видоизменяя метод хорд Чаплыгина, автор строит следующую нижнюю функцию по формуле:

$$\underline{x}_1 = x_0 - \int_{t_0}^{t} \left[E + \int_{\tau}^{t} \Phi(z)\, dz \right] \underline{\varphi}_0(\tau)\, d\tau,$$

где

$$\Phi(t) = \left\| \frac{f_i(t, \underline{x}_1^{(0)}, \ldots, \underline{x}_{k-1}^{(0)}, \bar{x}_k^{(0)}, \underline{x}_{k+1}^{(0)}, \ldots, \underline{x}_n^{(0)})}{\bar{x}_k^{(0)} - \underline{x}_k^{(0)}} - \frac{f_i(t, \underline{x}_1^{(0)}, \ldots, \underline{x}_n^{(0)})}{\bar{x}_k^{(0)} - \underline{x}_k^{(0)}} \right\|,$$

$$\underline{\varphi}_0(t) = \underline{x}_0' - f(t, \underline{x}_0) \text{ и } x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Используя метод касательных, подобным же образом автор строит верхние приближения. Указана оценка быстроты сходимости процесса.

В отличие от известных уже подобных методов (Герфанд А. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1938, № 5—6, 583) процесс автора может быть эффективно применен, например, для систем с полиноминальной правой частью, так как на всех стадиях процесса получаются берущиеся интегралы (при условии, что нулевые приближения — полиномы). Отметим, что в условии 2) достаточно ограничиться случаем $i \neq k$ (Герфанд А. В., К вопросу о приближенном интегрировании системы дифференциальных уравнений, Минск, 1941).

В. А. Чечик

2479. Заметка о численном интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка. Фокс (A note on the numerical integration of first-order differential equations. Fox L.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, **7**, № 3, 367—378 (англ.)

Рекомендуется следующий метод численного интегрирования дифференциального уравнения

$$y' + f(x, y) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1}$$

с начальным условием $y(0) = y_0$. Дифференциальному уравнению (1) ставится в соответствие система уравнений

$$y_{r+1} - \frac{h^2}{12}\left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{r+1} + y_{r-1} - \frac{h^2}{12}\left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{r-1} - 2y_r - \frac{5h^2}{16}\left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right)_r + \frac{h^2}{12}\left[10\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_r + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{r+1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{r-1}\right] = 0,$$
$$r = 0, 1, \ldots, n \tag{2}$$

$((F)_r = F(x_r, y_r)$, $x_r = rh$, $h = l/n)$, представляющая собой конечноразностный аналог дифференциального уравнения $y'' - f\,\partial f/\partial y + \partial f/\partial x = 0$, получаемог 20 из 1) дифференцированием и исключением y'. Рациональность повышения порядка уравнения (1) при численном его интегрировании отмечалась уже Алленом и Северном (Allen G., Severn R. T., Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, 4, 199—208).

Система уравнений (2) с неизвестными $y_{-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ дополняется уравнением

$$y_{r+1} - y_{r-1} + \frac{h}{3}[4(f)_r + (f)_{r-1} + (f)_{r+1}] = 0, \quad (3)$$

где можно положить $r = 0$, либо $r = n$. В первом случае метод именуется «рекуррентным», во втором случае — «релаксационным». Разностное уравнение (3) представляет собой конечноразностный аналог дифференциального уравнения (1). Указано, что релаксационный метод, несмотря на относительную сложность расчета, может оказаться рациональнее рекуррентного. Приведен пример уравнения $y' - 12y + 11e^x = 0$, $y(0) = 1$, для которого релаксационный метод при том же шаге приводит к гораздо лучшим результатам, чем рекуррентный. И. М. Рапопорт

2480. **Обобщение метода Рунге-Кутта интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.** **Ионеску** (O generalizare a unei proprietăţi care intervine în metoda lui Runge-Kutta pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale. Ionescu D. V.), Bull. ştiinţ. Acad. R. P. Române, Sec. mat. şi fiz., 1954, 6, № 2, 229—241 (рум.; резюме русс., франц.)

Дается способ построения формул, обобщающих метод Рунге-Кутта с помощью квадратурных формул. Если известна квадратурная формула

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x + \lambda_i h) + O(h^{p+2})$$

и формула типа Рунге — Кутта, позволяющая вычислить приращение $y(x+h) - y(x)$ решения дифференциального уравнения $y' = \varphi(x, y)$ с погрешностью порядка $O(h^{p+1})$, то, применяя эту формулу для вычисления $k_i = y(x + \lambda_i h) - y(x)$, получают формулу типа Рунге — Кутта более высокого порядка точности

$$y(x+h) - y(x) = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x + \lambda_i h, y + k_i) + O(h^{p+2}).$$

Приведены примеры для $p = 1, 2, 3, 4$.

Примечание референта. Второй пример для $p = 4$ неверен, так как применяемая квадратурная формула имеет порядок точности меньший, чем предполагает автор. К. А. Семендяев

2481. **Метод приближенного численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, применяемый в практике технических расчетов.** **Розенберг В. М.**, Тр. Ленингр. воен.-механ. ин-та, 1954, № 1, 5—14

Предлагается следующая схема численного интегрирования дифференциального уравнения $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. По приближенным значениям $y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n)}$ функции y и ее производных в точке $x = x_i$ вычисляются сперва грубые приближения $\bar{y}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}', \ldots, \bar{y}_{i+1}^{(n-1)}$ для функции y и ее производных в точке $x = x_{i+1} = x_i + h_i$ по формулам

$$\bar{y}_{i+1}^{(k)} = y_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{n-k} (h_i^j/j!) y_i^{(k+j)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Далее вычисляется величина

$$\xi_i = \frac{F(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}', \ldots, \bar{y}_{i+1}^{(n-1)}) - \bar{y}_i^{(n)}}{1 - \sum_{m=1}^n (h_i^m/(m+1)!)\, F_m(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}', \ldots, \bar{y}_{i+1}^{(n-1)})}$$

$(F_m = \partial F/\partial y^{(n-m)})$ и в качестве приближенных значений $y_{i+1}, y_{i+1}', \ldots, y_{i+1}^{(n)}$ функции y и ее производных в точке $x = x_{i+1}$ принимаются для дальнейшего расчета значения

$$y_{i+1}^{(k)} = \bar{y}_{i+1}^{(k)} + \frac{h_i^{n-k}}{(n-k+1)!}\xi_i, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad y_{i+1}^{(n)} = y_i^{(n)} + \xi_i.$$

И. М. Рапопорт

2482. **Способ оценки погрешности в методе Ритца.** **Татаркевич** (Une méthode d'estimation de l'erreur dans le procédé de Ritz. Tatarkiewicz K.), Ann. polon. math., 1955, 1, № 2, 346—359 (франц.).

Даются оценки погрешности приближенного решения, полученного методом Ритца, для краевой задачи (1), (2):

$$L(y) \equiv -\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy = f, \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (2)$$

При условиях $q(x) \geqslant 0$, $p(x) \geqslant \bar{p} > 0$ получена оценка

$$\max_{x\in[0,1]} |y - y_n| \leqslant \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \frac{dx}{p}\right)\int_0^1 |L(y_n) - f|\,dx,$$

где y — точное решение задачи (1), (2), а y_n — n-е приближение по Ритцу. При дополнительном предположении, что $q(x) \geqslant \bar{q} > 0$ получена следующая оценка:

$$\max_{x\in[0,1]} |y - y_n| \leqslant 2^{-1}\,\mathrm{th}\,(2^{-1}\sqrt{\bar{q}/p}) \times (\bar{p}\cdot\bar{q})^{-1/2}\int_0^1 |L(y_n) - f|\,dx.$$

В. П. Ильин

2483. **Краткое описание методов релаксации.** **Мюнье** (Exposé sommaire des méthodes de rélaxation. Munier François), Ingénieur (Montreal), 1955, 41, № 161, 33—36 (франц.)

Дается краткое описание основ метода релаксации. Новых результатов нет. Второе правило (стр. 35) сформулировано неправильно. К. Е. Чернин

2484. **О возмущении характеристических колебаний диссипативными силами.** **У** (On the perturbation of characteristic vibrations by dissipative forces. Wu T. T.), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 175—181 (англ.)

Рассматриваются малые колебания системы при наличии малых диссипативных сил. При этом предполагается, что кинетическая энергия T, потенциальная энергия V и диссипативная функция F суть квадратичные формы с симметрической матрицей и, кроме того, T — положительно определенная, а V — положительная формы.

После одновременного приведения матриц форм T и V к диагональному виду уравнения малых колебаний записываются так:

$$\ddot{y}_k + \lambda_k^2 y_k + \varepsilon\sum_{r=1}^n a_{kr} y = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

(здесь норма $\|a_{kr}\|$ оператора в R_n берется равной 1 за счет ε). Назовем n-м решением $\{y_k\}$ собственную

функцию, близкую к собственной функции $y_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, (n-1))$ и $y_n = e^{i\lambda_n t}$ невозмущенного движения (при $\varepsilon = 0$). Автор ставит задачей получение n-го решения последовательными приближениями и оценку близости возмущенной и невозмущенной собственных функций.

Если искать собственную функцию в виде $y_k = \zeta_k e^{pt}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, пронормировав ее условием $\zeta_n = 1$, то для определения ζ_k $(k = 1, 2 \ldots (n-1))$ и p получается система

$$(p^2 + \lambda_k^2)\zeta_k + \varepsilon \cdot p \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Последующие приближения вычисляются из рекуррентной формулы

$$\zeta_k^{(m+1)} = \zeta_k^{(m)} - \frac{[(p^{(m)})^2 + \lambda_n^2]\zeta_k^{(m)} + p^{(m)}\varepsilon \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_j^{(m)}}{\lambda_k^2 - \lambda_n^2},$$

$$p^{(m+1)} = p^{(m)} - \frac{[(p^{(m)})^2 + \lambda_n^2] + p^{(m)}\varepsilon \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_j^{(m)}}{2i\lambda_n},$$

напоминающей формулу, служащую для вычисления последующих приближений в модифицированном методе Ньютона.

Далее устанавливаются условия, при которых последовательности $\zeta_k^{(m)}$ и $p^{(m)}$ сходятся. Если найдется тройка чисел $\varepsilon > 0$, $0 \leqslant k < 1$, $r = \min(1, \lambda_n)$ таких, что

$$\frac{E\varepsilon}{1-k} \leqslant r \leqslant \frac{B'\varepsilon + \sqrt{B'^2\varepsilon^2 + 4A'C'\varepsilon^2 + 4A'k^2D^2}}{2A'}, \quad (1)$$

то последовательность m-х приближений сходится так, что последующие приближения остаются в «круге» радиуса r, т. е.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}(\zeta_k^{(m)} - \zeta_k^{(0)})^2 + (p^{(m)} - p^{(0)})^2} < r$$

(оценка близости возмущенного и невозмущенного движений), а скорость сходимости задается формулой

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}(\zeta_k^{(m)} - \zeta_k)^2 + (p^{(m)} - p)^2} \leqslant rk^{(n)},$$

где ζ_k и p — предельные значения последовательностей $\zeta_k^{(m)}$ и $p^{(m)}$. В неравенстве (1) использованы следующие обозначения

$$E = \left[\left(\frac{a_{nn}}{2}\right)^2 + \sum_{i \neq n}\left[\frac{\lambda_n a_{ni}}{\lambda_n^2 - \lambda_i^2}\right]^2\right]^{1/2},$$

$$B' = 12|\lambda_n|^2 + 4|a_{nn}| + 10|\lambda_n| \sum_k |a_{kn}| + 8|\lambda_n| \max \sum_k |a_{ki}|$$

$$A' = 9n|\lambda_n|^2 + 4,$$

$$C' = 4|\lambda_n|^2 \sum_{ki} |a_{ki}|^2 + \sum_k \left(\sqrt{\sum_i |a_{ki}|^2} + a_{kn}\right)^2,$$

$$D = \min[2\lambda_n, \lambda_r^2 - \lambda_n^2] \quad (n \neq r).$$

С помощью неравенства (1), если ε не фиксировано, можно найти гарантированную область значений ε, для которых последовательности $\zeta_k^{(m)}$ и $p^{(m)}$ сходятся. При конкретном ε можно подобрать k так, чтобы оценка скорости сходимости была бы по возможности лучшей.

Имеются недоказанные утверждения о том, что полученная оценка является точной и что с небольшими изменениями описанный процесс можно применить к несимметричным матрицам.

Примечание референта. Полученные оценки неудобны тем, что для их использования предварительно нужно проделать громоздкую работу для приведения матриц к диагональному виду. Л. А. Оганесян

2485. **Об определении прогибов стержня при продольном изгибе. Артмеладзе Н. К.,** Тр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 30, 141—146 (резюме груз.)

Ш. Е. Микеладзе разработал метод приближенного вычисления собственных значений и собственных функций одномерных краевых задач, основанный на соотношении, получаемом из формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$y_r^{(k)} = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{(rh)^\lambda}{\lambda!} y_0^{(k+\lambda)} + \frac{1}{(n-k-1)!} \times \int_a^{a+rh} (a + rh - t)^{n-k-1} y^{(n)}(t)\, dt \quad (1)$$

(здесь $y_i^{(k)} = y^{(k)}(a + ih)$) заменой интеграла в правой части по формуле трапеций, и некоторых формулах суммирования (Микеладзе Ш. Е., Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений, 1951, гл. 1, § 6).

В первой части реферируемой работы автор применяет к интегралу в правой части (1) более точные квадратурные формулы (например, формулу Симпсона) и получает соответствующее видоизменение упомянутого метода Ш. Е. Микеладзе. В качестве примера рассмотрена задача $y'' = -\lambda xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y(0) = y(1) = 0$. При $h = 1/5$ автор получает наименьшее собственное значение с ошибкой 0,2%, в то время как Ш. Е. Микеладзе получил его своим методом с ошибкой 3,7%.

Во второй части работы рассматривается применение предлагаемого метода к определению прогибов стержня при продольном изгибе.

Примечание референта. Формула Тейлора (1) записана в работе неверно (формула (3) реферируемой работы). Д. П. Гроссман

2486 К. **Восьмизначное дополнение к шаблонам для гармонического анализа и синтеза эмпирических функций, заданных значениями в равноотстоящих точках (числом от трех до ста). Поллак** (Eight-place supplement to harmonic analysis and synthesis schedules for three to one hundred equidistant values of empiric functions. Pollack Leo Wenzel (Dublin. Inst. Advanced Studies. School of Cosmic Physics. Geogr. mem. ser. № 1), Dublin, Inst. Advanced Studies School Cosmic Phys., 1954; Part 1: Register 1, 2 ed., XXIII + V + 16 pp., tabl., 7 sh. 6 d.; Part 2: Index, 2 ed., 5 + 35 pp., 7 sh. 6d.; Part 3: Register 2,5+16 pp., tabl., 5 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 262, 10 (англ.)

См. также: 2123, 2125, 2138, 2143, 2279, 2288, 2316, 2320, 2321 **РЕЦ**, 2338, 2386

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

2487. Передаточные функции симметричного RLC-четырехполюсника. Фиалков, Герст (RLC lattice transfer functions. Fialkow A. D., Gerst Irving), Proc. I. R. E., 1955, 43, № 4, 462—469 (англ.)

(См. также РЖМат, 1955, 2910).

Рассматриваются симметричные мостовые (Х-образные) четырехполюсники, питающиеся от генератора с нулевым импедансом. Выводятся необходимые и достаточные условия того, чтобы функция $A(p) = KN/D$, где N и D — полиномы с действительными коэффициентами, а K — постоянный множитель, могла быть передаточной функцией такого четырехполюсника. Доказывается наличие физически осуществимых передаточных функций, которые не могут быть реализованы четырехполюсником указанного вида. Описывается алгоритм для определения предельного значения K по коэффициентам полиномов N и D.

М. А. Айзерман

2488. Синтез пассивных n-полюсников по их матрицам распределения. Оно, Ясуура (Synthèse des réseaux passifs à n paires de bornes donnés par leurs matrices de répartition. Oono Y., Yasuura K.), Ann. télécommuns, 1954, 9, № 3, 73—80; № 4, 109—115; № 5, 133—140 (франц.)

Излагается метод синтеза линейных цепей посредством матриц распределения — соответственно для регулярных, общих, минимальных и эквивалентных многополюсников. Подобные вопросы рассматриваются далее применительно к многополюсникам, не удовлетворяющим принципу взаимности. Даются необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять матрицы распределения, их ортогональные и параунитарные преобразования. Устанавливается минимальное число реактивных элементов, из которых можно создать заданный многополюсник. Проводятся элементарные преобразования полиномиальных матриц и матриц, эквивалентных полиномиальным. Приводятся некоторые свойства параунитарных матриц и численный пример по синтезу четырехполюсника. Библ. 20 назв.

Т. А. Татур

2489. Метод многократного короткого замыкания для определения преобразовательных свойств $2n$-полюсника без потерь, включенного между однородными длинными линиями. Люг (Die Mehrfach-Kurzschlußschieber-Meßmethode zur Bestimmung der Transformationseigenschaften verlustloser $2n$-Pole zwischen homogenen Leitungen. Lueg Heinz), Arch. elektr. Übertrag., 1954, 8, № 11, 513—522 (нем.)

Используя метод анализа и матричный аппарат, изложенные в первой части работы (РЖМат, 1955, 5345), автор рассматривает применение метода тройного короткого замыкания для определения преобразовательных свойств восьмиполюсника без потерь. Приводится способ экспериментального определения комбинаций закорачивающих перемычек для восьмиполюсника без потерь, а также дается способ нахождения положения выходной закорачивающей перемычки в методе тройного короткого замыкания.

Указывается, что возможны применения предлагаемого метода в технике сантиметровых волн при выполнении различного рода разветвлений. Библ. 16 назв.

Т. А. Татур

2490. Элементарные операции, которые порождают матрицы цепей. Даффин (Elementary operations which generate network matrices. Duffin R. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 335—339 (англ.)

Под положительно действительной (п. д.) функцией $f(z)$ комплексного переменного z в смысле Бруна (Brune) подразумевается рациональная функция $f(z)$ с действительными коэффициентами, обладающая свойством $\mathrm{Re}\, f(z) \geqslant 0$ при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$. Известно, что при п. д. функциях $f(z)$ и $g(z)$ таковыми являются также функции: 1) $cf(z)$ (где c — любая положительная постоянная или нуль), 2) $1/f(z)$ (за исключением $f(z) \equiv 0$) и 3) $f(z) + g(z)$. Известным следствием метода синтеза Ботта и Даффина (РЖМат, 1955, 2909) является такое утверждение: Любую п. д. функцию можно образовать при помощи указанных действий, примененных конечное число раз, если исходить из п. д. функций 1 и z.

В данной работе рассматривается обобщение вышеуказанных свойств на матрицы. Положительно действительная матричная функция $F(z)$ определяется как квадратная симметричная матрица порядка n, элементы которой F_{jk} суть рациональные функции от z с действительными коэффициентами, обладающие свойством

$$\mathrm{Re} \sum_{j,k=1}^{n} F_{jk} c_k \bar{c}_j \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\, z \geqslant 0,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — любые комплексные числа, а $\bar{c}_j$ означает комплексное сопряженное числа c_j. Непосредственно проверяется, что вместе с п. д. матричными функциями F и G таковыми являются также матричные функции: 1) $A^* FA$ (A — любая квадратная матрица порядка n с постоянными действительными элементами, A^* — транспонированная от матрицы A), 2) F^{-1} (если таковая существует) и 3) $F + G$.

Затем доказывается теорема, которая утверждает, что любую п. д. матричную функцию можно образовать при помощи указанных действий, примененных конечное число раз, если исходить из единичной матрицы I и матрицы Iz.

Доказательство этой теоремы проводится методом полной индукции по n, причем в случае, когда порядок матрицы $n = 1$, справедливость теоремы непосредственно следует из вышеизложенного, ибо в этом случае п. д. матричная функция переходит в п. д. числовую функцию.

Указывается, что рассмотренные операции над матрицами имеют смысл синтеза $2n$-полюсников. При этом операции 1) соответствует применение идеального трансформатора, операции 2) — замена матрицы сопротивлений матрицей проводимостей, и наоборот, а операции 3) — последовательное или параллельное соединение $2n$-полюсников.

Н. А. Бразма

2491. Трехзначное исчисление высказываний математической логики и его применение к описанию схем, состоящих из элементов с двумя устойчивыми состояниями. Роледер (Der dreiwertige Aussagenkalkül der theoretischen Logik und seine Anwendung zur Beschreibung von Schaltungen, die aus Elementen mit zwei stabilen Zuständen bestehen. Rohleder Hans), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 8/9, 308—311 (нем.)

Предлагается трехзначное исчисление высказываний для описания релейных схем: релейно-контактных и электронных. Значение истинности высказывания A обозначается через $w(A)$: оно может быть равно либо 0, либо $1/2$, либо 1. Конъюнкция $A \& B$, дизъюнкция $A \vee B$ и отрицание $\bar{A}$ определяются посредством равенств $w(A \& B) = \mathrm{Min}\,[w(A), w(B)]$, $w(A \vee B) =$

$= \text{Max}\,[w(A), w(B)]$ и $w(\bar{A}) = 1 - w(A)$ соответственно. Вводятся операции

$$w(\hat{A}) = \begin{cases} w(A) & \text{для } w(A) \neq 1/2 \\ 0 & \text{для } w(A) = 1/2 \end{cases}$$

и

$$w(\check{A}) = \begin{cases} w(A) & \text{для } w(A) \neq 1/2 \\ 1 & \text{для } w(A) = 1/2, \end{cases}$$

после чего исчисление становится функционально полным. Принцип двойственности формулируется следующим образом: из функции, записанной в нормальной форме, можно получить ее отрицание путем взаимной замены операций & и $\vee$ и операций $\hat{}$ и $\check{}$ и заменой всех простых высказываний их отрицаниями.

Всякая релейная схема может быть описана системой уравнений:

$$X = f(A, B, \ldots, C, X, Y, \ldots, Z)$$
$$Y = g(A, B, \ldots, C, X, Y, \ldots, Z)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z = h(A, B, \ldots, C, X, Y, \ldots, Z).$$

В случае релейно-контактной схемы зависимые переменные изображают состояние реле, реагирующие органы которых присутствуют в схеме. В случае электронных схем зависимыми переменными являются напряжения в некоторых узлах схемы. Можно доказать существование решения такой системы уравнений, если функции $f, g, \ldots, h$ описывают схему, т. е. если на функции $f, g, \ldots, h$ наложены определенные ограничения. Вообще говоря, эти системы имеют несколько различных решений. Главным решением называется решение, которое дает наибольшему числу зависимых переменных значение $1/2$, когда независимые переменные принимают значения 0 и 1. Главное решение может быть получено итерационными вычислениями.

Указывается, что при более глубоком анализе нужно не только учитывать состояние схемы при определенной комбинации величин независимых переменных, но необходимо также знать поведение схем при переходе от одной комбинации величин к другой. При этом необходимо иметь некоторые дополнительные сведения об элементах схемы (для реле, например, должны быть известны запаздывания срабатывания и отпускания). Однако, как отмечается, двузначное исчисление высказываний для этого недостаточно.

Утверждается, что на основе трехзначного исчисления высказываний можно получить чисто вычислительный метод синтеза мостиковых схем, не описанный еще в литературе. В. М. Остиану

2492. Матричный метод расчета релейных схем. Хон (A matrix method for the design of relay circuits. Hohn F. E.), I. R. E. Trans. Circuit theory, 1955, CT-2, № 2, 154—161 (англ.)

Излагается матричный метод преобразования и синтеза контактных схем, совпадающий в основном с методом, предложенным ранее А. Г. Лунцем (Изв. АН СССР, сер. матем. 1952, **16**, 405—426). Отличия от метода А. Г. Лунца имеют лишь технический характер. Так, например, операции исключения и введения полюсов многополюсников производятся путем оперирования непосредственно с самими матрицами соединений, без использования характеристической функции этих матриц. Предложен способ записи элементов матриц, который устраняет необходимость переписывания повторяющихся элементов и позволяет тем самым сберечь некоторое количество труда и времени, затрачиваемое в процессе синтеза контактных схем. Для иллюстрации метода приведено несколько примеров синтеза однотактных и многотактных схем.

В статье имеются ссылки на работы Шеннона и ранее опубликованные работы автора, но нет никаких ссылок на работы советских авторов (Лунц А. Г., Цетлин М. Л.), посвященные матричным методам анализа и синтеза релейно-контактных схем. В. И. Шестаков

2493. Применение алгебры контактных схем. Уэрмалд (An application of switching algebra. Wormald E. G.), Telecommun. J. Australia, 1954, 9, № 6, 282—286 (англ.)

Популярная статья. Излагаются основные положения и теоремы теории релейно-контактных схем. Приводится пример построения контактной пирамиды для пересчета с двоичного на десятичный счет.

В. Н. Рогинский

См. также: 1860

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

2494. Цифровые вычислительные машины. Расшифровка логико-математических формул на машине. Бём (Calculatrices digitales. Du déchiffrage de formules logico-mathématiques par la machine même dans la conception du programme. Böhm Corrado), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **37**, 175—217 (франц.; резюме итал., англ., нем.)

Освещаются вопросы автоматического кодирования и терминология по цифровым машинам. Все рассуждения ведутся применительно к трехадресной системе программирования. Подробно разобраны принципы автоматического кодирования и связанные с ними вопросы ввода программы, а также особенности автоматического кодирования формул, содержащих скобки. Освещаются принципы автоматического кодирования полиномов, имеющих нормальную форму. Приведена детальная программа автоматического кодирования.

Е. И. Мамонов

2495. Дискуссия по техническому применению вычислительных машин. Петри (Group discussion on technical applications. Petrie G. W.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, Dec. 8—10, 121 (англ.)

Отмечаются преимущества децентрализованного программирования: исполнитель более подробно знакомится с полными возможностями машины и может быстрее приспособить программу к измененной формулировке задачи; устраняется задержка, связанная со знакомством программиста с задачей. Преимущества централизованного программирования: более эффективное программирование вследствие знакомства со всеми уже имеющимися подпрограммами.

Н. П. Трифонов

2496. Программирование на малых вычислительных машинах. Пёш, Фромме (Programmorganisation bei kleinen Rechenautomaten mit innerem Programm. Pösch H., Fromme Th.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 8/9, 307—308 (нем.)

Описывается модель одноадресной машины, выполняющей операции сложения, вычитания, переноса числа, переноса команды в специальную ячейку и

условные передачи управления. В машине имеется устройство, которое расписывает формулу, закодированную и набитую на перфоленту, в виде программы. Машина может быть использована для обучения программированию, для решения задач, для построения программ по формулам и для контроля программ.
Г. П. Багриновская

2497. Некоторые замечания по проектированию логической схемы вычислительной машины и контролю с помощью программы. Голдстайн (Some remarks on logical design and programming checks. Goldstine Herman H.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, Dec. 8—10, 96—98 (англ.)

Рассматривается вопрос о том, как, используя элементы с известной надежностью, спроектировать логическую схему вычислительной машины, которая в целом должна обеспечивать требуемую надежность. Автор анализирует использование трех основных логических элементов, имеющих по два входа и одному выходу: элементы «и-и», «или-или», «и-нет». Определяется вероятность правильного состояния регенерирующей запоминающей ячейки, построенной на базе схемы или-или» для любого числа циклов регенерации. С ростом числа циклов регенерации вероятность правильного состояния ячейки стремится к $^1/_2$. Показывается, как надо видоизменить логическую схему, чтобы вероятность правильного хранения информации значительно возросла. Приводится вывод вероятности ошибки для этой схемы. Указывается на необходимость контроля правильности работы машины в процессе вычислений. Например, при численном интегрировании уравнений, описывающих систему с постоянной энергией, периодический подсчет энергии может служить хорошей проверкой.
А. Б. Залкинд

2498. Преимущества встроенного контроля. Мокли (The advantages of built-in checking. Mauchly John W.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, Dec. 8—10, 99—101 (англ.)

Рассматривается применение устройств контроля за правильной работой машины с точки зрения экономичности ее эксплуатации. Все существующие системы контроля разбиты на 5 условных групп:

1) В машине контролируется автоматически каждая арифметическая операция и передача информации. Обнаруженные ошибки приводят к автоматическому исправлению оборудования и продолжению хода вычислений. Эта система пока не нашла применения.

2) Вычислительная машина автоматически обнаруживает большинство ошибок и пытается повторить вычисления снова. Если ошибка повторяется, то дается сигнал оператору о необходимости ремонта. Эта система применяется в электронной перфокартной машине фирмы «Ремингтон Ранд».

3) Устройство автоматического обнаружения ошибки останавливает вычислительную машину. Применяется в машине УНИВАК.

4) Каждая задача решается два раза. Перед повторным решением пропускают контрольную задачу, результат которой указывает на правильную работу машины. Эта система применяется в большинстве существующих вычислительных машин, хотя ясно, что этот метод в 2 раза снижает эффективность машин.

5) Контроль за правильностью вычислений осуществляется программой вычислений и специальными «диагностическими» программами. К последним относятся и различные методы профилактики.

Имеется значительная разница в процессе устранения неисправности при использовании встроенного контроля или при контроле посредством программы. Встроенный контроль, мгновенно останавливая машину, не дает возможности распространяться ошибке и помогает точно определить ее место. Это помогает обслуживающему персоналу быстро обнаруживать и устранять ошибки. Контроль программой, если он выполнен весьма детально для контроля каждой операции, становится весьма громоздким и требует больших затрат на программирование и дополнительного времени работы машины, что сводит на-нет экономическую выгоду его по сравнению с системой встроенного контроля. Однако имеется ряд задач, главным образом математических, которые для весьма значительных вычислений требуют всего небольшой контрольной программы. В универсальных машинах, где встречаются всевозможные задачи, более выгодным является встроенный контроль.
А. Б. Залкинд

2499. Вычислительные машины. Волстадт (Computors. Wollstadt Roger D.), Tech. Engng News, 1954, **36**, № 3, 8—9, 11 (англ.)

Приводятся основные данные некоторых цифровых вычислительных машин.

Марк I. Первая из практически построенных машин (1943—1944 гг.). Построена в Вычислительной лаборатории Гарвардского университета. В машине применены механические счетчики. Данные вводятся с перфокарт. Имеется возможность засылать вручную при помощи переключателей 60 постоянных. Результаты печатаются либо набиваются на перфокарты. В запоминающих регистрах хранятся 72 23-значных числа или 144 11-значных.

ЭНИАК, Первая цифровая вычислительная машина, в которой использовались вакуумные лампы и электронные схемы. Построена Пенсильванским университетом в 1954 г. Выполняет 5000 сложений или 300 умножений в 1 сек. Данные вводятся с перфокарт (800 чисел в 1 сек.). Результаты печатаются или набиваются на перфокарты.

Марк II. Вторая из серии машин Вычислительной лаборатории Гарвардского университета, была построена в 1947 г. В машине используются электромеханические реле во всех основных устройствах, включая арифметические, запоминающие и устройства управления.

В 1949 г. Гарвардская вычислительная лаборатория окончила работу над большой электронной машиной Марк III. Скорость работы ее была в 50 раз выше, чем у машины Марк II. В качестве запоминающего устройства использован вращающийся магнитный барабан.

Приводится таблица характеристик некоторых машин (табл. 1).

Таблица 1

Машина	Время умножения, мсек.	Количество ячеек запоминающего устройства	Вид запоминающего устройства
Марк I	5500	75	механическое
Марк II	700	100	реле
Марк III	12	200	магнитный барабан
ЭНИАК	2,8	130	электронные лампы
БИНАК	1,2	500	ртутные линии задержки
Белл V	2000	30	реле
Вихрь I	0,06	2000	электростатическое
ИРА (ERA)	15	18 000	магнитный барабан

Приводится способ изображения чисел при помощи четырех элементов (табл. 2). В некоторых машинах, например в релейной машине фирмы «Белл», применяются самоблокирующие коды (табл. 3). Для такого

кодирования необходимо по крайней мере пять элементов. В системе «два из пяти» только два элемента могут быть возбуждены одновременно. Если возбуждаются более или менее чем два элемента, то машина автоматически останавливается. В двойной пятеричной системе блокировка еще более сложная. Каждая цифра изображается двумя элементами из семи, один из которых должен быть либо 00, либо 5. Неправильный результат может получиться лишь в том случае, если возникнут одновременно две разные неисправности.

Таблица 2

Четырехэлементные коды

Цифры	Двоичные элементы 1	2	4	8	Элементы 1	2	4	5
1	X				X			
2		X				X		
3	X	X			X	X		
4			X				X	
5	X		X					X
6		X	X		X			X
7	X	X	X			X		X
8				X	X	X		X
9	X			X			X	X
0		X		X	X		X	

Таблица 3

Самоблокирующие коды

Цифры	Элементы «два из пяти» 0	1	2	4	7	Двойные пятеричные элементы 00	5	0	1	2	3	4
1	X	X				X			X			
2	X		X			X				X		
3		X	X			X					X	
4	X			X		X						X
5		X		X			X	X				
6			X	X			X		X			
7	X				X		X			X		
8		X			X		X				X	
9			X		X		X					X
0				X	X	X	X					

В. Н. Лаут

2500. Техническое описание цифрового вычислительного устройства фирмы «Электродэйта». Олрич (Engineering description of the ElectroData digital computer. Alrich J. C.), I.R.E. Trans. Electronic Comput., 1955, **EC-4**, № 1, 1—10, 32 (англ.)

Подробно описывается вычислительная машина фирмы «Электродэйта» (ElectroData Corp.). Машина — одноадресная с программным управлением и фиксированной запятой. Запоминающее устройство сделано на магнитном барабане. Машина работает по десятичной системе, число состоит из 10 разрядов и знака. Каждый десятичный разряд представлен двоичным кодом. Разряды числа в машине передаются последовательно, а двоичные подразряды каждого десятичного разряда параллельно. Магнитный барабан разбит на 20 секций по 4 дорожки. 4 двоичных разряда каждой секции представляют 1 десятичный разряд. Каждая секция содержит 200 десятичных кодов; таким образом полная емкость главного запоминающего устройства равна 4000 кодов. Среднее время выбора одного кода из главного запоминающего устройства равно 8,5 мсек. при скорости вращения барабана 3550 об/мин. Время переключения с одной секции на другую меньше 5μсек., что позволяет не прерывать вычислений на время переключения. Дополнительное быстродействующее запоминающее устройство имеет 4 секции, каждая из которых содержит по 20 кодов. Среднее время выбора одного кода 0,85 мсек., что достигается благодаря скорости вращения дополнительного барабана 25 000 об/мин. Обмен числами между главным запоминающим устройством и быстродействующим производится группами по 20 чисел, а между накопительным регистром и быстродействующим запоминающим устройством — отдельными числами. Всего по окружности барабана (учитывая пропуски между числами) размещается 2400 импульсов. На барабане применен метод записи «без возврата в нулевое положение», т. е. изменение уровня намагничения вдоль окружности барабана происходит при переходе от «1» к «0», и наоборот. Частота следования импульсов при скорости вращения барабана 3550 об/мин. равна 142 *кгц*. Головки монтируются в блоки по 4, причем каждый блок имеет свою регулировку для правильной установки головок. Удвоенная амплитуда выходного сигнала головки имеет величину не менее 1,5 *в*, ток записи 185 *ма*. Зазор между головками и барабаном 0,025 *мм*. Эксцентриситет барабана не более 0,005 *мм*. Кроме внутренних запоминающих устройств, машина имеет вспомогательное внешнее запоминающее устройство на магнитной ленте емкостью 160 000 чисел.

Машина может выполнять 55 операций. Пятый и шестой разряды инструкции отводятся под код операции, последние четыре разряда под адрес, а первые четыре остаются в запасе для особых нужд при программировании.

Приводятся упрощенная блок-схема машины, схемы блокинг-генератора и триггера, являющихся основными элементами машин. Кратко разбирается логическая схема машины. Подробно описывается профилактическая проверка надежности элементов машины, которая состоит в том, что на определенную величину меняются амплитуды импульсов или напряжения питания, что вызывает сбой ненадежного элемента. Проверка отдельных частей машины таким способом осуществляется автоматически. Ввод данных осуществляется с 6-дырочной перфоленты через фототрансмиттор со скоростью 540 знаков в 1 сек., с телеграфного трансмиттора со скоростью 10 знаков в 1 сек., с перфокарт со скоростью 100 карт в 1 мин. и с клавишного аппарата. Результаты вычислений печатаются телетайпом, набиваются на перфоленту и перфокарты.

Конструкция машины блочная. Общее количество ламп 1525, кристаллических диодов 3809. Среднее время сложения примерно 2 мсек., умножения 6,5 мсек., деления 10 мсек. Мощность, потребляемая вычислительным устройством, без учета блока ввода с перфокарт и вывода на них, порядка 15,2 *квт*. Имеются фото.

В. В. Карибский

2501. Электронная вычислительная машина (Electronic computor), Standard, 1955, № 438, 11, 34 (англ.)

Сообщение о вычислительной машине МИРАКЛЕ (MIRACLE — Mocum's Industrial Research Automatic Calculator for Laboratory and Engineering; «Mocum» в разговорной речи означает Амстердам), построенной фирмой «Ферранти» в Манчестере за 150 000 фунтов стерлингов и установленной в Амстердамской лаборатории фирмы «Ройал Датч Шелл» (Royal Dutch Shell Group). Машина содержит 4000 электронных ламп, имеет два запоминающих устройства — на магнитном барабане и на телевизионных трубках общей емкостью 16 000 12-значных чисел; может выполнять 32 вида операций. Скорость работы 1000 сложений или умножений в 1 сек.

В. К. Зейденберг

2502. Портативная цифровая машина для решения дифференциальных уравнений (A portable digital differential analyzer), Control Engng, 1956, 3, № 1, 24 (англ.)

Фирма «Литтон» (Litton Industries) выпустила портативную цифровую машину для решения дифференциальных уравнений, по габаритам соответствующую пишущей машинке. Машина имеет 20 интеграторов, дающих точность в 5 знаков. При выполнении итераций процесс идет со скоростью 60 раз в 1 сек. Машина работает от сети 110 *в* и потребляет 300 *вт*. В ней имеется небольшое запоминающее устройство на магнитных элементах; стоимость машины 10000 долларов.

2503. **Цифровая универсальная вычислительная машина** (A compact general-purpose digital computer), Control Engng, 1956, **3**, № 1, 25 (англ.)

Цифровая универсальная вычислительная машина фирмы «Либраскоп» (Librascope) оперирует с 30-разрядными двоичными числами, плюс разряд знака и буферный разряд. Запоминающее устройство на магнитном барабане, вращающемся со скоростью 3600 об/мин, имеет емкость 4096 чисел. Среднее время выборки около 8,5 мсек.

Все устройства машины размещены внутри стального кожуха, содержащего также обслуживающую машину кондиционирующую установку и блок питания. В машине 100 ламп и 1300 диодов.

2504. **Электронная цифровая вычислительная машина** (Electronic digital computer), Australas. Manufacturer, 1955, **40**, № 2043, 28 (англ.)

Сообщение об английской электронной цифровой вычислительной машине последовательного действия. ЭЛЛИОТТ-402 фирмы «Эллиотт» (Elliott Brothers). Машина выполнена на 223 стандартных блоках, содержащих 615 ламп. Машина состоит из семи стоек, запоминающего устройства на магнитном барабане, блока стабилизированного питания и пульта управления. Количество двоичных разрядов 32. Барабан имеет 23 дорожки по 128 чисел; скорость вращения 4600 об/мин, среднее время выборки 6,5 мсек. В качестве промежуточного запоминающего устройства имеется 15 магнитострикционных линий задержки, каждая на одно число. Ввод с перфоленты фотоэлектрический с большой скоростью. Вывод либо на электрическое телепечатающее устройство, либо на перфоленту, либо на страничную печать.

В машине широко используется набор подпрограмм, например для извлечения корней, нахождения тригонометрических функций, преобразования двоичного кода в десятичный, и обратно. Рабочая частота машины 333 *кгц*. Время сложения и вычитания 204 *мксек*., время умножения или деления 3,3 мсек. Нахождение собственных значений матрицы 20×20 при 20 итерациях требует 1,75 мин., обращение матрицы 20×20 для решения 20 линейных уравнений занимает 10 мин.; произведение двух матриц 20×20 потребует 3,5 мин.; при типовой 30-минутной работе аэродинамической трубы 30 комплектов по 6 показаний приборов напряжения преобразуются в величины усилий и моментов за 3 мин. Размеры машины 3,9×0,6×2,1 *м* при весе 1,1 *т*. В. К. Зейденберг

2505. **Цифровой дифференциальный анализатор.** **Форбс** (The digital differential analyzer. Forbes George F.), Computers and Automat., 1955, **4**, № 1, 8—10 (англ.)

Дано сравнение механического интегратора Буша с цифровым дифференциальным анализатором (DDA), производящим интегрирование с помощью магнитного барабана. На одной дорожке барабана находится зависимая переменная y, записанная двоичным кодом, которая последовательно складывается с содержимым второй дорожки или вычитается из него со скоростью dx/dt, где dx/dt — частота сложений или вычитаний. Так как число переполнений второй дорожки в единицу времени dz/dt зависит как от y, так и от dx/dt, то соотношение, связывающее x, y и z, идентично соотношению, существующему в механическом дисковом интеграторе, т. е. $dz/dt = y\,dx/dt$ или $z = \int y\,dx$.

Машина может иметь более 60 интеграторов, каждый из которых выдает результаты со скоростью 60 раз в 1 сек. Преимуществами цифрового дифференциального анализатора являются: 1) возможность повышения точности вычислений за счет увеличения основной частоты машины; 2) возможность изменения знака при интегрировании, в результате чего интегратор можно использовать в качестве переключателя, сумматора, ограничителя, следящей системы, генератора прерывистых колебаний, умножителя частоты, генератора постоянного уровня и ряда других специальных функций; 3) возможность суммировать входные величины, не имея специального сумматора, и умножать на постоянный коэффициент в процессе интегрирования; 4) малое время набора задачи; на набор задачи, использующей полную емкость машины, требуется менее часа; 5) малые размеры.

Недостатками подобных машин являются: относительно меньшая надежность и относительно большая сложность эксплуатации, что требует более квалифицированного обслуживающего персонала. Однако время, идущее на текущий ремонт и подготовку машины к работе, значительно меньше, чем время набора задачи на интеграторе Буша. Приводится пример решения дифференциального уравнения на цифровом анализаторе. В. В. Карибский

2506. **Автоматические вычислительные машины экономят деньги и человеческий труд. Харп** (Automatic computers save money and technical manpower. Harp W. M.), Petrol. Refiner, 1953, **32**, № 4, 159—161 (англ.)

Сообщается, что фирма «Хамбл Ойл энд Рифайнинг» (Humble Oil and Refining Co.) исследует возможность применения цифровых вычислительных машин для решения задач, связанных с производством нефти и газа. В 1952 г. фирмой была получена машина, которая имеет входное устройство на перфокартах; от одного до трех запоминающих устройств, вмещающих по 16 10-значных чисел; электронное вычислительное устройство, выполняющее 4 арифметические операции; ряд счетчиков, используемых либо в качестве дополнительного запоминающего устройства, либо для сложения и вычитания; перфорирующее и печатающее устройство. Карты подаются в машину со скоростью 100 шт. в 1 мин. Приводятся результаты, полученные при решении отдельных задач. Особенно успешно машина применялась для вычислений, производимых при масс-спектрометрических анализах и сводящихся к решению систем линейных уравнений; для расчетов ректификационных колонн; для обработки данных заводских испытаний, связанных с каталитическим крекингом; для различных вычислений экономического характера. В течение нескольких лет разрабатывается применение статистических методов к проблемам нефтеперерабатывающей промышленности. Д. П. Гроссман

2507. **Новая коммерческая вычислительная машина B-4** (New mercator B-4 computer), Aviat. Week, 1954, **60**, № 25, 74 (англ.)

Сообщение о новой вычислительной машине B-4, построенной в Голландии и установленной в Канаде. Машина испытана канадскими военно-воздушными силами и используется на многих аэролиниях и в военных организациях. Н. П. Трифонов

2508. **Вычислительная машина, выполненная полностью на кристаллических триодах** (All-transistor calculator), Mech. Engng, 1955, **77**, № 1, 38—39 (англ.)

Краткое сообщение об экспериментальном образце вычислительной машины типа известной ИБМ-604.

использующей 2200 кристаллических триодов (РЖМат, 1955, 1985, 2919, 6151). А. Б. Залкинд

2509. Новая электронная вычислительная машина обладает многосторонностью и простотой действия (New electronic computer has versatility and easy operation), Petrol. Process, 1954, **9**, № 4, 592 (англ.)

Сообщение о цифровой машине фирмы «Бендикс» для решения дифференциальных уравнений (РЖМат, 1955, 2918, 4045). Машина может решать линейные и нелинейные дифференциальные уравнения или системы, интегральные уравнения, краевые задачи, системы линейных и нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений. Н. Ф. Семикова

2510. Новая электронная вычислительная машина (A new electronic calculating machine), Electr. Power Engr, 1955, **37**, № 4, 225, 226—227 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 4740.

2511. Для высокоскоростных вычислений (For high-speed computation), Aeroplane, 1955, **88**, № 2276, 284—285 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 4740.

2512. Электронная вычислительная машина (Electronic computer), Power Equipm., 1954, **6**, № 4, 20 (англ.)

Сообщение фирмы «Консолидейтид» (Consolidated Engineering Corp.) о выпуске недорогой автоматической универсальной электронной цифровой вычислительной машины типа 203. См. РЖМат, 1955, 1523, 6150. В. К. Зейденберг

2513. Универсальная вычислительная машина (General computer), Tele-Tech, 1954, **13**, № 5, 95 (англ.)

Сообщение о вычислительной машине типа 30-203 (CRC 30-203) фирмы «Консолидейтид» (РЖМат, 1955, 1523, 6150). Н. П. Трифонов

2514. Математические машины. Виллерс (Mathematische Maschinen. Willers Friedrich-Adolf), Wiss. Ann., 1953, **2**, № 5, 280—298 (нем.)

Описание принципов работы и устройства различных математических машин. Приводятся некоторые данные машин Z4 и Дармштадтской экспериментальной машины (РЖМат, 1953, 1433, 1434). Сообщается, что машина Z5 имеет вспомогательное устройство, которое автоматически переводит в последовательность команд закодированный на перфоленте ход решения задачи. Устройство подобного типа имеет также машина Марк III. Конкретных данных об этих устройствах не приводится. И. К. Хайлов

2515. Цифровая машина для игры в «Ним». Шланг (A digital NIM computer. Schlang Arthur), Radio-Electronics, 1954, **25**, № 6, 49—50 (англ.)

Правила игры следующие: берутся любые мелкие предметы и раскладываются на любое количество кучек, с произвольным количеством предметов в кучке. Двое противников по очереди делают ходы. Делающий ход обязан взять любое количество предметов из любой кучки, но только из одной. Проигрывает тот, кто возьмет последний предмет. Существует математическая зависимость, позволяющая выиграть игру. Для этого нужно записать количество предметов в каждой кучке в двоичной системе, а затем полученные числа записать друг под другом и подсчитать поразрядные суммы. Для того чтобы ход приводил к выигрышу, нужно взять такое количество предметов из какой-либо кучки, чтобы получившиеся после хода разрядные суммы все без исключения были четные. Это возможно только тогда, когда перед ходом была хотя бы одна нечетная разрядная сумма. Существует исключение: если в каждой кучке осталось лишь по одному предмету, то требуется, чтобы их было нечетное количество.

Машина, сделанная для этой цели, представляет 5 многоплатных переключателей на 11 положений каждый, соединенных в определенном порядке. Каждый переключатель ставится в положение, соответствующее количеству предметов в своей кучке. Если разрядные суммы четные, то сигнальная неоновая лампа начинает мигать. Играют с машиной следующим образом. При ходе машины начинают по очереди поворачивать ручки переключателей до тех пор, пока не начнет мигать сигнальная лампа. Разница между старым и новым положением переключателя показывает, сколько предметов требуется убрать из кучки, соответствующей номеру переключателя.

Прилагается схема коммутации переключателей. В. Н. Лаут

2516. Ответы от вычислительной машины, расположенной за 500 миль (Answers from a computer 500 miles away), Electronics, 1953, **26**, № 10, 406 (англ.)

Краткое сообщение, посвященное управлению вычислительными машинами на расстоянии. Программа задачи с помощью телеграфной аппаратуры передается в электронную цифровую машину, расположенную в Филадельфии (на расстоянии 500 миль от места передачи — Уэйнского университета). Машина решает задачу и посылает ответ обратно. Отмечается, что управление вычислительными машинами на расстоянии дает возможность студентам, посещающим краткосрочный курс по машинам, приобрести практический опыт в использовании больших вычислительных машин. Н. П. Трифонов

2517. Дискуссия по диагностическим испытаниям. Икус (Group discussion on diagnostic checks. Eachus J. J.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, Dec. 8—10, 119 (англ.)

Указывается, что на конференции рассматривались некоторые методы и способы диагностических испытаний и испытаний на предельных режимах. Решения, принятые на конференции по рассматриваемым вопросам, в статье не приводятся. Б. И. Шитиков

2518. Электронные переводчики. Сарди (I traduttori elettronici. Sardi Paolo), Civiltà macchine, 1954, **2**, № 2, 72—73 (итал.; резюме англ.)

Популярный очерк. Указывается, что возможны два варианта совместной работы человека с машиной: 1) машина делает приблизительный перевод, исправляемый затем редактором; 2) переводчик придает иностранному тексту форму, удобную для перевода, который затем делается машиной. Преимущество первого варианта в том, что для редактора не обязательно совершенное знание языка оригинала. В простейшем случае машина для перевода представляет собой автоматический словарь. Быстродействующая вычислительная машина, моделирующая словарь, должна иметь внутреннее запоминающее устройство на 2 млн. слов. Требования к объему запоминающего устройства можно уменьшить целесообразным кодированием слов на основе учета распределения и частоты букв. На конференции по переводящим машинам, происходившей в июне 1952 г. в Массачусетском технологическом институте, американские эксперты решили, что машину для перевода можно будет построить только к 1962 г.

Указывается, что сообщение итальянского радио и прессы об автоматическом переводе с русского языка на английский, сделанном в январе 1954 г. на машинах ИБМ (РЖМат, 1954, 5293), преувеличены и носят рекламный характер. Словарь в 250 слов и ручная перфорация текста перед вводом в машины делают невозможной практическую работу. Указывается, что аналогичные опыты делались и ранее. В мае 1953 г. электронная вычислительная машина APE(X)C (Birkbeck College, Лондон) под руководством Бута перевела

1000 слов за 30 мин., тогда как опытному переводчику на это был нужен час. Г. Н. Поваров

2519. **Электронный перевод. Несколько здравых замечаний. Липпи** (Electronic translation: a few sobering comments. Lippee Berthold), Tech. Engng News, 1954, **35**, № 6, 53 (англ.)

Критика сенсационной шумихи, поднятой американской прессой вокруг демонстрации электронного перевода с русского языка на английский на машине ИБМ-701. Перечисляются трудности, связанные с переводом на электронных машинах. О. С. Потураев

2520. **Достижения вычислительной машины УНИВАК фирмы «Ремингтон Ранд»** (Las proezas de la calculadora «Univac» de la Remington Rand.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1954, **2**, № 6, 32 (исп.)

2521. **Использование в коммерции автоматической вычислительной машины фирмы «Ремингтон Ранд»** (Los sistemas de cálculo automático de la «Remington Rand» en la ciencia y técnica del comercio), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1954, **3**, № 7, 35 (исп.)

2522. **Предсказание погоды с помощью вычислительной машины** (Weather by giant «brain»), Sci. News Letter, 1953, **64**, № 20, 309 (англ.)

Научные новости (Science news), Science, 1953, **118**, № 3074, 644—645 (англ.)

Сообщение о том, что в США в 1954 г. намечалось провести систематические опытные вычисления по предсказанию погоды на быстродействующей электронной машине. В машину вводятся данные об атмосферном давлении на различных высотах (до 9 *км*) над территорией всей страны. Машина выдает карту ветров на 24 часа вперед. Все вычисления занимают около часа. Для предсказания погоды на более длительные сроки (от 5 до 30 и более дней) нет еще удовлетворительных формул; предполагается, что такие прогнозы можно будет осуществлять нескоро. В. М. Курочкин

2523. **Вычисление поля атмосферного развития на электронной вычислительной машине. Бэшби, Хайндс** (Electronic computation of the field of atmospheric development. Bushby F. H., Hinds M. K.), Meteor. Mag., 1953, **82**, № 977, 330—334 (англ.)

Краткое изложение результатов вычислений полей атмосферного развития с помощью цифровой вычислительной машины. Под полем атмосферного развития авторы понимают величину, пропорциональную разности дивергенций скорости на изобарических поверхностях, ограничивающих снизу и сверху избранный слой. Сообщается, что при вычислениях 3 мин. занял ввод программы и исходных данных, 1 мин. собственно вычисления, 1,5 мин. печать результатов. Тип использованной машины не указывается. М. П. П.

2524. **Составление баллистических таблиц при помощи вычислительных машин. Гробёрг** (Skjuttabellberäkning med hjölp av matematikmaskiner. Grå-berg), Tidsskr. sjöväsendet, 1954, Augusti, 483—485 (швед.)

Описаны методы вычисления баллистических таблиц, для составления которых в последнее время в Швеции стали применяться вычислительные машины. Применяемые в баллистической таблице величины получаются из большого числа нормальных траекторий. Рассчитанные теоретически предварительные траектории превращаются в пристрелочные траектории, составляющие, в свою очередь, нормальные траектории для баллистических таблиц. Для зенитной таблицы требуется обычно 12 нормальных траекторий, из которых 5 пристрелочных в 3—4 точках каждая, а для таблицы навесной стрельбы — 8 нормальных траекторий с одной пристрелочной.

С 1950 г. большое число траекторий рассчитано с помощью шведской релейной машины БАРК и электронной машины БЭСК. В последнее время стали применяться вычислительные машины с перфокартами, первоначально предназначенные для бухгалтерских и статистических вычислений. Это электронные машины ИБМ-604 и ИБМ-602А, применяемые в баллистическом отделе Морского управления и на Стокгольмской военной верфи. Машины значительно ускорили вычислительные работы. Так, например, изготовление зенитной таблицы до сих пор занимало 1200 рабочих часов, а на машине с перфокартами эта работа выполняется за 110 часов. Б. В. Аронов

2525. **Электронная вычислительная машина облегчает учетную работу фирме CF&I по составлению платежной ведомости, выпуску и продаже продукции** (Electronic «brain» lightens figurework load for CF&I payroll, production and sales), Western Metals, 1953, **11**, № 4, 71—73 (англ.)

Сообщается, что электронная цифровая машина 409-2 фирмы «Ремингтон Ранд» (РЖМат, 1954, 2747) используется фирмой «Колорадо Фуэл энд Айрон» (Colorado Fuel and Iron Corp.— CF&I) на одном из ее заводов с 8000 рабочих для учета затрат в процессе производства продукции, реализации продукции в торговой сети, расчета заработной платы, определения прибыли и т. п. Употребление цифровой машины сократило время расчетов в 60 раз. Приведены некоторые данные о машине. В. С. Митрофанов

2526. **Конвэйр. Электронные вычислительные машины** (Convair: Electronic computers), Interavia Air Letter, 1955, № 3221, 11 (англ.)

Сообщение о том, что отдел «Конвэйр» (Convair Division) фирмы «Дженерал Динамикс» (General Dynamics) в Сан-Диего приобрел электронную цифровую вычислительную машину ИРА-1103 фирмы «Ремингтон Ранд». Машина установлена в помещении аэродинамической трубы и занимает площадь в 112 *м*². Кроме этой машины, отдел «Конвэйр» располагает вычислительными машинами непрерывного действия, цифровой вычислительной машиной, подобной ИРА-1103, и так называемым сеточным анализатором, который арендуется в случае надобности в Калифорнийском технологическом институте. В. К. Зейденберг

2527. **Фирма «Чесапик энд Огайо» использует электронные вычислительные машины** («C and O» explores potentialities of «O. R.» and electronic brains), Mod. Railroads, 1954, **9**, № 11, 49, 51 (англ.)

Сообщение о том, что железнодорожная компания «Чесапик энд Огайо» (Chesapeake and Ohio) заключила контракт с фирмой «Ремингтон Ранд» на аренду электронной вычислительной машины УНИВАК. На главных линиях фирмы установлено новое телетайпное оборудование с целью накопления информации для последующей обработки на арендуемой машине. Предполагается, что машина поможет улучшить использование вагонов, работу вагонных парков, подсчет вагонов, ускорить оборот поездов, позволит следить за бóльшим количеством информации, чем раньше. В настоящее время на машине обрабатываются экспериментальные данные, позволяющие определить наиболее экономичный порядок замены железнодорожного оборудования действующих линий (в частности, рельсов). В. К. Зейденберг

2528. **Электронные цифровые вычислительные машины** (Electronic digital computers), Electr. J., 1955, **154**, № 7, 544—545 (англ.)

Сообщается об установлении сотрудничества двух английских фирм «Ферранти» и «Паурс-Сеймас» с целью организации производства электронных цифровых вычислительных машин. Фирма «Ферранти» (Ferranti первая в Англии начала промышленный выпуск боль

ших электронных цифровых вычислительных машин в 1951 г. Эти машины были установлены в Канаде, Голландии, Италии и т. д. Фирма «Паурс-Сеймас» (Powers-Samas) занимается производством оборудования по обработке перфокарт уже в течение 40 лет и имеет рынки сбыта по всему миру.

Фирма «Ферранти» выпускала сложные машины, стоимость которых была высока, в результате чего эти машины не находили применения в промышленности. В настоящее время эта фирма осваивает выпуск цифровых электронных машин средних размеров для обслуживания промышленности. Предполагаемая стоимость машины «Пегас» (Pegasus) 15 000 фунтов стерлингов. Фирма «Ферранти» будет производить электронную часть машины, а фирма «Паурс-Сеймас» — механическую часть. В конце статьи приведено изложение принципов работы цифровой электронной вычислительной машины. Б. И. Шитиков

2529. Наука и электроника (Science and electronics), Electr. Engng, 1954, **73**, № 1, 23—27 (англ.)

В обзоре приводятся данные о развитии вычислительной техники в последнее десятилетие:

Показатель цифровых машин	1943 г.	1953 г.
Число арифметических операций в 1 сек.	0,2	30 000
Объем быстродействующего запоминающего устройства	10	2 000
Скорость ввода-вывода	1	300

(объем быстродействующего запоминающего устройства указан в десятиразрядных десятичных числах; скорость ввода-вывода — в десятиразрядных десятичных числах в 1 сек.).

Указывается, что в течение 1953 г. расширилось применение больших универсальных машин и автоматически управляемого промышленного оборудования, а также проводились исследования по автоматическому программированию и по созданию полностью автоматизированных заводов. Приводятся некоторые сведения о новых материалах, применяемых в вычислительных машинах. В частности, указывается, что ежегодное производство ферритов в США достигает 5000 *т*. В качестве примера применения ферритов приведены краткие сведения о матричном запоминающем устройстве машины «Вихрь 1». О. В. Росницкий

2530. Как центральная вычислительная лаборатория может помочь промышленности. Клиппингер (How a Central Computing Laboratory can help industry. Clippinger Richard F.), Computers and Automat., 1953, **2**, № 9, 6—8 (англ.)

Сообщается, что лаборатория работает над проблемой уменьшения стоимости эксплуатации вычислительных машин. Главные затраты определяются программированием задач. Программирование некоторых задач требует от 5 до 10 человеко-лет и стоит от 10 000 до 100 000 долларов. Для уменьшения времени и затрат на программирование лаборатория работает над проблемой масштабов и разработкой методов решения с наибольшей сходимостью. Большое внимание уделяется разработке тест-программ и созданию библиотеки программ. Основной предпосылкой для этого является разработка единой системы кодирования для различных машин. В настоящее время лаборатория располагает обширной библиотекой программ. Уменьшение стоимости эксплуатации машин автор видит в применении наиболее эффективных методов решения, в сокращении времени простоев, в решении задач на подходящих для них машинах. В заключение автор перечисляет круг задач, решаемых в настоящее время на вычислительных машинах. Сюда он относит системы линейных алгебраических уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных, системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и матрицы.

Л. С. Легезо

2531. Об основных вопросах конференции. Энгстром (Keynote address. Engstrom Howard T.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, Dec. 8—10, 7 (англ.)

Вступительное слово председателя организационного комитета конференции. Кратко изложена тематика предыдущих конференций по вычислительным устройствам. На первой конференции (Филадельфия, декабрь 1951 г.) рассматривались вопросы, касающиеся конструкции действующих и находящихся в стадии разработки электронных вычислительных машин; вторая конференция (Нью-Йорк, декабрь 1952 г.) была посвящена устройствам ввода данных и вывода результатов; на конференции 1953 г. рассматривались вопросы эксплуатации, требования, предъявляемые к машинам, и вопросы надежности работы. Приведен краткий обзор стадий развития вычислительной техники. Автор считает, что к 1953 г. были закончены разработки схем основных узлов машин: запоминающих и арифметических устройств, магнитной записи, систем ввода и вывода, а также конструктивные разработки этих элементов.

В настоящее время более актуальными являются вопросы, связанные с применением машин: определение требований к машинам в зависимости от области использования, вопросы надежности их работы. Возможность создания машин, работающих в истинных масштабах времени, позволяет ставить вопрос о широком использовании вычислительной техники в схемах комплексной автоматики для управления воздушным транспортом, технологическими процессами. В этих случаях особое значение приобретают вопросы надежности и совершенства конструкций. На конференции предполагалось также рассмотреть материалы, касающиеся опыта эксплуатации действующих машин, и вопросы надежности отдельных узлов и элементов.

Автор считает, что совершенство конструкций современных машин позволяет ставить вопрос об их широком внедрении. Указывается, что вычислительные машины широко используются в военном деле, но из соображений секретности эти вопросы на конференции не обсуждались. Л. Н. Дашевский

2532. Названия и краткое содержание статей, представленных на собрании Ассоциации вычислительной техники в Энн Арбор, Мичиган в июне 1954 г. (Association for Computing Machinery meeting, Ann, Arbor. Michigan, June 1954.— Titles of papers and abstracts), Computers and Automat., 1955, **4**, № 4, 15—28, 33—36 (англ.)

Приводятся названия и краткое содержание 110 статей, представленных на собрание Ассоциации вычислительной техники в Энн Арбор в июне 1954 г. Статьи посвящены описаниям новых вычислительных машин, применению машин для целей управления, контролю вычислений, технике автоматического программирования, новым элементам вычислительных машин, запоминающим устройствам, численным методам решения различных задач и ряду других вопросов.

И. В. Соловьев

2533. Восточная конференция по вычислительным машинам, декабрь 1954 г. Столлер (Eastern joint computer conference, Philadelphia. Dec. 8-10,

1954, Stoller Milton), Computers and Automat., 1955, **4**, № 1, 14, 17 (англ.)

В декабре 1954 г. в Филадельфии состоялась объединенная конференция и выставка на тему «Конструкция и применение малых вычислительных машин», т. е. машин стоимостью менее 150 000 долларов, потребляющих менее 20 *квт* мощности. В конференции принимали участие 3 организации: Ассоциация вычислительной техники (Association for Computing Machinery), Институт радиоинженеров и Американский институт электроинженеров. Всего присутствовало около 1700 человек.

На выставке были представлены: вычислительная машина фирмы ИБМ на кристаллических триодах; регистр на магнитных сердечниках и кристаллических триодах; система динамических блоков, которые могут быть использованы для цепей управления, запоминания и в арифметических устройствах на частоте 1 *Мгц* и т. д. Приведен список 32 фирм, представивших свои экспонаты на выставку. М.П.Сычева

2534. **Новые авиационные приборы. Класс** (Wescon Unveils new avionic devices. Klass Philip), Aviat. Week, 1954, **61**, № 13, 70, 72, 74, 78 (англ.)

На выставке по электронике в Лос-Анжелосе среди прочих экспонатов были представлены следующие приборы:

1. Кристаллический триод новой конструкции фирмы «Белл», имеющий между базой и коллектором слой нейтрального германия (триод типа *p-n-i-p*). Такие триоды могут работать до частот порядка 3000 *Мгц* (демонстрировавшийся образец генерировал на частоте 440 *Мгц*).

2. Шасси для радиооборудования, применяющегося в управляемых снарядах. Шасси обычного типа резонирует при вибрациях, имеющих место в управляемых снарядах, что приводит к выходу из строя отдельных ламп и соединений. На выставке демонстрировалась жесткая конструкция шасси, имеющая собственную частоту свыше 5000 *гц*, что значительно выше частот обычных вибраций в управляемых снарядах.

3. Цифровой дифференциальный анализатор на 20 интеграторов, построенный фирмой CRC, занимающий вместе с источниками питания объем 0,1 $м^3$. В анализаторе использовано 14 ламп и 180 диодов.

4. Фирма «Белл» предложила для кристаллических триодов защитное покрытие из свинцового сурика, предохраняющее поверхность триода от действия влаги и связанного с этим изменения параметров и выхода триода из строя.

5. На выставке были также представлены схемы обратной связи для кристаллических триодов, компенсирующие температурные изменения параметров триодов. Н. М. Павлов

2535. **Потребность вычислительной машины** (Computer need), Business Week, 1954, № 1292, 158, 160, 162 (англ.)

Изложена история создания курсов по вычислительной технике при компании «Юнайтед Эйркрафт Корпорейшн» (United Aircraft Corp.). На курсах к 1954 г. площадь, занимаемая вычислительными машинами, достигла 685 $м^2$; личный состав вырос до 40 операторов и программистов. В. К. Зейденберг

2536. **Сбор материалов по эксплуатации автоматических цифровых вычислительных машин. Форсайт** (Collection of material on exploitation of automatic digital computers. Forsythe George E.), Computers and Automat., 1955, **4**, № 7, 31 (англ.)

Письмо от имени библиотечного комитета исследовательской группы по применению методов численного анализа математического отдела Калифорнийского университета. Эта организация приняла на себя ряд функций упраздненного Института численного анализа Национального бюро стандартов. Письмо содержит просьбу присылать в библиотеку один экземпляр всевозможных периодических изданий, монографий, справочников, библиографических указателей, сообщений о всевозможных курсах и прочей литературы по вопросам кодирования и программирования математических и логических задач на вычислительных машинах и опыту работы на них. В. К. Зейденберг

2537. **Область вычислительной техники: обслуживание и продукция для продажи. Первый список, сводный информация на 20 апреля 1955 г.** (The computer field: products and services for sale (First edition: cumulative, information as of April 20, 1955), Computers and Automat., 1955, **4**, № 6, 118—134, 136, 138, 140, 142, 144, 146 (англ.)

Перечень фирм и организаций, выпускающих продукцию, а также выполняющих разного рода услуги или выпускающих информацию по отдельным вопросам и элементам вычислительной техники. Приводятся следующие сведения: полное название фирмы и адрес, название продукции или вида услуг, краткое описание продукции, использование продукции, примерная стоимость для продажи или аренды. Перечень составлен по каждому виду деталей, узлов или целых конструкций вычислительных машин и по видам услуг. В. К. Зейденберг

2538. **Как сделать «дикие» проблемы разрешимыми** (How to make wild ideas worth-while), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 3, 325 (англ.)

Сообщение фирмы «Гудиир» (Goodyear Aircraft) о новом вычислительном устройстве ГЕДА, сокращающем время на эксперименты при проектировании нового оборудования. («Дикими» здесь называются проблемы, требующие для своего разрешения больших затрат времени и денег.) ГЕДА содержит элементы для решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, шестиканальные записывающие устройства и другие узлы. Н. Ф. Семикова

2539. **Счетная машина, заменяющая десять тысяч счетных работников. Фарнборо** (Une machine à calculer qui remplace dix mille calculateurs. Farjaud Henri), Sci. et vie, 1955, **87**, № 449, 108—111 (франц.)

В Фарнборо (Англия) закончено сооружение самой большой в Англии счетной машины непрерывного действия ТРИДАК (TRIDAC), предназначенной для изучения полета на большой скорости самолетов и управляемых снарядов. См. РЖМат, 1955, 4048, 4049, 6180—6184. В. К. Зейденберг

2540. **Дифференциальный анализ с большой скоростью** (Differential analysis at high speed), Electr. Times, 1955, **127**, № 3310, 613—614 (англ.)

Кратко описано универсальное моделирующее устройство, разработанное Институтом электроинженеров (IEE) для циклической работы, дающее до 25 000 решений в 1 сек. и изображение решений в 3 и 4 измерениях. И. С.

2541. **Новое моделирующее устройство. Томас** (A new analogue computer. Thomas E. Lloyd), Mech. World and Engng Rec., 1953, **133**, № 341, 462—467 (англ.)

Описано моделирующее устройство фирмы «Шорт» (Short Brothers) (РЖМат, 1954, 3495). Представляет интерес описание метода корректировки дрейфа выходного напряжения усилителей постоянного тока. В течение половины каждого такта все входные клеммы всех усилителей устройства замкнуты, а к выходным клеммам подключен конденсатор, заряжающийся напряжением разбаланса. Во время рабочей половины такта конденсатор включается последовательно с усили-

телем. Такая система устраняет необходимость периодической (и практически довольно частой) поверки и регулировки баланса усилителей. М. Л. Цетлин

2542. Новое моделирующее устройство. Томас (A new analogue computer. Thomas E. Lloyd), Engineering, 1953, **176**, № 4576, 477—479 (англ.)

Краткое описание моделирующего устройства фирмы «Шорт», предназначенного для решения линейных дифференциальных уравнений (РЖМат, 1954, 3495; 1956, 2541). М. Л. Цетлин

2543. Гигантские вычислительные машины на службе у управляемых снарядов и сверхзвуковых самолетов. Монтефинале (Calcolatrici giganti al servizio dei missili e degli aerei supersonici. Montefinale Gino), Sapere, 1955, **41**, № 485/486, 111—113 (итал.)

Сообщается о двух вычислительных машинах для моделирования полета управляемых снарядов ТРИДАК (TRIDAC) и АГВАК (AGWAC) (РЖМат, 1955, 4048—4049, 6180—6184). И. В. Соловьев

2544. Электроинтегратор ЭГДА-3. Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И., Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 1, 112—120

Интегратор ЭГДА-3 предназначен для решения задач фильтрации, которые описываются уравнением Лапласа. В основу метода решения положен метод электрогидродинамических аналогий, разработанный акад. Н. Н. Павловским.

В качестве проводящей среды используется электропроводная бумага или картон, при решении пространственных задач — электролитическая ванна. Прибор состоит из питающего генератора, измерительного устройства и панели моделирования задач. Рабочая частота выбрана в диапазоне 200—6000 *гц*. Мощность на выходе генератора 50 *вт*. Для уменьшения контактной разности потенциалов, вносящей искажения, применяются посеребренные шины. Приведены принципиальные схемы генератора и измерительного устройства. Граничные условия вводятся делителем напряжений. Измеряемое напряжение снимается с модели иглой. Техника решения задач на ЭГДА-3 не отличается от обычной, описанной в литературе. Дается решение типичной задачи фильтрации, и на другом примере выясняется влияние неоднородности электропроводного картона на точность результатов. При неоднородности порядка $\pm 10\%$ достигается точность порядка $\pm 1\%$. А. М. Егоров

2545. Моделирующее устройство для определения тепловых характеристик мотора (Analog computer predicts motor thermal performance), Electr. Manufact., 1953, **53**, № 4, 390 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженерал Электрик» (General Electric) об электронном моделирующем устройстве специального назначения ЭТАК (ETAC — Electronic Thermal Analog Computer). Прибор позволяет быстро решать различные задачи, связанные с тепловым расчетом небольших электродвигателей, применяемых в самолетах, с учетом принудительной конвекции, охлаждения и пр. Результаты получаются в виде кривой «температура — время» на калиброванной электронолучевой трубке. Входные данные можно менять в широких пределах. Прибор пригоден также для решения других задач, которые сводятся к цепи, содержащей четыре или менее контура. Точность в пределах 3%. А. М. Егоров

2546. Моделирующее устройство для тепловых расчетов (Thermal analog computor), Instruments, 1953, **26**, № 12, 1912, 1914 (англ.)

См. реф. 2545.

2547. Моделирующее устройство для вычисления комплексного коэффициента отражения тела по отражаемой им мощности. Энон (Machine analogique pour le calcul de l'indice complexe d'un corps à partir de son pouvoir réflecteur. Hénon Michel), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 12, 1305—1306 (франц.)

Описывается моделирующее устройство на постоянных сопротивлениях для вычисления комплексного коэффициента отражения тела по отражаемой телом мощности. И. С.

2548. Тепловой вычислительный элемент (Thermal element activates computers), Aviation Week, 1954, **60**, № 13, 45—46 (англ.)

Сообщение фирмы «Арма» о выпуске вычислительного теплового элемента. См. РЖМат, 1955, 2454. П. В. Тихонов

2549. Обсуждение решения гидравлических проблем на моделирующем устройстве. Вин, Бейнс, Бленч, Главер, Хеберт, Дом (Discussion of solution of an hydraulic problem by analog computer (Published in June, 1952). Venn J. van, Baines W. Douglas, Jr, Blench T., Glover R. E., Hebert D. J., Daum C. R.), Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1953, **79**, № D-134, 1—11 (англ.)

Сообщается, что для изучения приливных течений в заливах и решения других задач гидравлики немецкие инженеры используют три метода: чисто математическое исследование, гидравлическое моделирование и электрическое моделирование. Хорошие результаты дает совместное использование всех трех методов. Обсуждаются преимущества и недостатки моделирующего устройства перед гидравлической моделью. А. А. Красилов

2550. Вспомогательные средства для расчета электрических сетей: моделирующие и другие вычислительные устройства. Каэн (Les auxiliaires du calcul des réseaux électriques: modèles, analogues, calculateurs. Cahen François), Bull. Soc. franç. électriciens, 1954, 7 sér., **4**, № 39, 117—137 (франц.)

Первыми вычислительными устройствами для расчета электрических сетей были расчетные столы, впервые появившиеся в практике более двадцати лет тому назад. Первые установки подобного рода работали на постоянном токе и предназначались для расчетов тока короткого замыкания с использованием для несимметричных случаев метода симметричных составляющих. Сейчас расчетные столы работают как на постоянном, так и, главным образом, на переменном токе и обслуживают различные области техники. В настоящее время вычислительные устройства, применяемые при расчетах электрических систем, подразделяются на моделирующие и цифровые. К группе моделирующих устройств относится широкий класс различных систем.

1. Масштабные модели выполняются с соблюдением законов подобия; они дают решение задачи в уменьшенном против реальной системы масштабе. Эти модели не имеют универсального характера, так как каждая из них моделирует одну конкретную установку.

2. Расчетные столы применяются при проектировании и эксплуатации электрических систем. Элементы расчетных столов служат для замещения реальных генераторов, линий, трансформаторов, нагрузок и пр. Комбинируя элементы расчетного стола, можно собрать схему произвольной системы и на этой схеме выполнить необходимые расчеты.

3. Динамические модели более приближаются к действительным системам, чем расчетные столы, и дают больше возможностей для широкого изучения систем, особенно в области переходных и несимметричных режимов, например, исследования статической и динамической устойчивости, динамических перенапряжений, несимметричных коротких замыканий, раз-

рывов линий. Генераторные единицы динамической модели представляют собой трехфазные синхронные машины со специально подобранными характеристиками. Сети замещаются схемами замещения, как и в расчетных столах, но трехфазными и четырехпроводными. Результаты исследований наблюдаются на электронных или шлейфовых осциллографах.

4. Дифференциальные анализаторы непрерывного действия используются для исследования быстропротекающих переходных процессов, связанных с особенностью электрических систем (цепи с распределенными постоянными и т. д.) и имеют более узкую область применения.

Цифровые вычислительные машины и цифровые дифференциальные анализаторы применяются для численного решения уравнений, описывающих процессы в электрических сетях. А. А. Крюков

2551. **Вычислительная машина решает энергетические проблемы** (Computer handles power problems), Tele-Tech, 1954, **13**, № 9, 12 (англ.)

Краткое сообщение о том, что Франклиновский институт пустил в эксплуатацию расчетный стол переменного тока, который был построен компанией «Вестингауз Электрик» (Westinghouse Electric). Машина предназначена для решения сложных вопросов, возникающих при эксплуатации энергетических систем. Стоимость машины 400 тыс. долл. П. В. Тихонов

2552. **Схемы блоков счетной машины, работающей на частоте 4 *Мгц*. Зимбел** (Packaged logical circuitry for 4 *mc* computer. Zimbel Norman), Convent. Rec. I. R. E., 1954, **4**, 133—139 (англ.)

Описываются некоторые блоки для быстродействующей счетной машины параллельного типа, работающей при максимальной частоте повторения импульсов в 4 *Мгц*. В этой машине употребляются двухламповые блоки трех типов. Блок первого типа осуществляет логические операции, усиление, инвертирование и восстановление формы сигнала. Он состоит из логической пирамиды на германиевых диодах, неинвертирующего усилителя с фазирующей линией задержки и инвертирующего усилителя. В обоих усилителях производится регенерация импульсов. Блок второго типа содержит два независимых усилителя мощности, блок третьего типа — двенадцать линий задержки, электрическая длина которых равна времени между двумя импульсами. Описывается принцип действия и приведены схемы отдельных узлов блока первого типа. Л. В. Кутуков

2553. **Съемные блоки и связанное с ними оборудование цифровых вычислительных машин. Гаррис, Мак-Намара** (Digital computer plug-in units and associated equipment. Harris J. N., McNamara F. L.), Electr. Engng, 1955, **74**, № 4, 326—329 (англ.)

Описание конструкции съемных блоков, шасси для них и стойки для крепления 24 таких шасси, разработанных Линкольновской лабораторией Массачусетского технологического института применительно к счетным схемам.

Монтаж съемного блока печатный, методом травления. Блоки одноламповые, габарит блока (исключая ручку) 9,8×17,8×2,5 *см*. Блок, представляющий электромагнитную линию задержки на 1,5 *мксек*. с выводами через 0,1 *мксек*, вдвое толще. Разработаны стандартные блоки, такие как быстродействующий и низкочастотный триггеры, вентиль, катодный повторитель, генератор импульсов, инвертор, блокинг-генератор и пр., а также ряд специальных блоков. Блоки имеют цветную маркировку. Во всех схемах блоков используется 3 типа малогабаритных ламп 5965, 5687 и 7АК7.

Шасси служит для объединения 15 блоков. Панели шасси имеют гнезда, что позволяет внешним монтажом коммутировать блоки в различные логические схемы. Шасси крепятся на общей стойке, в нижней части которой расположены трансформаторы накала, вентилятор и вспомогательный источник питания для профилактической проверки работоспособности схем. Этот вспомогательный источник питания может включаться с любым из питающих напряжений, позволяя варьировать последний в пределах ± 100 *в*. Приведены фотографии блоков, шасси и стойки. В. К. Зейденберг

2554. **Машина-автомат стоимостью в 90 000 долларов** ($ 90 000 automated machine), Fortune, 1955, **51**, № 4, 183 (англ.)

Сообщение о машине-автомате, построенной фирмой «Дженерал Милс» (General Mills) при содействии фирмы ИБМ и используемой последней для сборки отдельных блоков вычислительных машин, применяемых в противовоздушной обороне. Машина имеет 24 головки, которые автоматически укрепляют радиодетали на печатных схемах, продвигаемых конвейером под головками. Головки заменяемые; печатные схемы могут иметь разные размеры. Машина, обслуживаемая тремя человеками, собирает 50 000 блоков за 40-часовую неделю,— столько же, сколько могут собрать вручную 100 человек за пять недель работы. Приведены две фотографии частей машины. В. К. Зейденберг

2555. **Механизированный сборщик строит вычислительные машины для авиации** (Mechanized assembler builds Air Force computers), Electronics, 1955, **28**, № 3, 8, 10 (англ.)

См. реф. 2554. Машины автоматически устанавливают детали в пробитые дырки панелей с печатными схемами, обеспечивая хорошее механическое соединение перед пайкой и укладывая все детали на определенном расстоянии от панели, что необходимо, когда печатные провода находятся с обеих сторон. Машина сигнализирует о неисправности или отсутствии деталей. Она может быть отрегулирована для работы с панелями печатных схем от 50 до 127 *мм* в ширину и длину. Приведены фотографии машины и собранной панели. О. С. Потураев

2556. **Счетное устройство с применением многоэлектродных разрядных трубок с холодными катодами. Кандиах** (A scaling unit employing multi-electrode cold-cathode tubes. Kandiah K.), Proc. Instn. Electr. Engrs, 1954, **101**, part 2, № 81, 227—238, 260, 261 (англ.)

Описано счетное устройство на десятичных счетных лампах типа CV2271 и VX9108. Устройство обладает разрешающей способностью в 50 *мксек*. Подробно описываются существующие схемы покаскадного соединения счетных ламп. Приводится принцип работы ламп и их параметры. Н. А. Капцов

2557. **Множительное устройство непрерывного действия, изготовленное на тирите. Ковач, Камли** (An analog multiplier using thyrite. Kovach L. D., Comley W.), Trans. I. R. E., 1954, **EC-3**, № 2, 42—45 (англ.)

Тирит — вещество, изготовляемое из окиси кремния и подходящей керамики обработкой под высоким давлением и нагревом при высокой температуре (Schwertz F. A., Mazenko J. J., J. Appl. Phys., 1953, **24**, 1015). Он обладает нелинейным сопротивлением. Вольтамперная характеристика имеет вид $I = KE^n$, причем обычно n меняется от 2,49 до 3,36. Сопротивление из тирита можно использовать как элемент схемы, напряжение на выходе которого пропорционально квадрату напряжения на входе с точностью около 1,25%. Приводятся характеристики тирита и схемы его использования в вычислительных машинах. В. С.

2558. **Долговечность сверхминиатюрных ламп прямого накала. Вуд** (Reliability of filamentary subminiature tubes. Wood Ross), Proc. Nat. Electronics Confer., Chicago, 1953, **8**, 562—567 (англ.)

Рассматриваются некоторые причины выхода из строя ламп. Сравнение ламп прямого и косвенного накала показывает, что срок службы у последних меньше. Из 50 000 сверхминиатюрных ламп прямого накала, изготовленных фирмой «Райтеон» (Raytheon), в течение 47 млн. лампо-часов вышла из строя 821 лампа (или 1 лампа на 58 000 лампо-часов), из них 16 ламп вышли из строя из-за повреждения стекла, 120 — из-за механических повреждений и 685 были забракованы из-за ухода параметров. И. С.

2559. **Цифровая вычислительная техника** (Automatic digital computation), Electr. Rev., 1954, **155**, № 14, 525—526 (англ.)

Приведены тезисы некоторых статей в трудах международной конференции по цифровой вычислительной технике, созванной в 1953 г. Национальной физической лабораторией (Англия), а также некоторые сведения об элементах цифровых вычислительных машин: упоминается о разработке в Мадриде феррорезонансных триггеров на ферритовых сердечниках с несущей 1 *Мгц* и скоростью работы до 150 *кгц*; приведены сведения о стоимости запоминающего устройства (з. у.) на ртутных линиях задержки в машине АКЕ (ACE pilot model), которая составляет 10 фунтов стерл. на 32-разрядный код, причем две трети стоимости падает на схему управления. Указывается, что скорость работы з. у. с магнитострикционными линиями задержки только в 2—3 раза ниже, чем скорость работы з. у. с электростатическими трубками, причем у магнитострикционных линий нет ограничений, налагаемых коэффициентом окружного считывания (read-around ratio), а сигнал на выходе короткой магнитострикционной линии при частоте в 330 *кгц* на 40—50 *дб* выше уровня сигнала на выходе электростатической трубки. Указывается на преимущества сочетания параллельного запоминания чисел в электростатическом з. у. с последовательным способом счета, дающего значительную экономию ламп при сравнительно высокой скорости счета. О. В. Росницкий

2560. **Новое магнитное запоминающее устройство** (New magnetic «memory»), Electr. Weekly, 1955, **40**, № 2, 22 (англ.)

Краткое сообщение о запоминающем устройстве на магнитных сердечниках, выполненном фирмой «Маллард» (Mullard Ltd). См. РЖМат, 1955, 5407. О. В. Росницкий

2561. **Индитрон** («Inditron» tube), Tele-Tech, 1954, **13**, № 5, 95 (англ.)

Сообщение фирмы «Нейшнл Юнион Радио» (National Union Radio Corp.) о выпуске новой электронной лампы «индитрон», которая позволяет фиксировать цифровую информацию. Предполагают, что индитрон может заменить механические фиксирующие устройства в различном оборудовании, требующем быстрой фиксации информации. А. В. Аваев

2562. **Магнитное запоминающее устройство** (Magnetisch geheugen), Electronica, 1954, **7**, № 139, 3 (голл.)

Популярное изложение принципа действия запоминающего устройства на магнитном барабане, установленного на одной английской вычислительной машине. В. Д. Князев

2563. **Одноканальные и многоканальные магнитные головки** (Single and multi-channel magnetic recording heads), Computers and Automat., 1954, **3**, № 4, 31 (англ.)

Сообщение фирмы «Райтеон» (Raytheon) о выпуске универсальных магнитных головок на один и несколько каналов. Многоканальные головки собираются в виде пакета из одноканальных головок. А. И. Щуров.

2564. **Широкополосные линии задержки из плавленого кварца, с большим динамическим диапазоном предназначенные для счетных машин с увеличенной емкостью запоминающих устройств. Спейт, Роджерс, Джонсон** (Wide-band large-dynamic-range fused-quartz delay lines for increased-capacity high speed computer memories. Spaeth D. A., Rogers T. F., Johnson S. J.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, **6**, № 1, 74—76 (англ.)

Сообщается о разработке линии задержки из плавленого кварца, работающей на несущей частоте в 40 *Мгц*. Низкий уровень ложных сигналов позволяет работать в динамическом диапазоне до 40 *дб*. Время задержки до 40 *мксек*. Кратко описаны оптические методы исследования кварца с целью обнаружения воздушных пузырьков и внутренних напряжений. Указывается на возможность использования дешевых сортов кварца. Л. В. Кутуков

2565. **Линии задержки** (Delay lines), Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, № 1, 105—106 (англ.)

Сообщение фирмы «Адванс Электроникс» (Advanced Electronics Co.) о выпуске электромагнитных линий задержки нескольких типов с волновым сопротивлением в 1850 *ом* и временем задержки в 0,5; 0,7 и 0,9 *мксек*. Фазовый сдвиг не превышает 4° при частоте в 10 *Мгц*, затухание не превышает 3 *дб* при частоте в 6 *Мгц* и времени задержки в 0,5 *мксек*. Приведена фотография. Л. В. Кутуков

2566. **Линии задержки** (Delay lines), Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, № 1, 104—105 (англ.)

Сообщение фирмы «Хелипот» (Helipot Corp.) о выпуске серии электромагнитных линий задержки с распределенными постоянными, имеющих непрерывную регулировку времени задержки. Указывается, что полоса пропускаемых частот этих линий задержки достигает 20 *Мгц*, выброс и фазовые искажения малы. Общее время задержки линий 0,2 и 0,3 *сек*., волновое сопротивление 1350 *ом*, затухание 3 *дб* на частоте в 25 *Мгц*. Л. В. Кутуков

2567. **Запоминающие устройства для вычислительных машин. Бострём** (Minnen för beräkningsmaskiner. Boström Lennart), Tekn. tidskr., 1955, **85**, № 1, 9—10 (швед.)

Краткий обзор запоминающих устройств (з.у.) для вычислительных машин. Объясняются функции з. у. в цифровой вычислительной машине, и обсуждаются различные виды з.у. Отмечаются недостатки з. у. на реле, электронных лампах и полупроводниковых триодах. Подробнее рассмотрены ферроэлектрические, феррорезонансные и ферромагнитные элементы. Автор считает их более перспективными. Объясняется принцип их действия и указываются достоинства и недостатки. Упоминается об электростатическом з. у. и о з.у. на линиях задержки. Отмечается, что вычислительные машины используют несколько видов з. у. Г. Н. Поваров

2568. **Цифровой шифратор напряжения. Цвейциг** (A digital voltage encoder. Zweizig J. R.), Trans. I. R. E., 1954, **EC-3**, № 3, 25—28 (англ.)

Шифратор предназначен для преобразования напряжения в цифровую форму, имеет два канала, работающих со скоростью 40 измерений в 1 *сек*. от входного сигнала амплитудой до 1 *в*. Точность шифратора при преобразовании в десятиразрядные двоичные числа составляет $\pm 0{,}1\%$. При использовании усилителей постоянного тока с прерывателем шифратор может работать от сигнала 10 *мв*. Каждый канал шифратора состоит из компаратора, блока стандартных напряжений, периодизатора, релейного блока,

сумматора, преобразователя импульсов и магнитной записывающей аппаратуры.

Подлежащее шифрации входное напряжение сравнивается (вычитается) с максимальным стандартным напряжением и при получении положительной разности регистрирующая аппаратура записывает 1, затем полученная разность сравнивается со следующим, меньшим по абсолютной величине стандартным напряжением, в случае получения отрицательной разности регистрирующая аппаратура записывает 0, а исходное напряжение вновь сравнивается, но с меньшим стандартным напряжением и т. д. до получения десятицифрового результата. Двухканальный шифратор выдает десятиразрядное двоичное число за 25 мсек. Точность работы шифратора определяется точностью стандартных напряжений, а также чувствительностью и стабильностью компаратора. Приводятся схемы шифратора, фотография шифратора и список литературы. П. В. Тихонов

2569. **Автоматический преобразователь данных** (Automatic data reducer), Aviat. Week, 1954, **60**, № 14, 56 (англ.)

Сообщение фирмы «Локхид» (Lockheed Aircraft) о разработке автоматического преобразователя данных, который рассортировывает и записывает полученные с помощью телеизмерения данные о полете самолета или управляемого снаряда на 4-дорожечную магнитную ленту. Далее данные переводятся в двоичную систему и перезаписываются на перфокарты для последующего использования автоматическими вычислительными машинами или самописцами. Одна из дорожек ленты является синхронизирующей, на другой записывается вибрация, две остальные содержат другие исследуемые данные. Прибор сокращает время преобразования данных с нескольких недель до двух-трех дней. В. К. Зейденберг

2570. **Преобразователь углового перемещения в цифровую форму** (Agnle-to-digits converter), Instruments, 1953, **26**, № 5, 682 (англ.)

Сообщение фирмы «Толер энд Купер» (Taller and Cooper, Inc.) о выпуске новой модели преобразователя величины потока, температуры, давления в цифровую форму. Устройство получает данные в виде углового перемещения вала и переводит его в двух- или трехзначные числа; оно может также управлять печатающим устройством, перфоратором, пишущей машинкой и т. д. В. К. Зейденберг

2571. **Автоматизация через цифровое преобразование. Уэйсс** (Automation via digital conversion. Weiss M. D.), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 6, 926—927 (англ.)

Приводятся общие соображения относительно возможности и целесообразности использования цифровых преобразователей (квантизаторов), переводящих непрерывно меняющиеся величины в цифровые, для перехода к полной автоматизации заводов и к управлению ими на расстоянии. Приводятся схемы логических связей в таких системах управления. В. К. Зейденберг

2572. **Быстродействующая автоматическая пишущая машинка** (Faster than 300 secretaries), Business Week, 1954, № 1290, 108, 110, 112 (англ.)

Сообщение фирмы «Шепард» (Shepard) о разработке быстродействующей автоматической пишущей машинки. Вал, идущий параллельно рулону бумаги, вращается с постоянной скоростью 1200 об/мин. На валу размещены металлические кольца. На каждом из них выбит полный набор знаков: буквы, цифры, знаки препинания и т. д., причем одинаковые знаки всех колец расположены в ряд. Входные данные поступают в машинку с перфокарт или магнитной ленты и дешифрируются механическим дешифратором, который определяет, например, в каких местах очередной строки должны быть отпечатаны буквы «А». Когда ряд букв «А» проходит мимо этой строки, специальные кулачки прижимают к кольцам соответствующие участки бумаги. Таким же образом отпечатываются и другие знаки. Вся строка в 120 знаков отпечатывается за 1/15 сек., таким образом скорость записи машинки 1800 знаков в 1 сек. Машинка может быть использована для записи выходных данных цифровой вычислительной машины. С. Е. Жорно

2573. **Генерирование нелинейных функций с помощью линейных потенциометров. Левенстейн** (Generating nonlinear functions with linear potentiometers. Levenstein Harold), Tele-Tech, 1953, **12**, № 10, 76—78, 177—180 (англ.)

Излагаются электрические способы решения задачи получения нелинейной функции угла поворота оси потенциометра в цепи, состоящей из каскада линейных потенциометров и усилителей, причем каждый усилитель питает свой потенциометр, с выхода которого подается сигнал на следующий усилитель. Выходные напряжения усилителей суммируются и представляют искомую функцию вида $Y = A + BX + CX^2 + DX^3$ с достаточной степенью точности (2÷4%).

Дается представление о получении степенных рядов с помощью сильно нагруженных потенциометров. Хорошие результаты дает применение четырехполюсников, составленных из постоянных сопротивлений и реостатов, с которых снимаются линейно-убывающие и линейно-возрастающие напряжения. Так, ошибка при получении тригонометрического синуса не превышает 0,015, а гиперболического синуса $2{,}0\times10^{-4}$. В. П. Разроев

2574. **Операционный усилитель для следящей системы. Фрид Е., Выдревич М., Гордон А.,** Сб. статей науч. студ. о-ва Моск. энерг. ин-та, 1953, 29—41

Сообщается о разработанном и построенном в Лаборатории авторегулирования и следящих систем МЭИ электронном устройстве для следящей системы, формирующем сигнал управления исполнительным двигателем. Устройство является операционным усилителем, осуществляющим интегро-дифференциальные и алгебраические операции над входными напряжениями. В качестве операционных каскадов используются усилители постоянного тока с отрицательной обратной связью. Операции обеспечиваются соответствующими активными и емкостными сопротивлениями на входах и в цепях обратной связи. Блоки дифференцирования и интегрирования выполнены для уменьшения дрейфа «нуля» по схеме балансного двухкаскадного усилителя (2 лампы 6Н9) с первой лампой, работающей в режиме малых токов. Коэффициент усиления усилителя с разомкнутой цепью обратной связи около 1000. Эквивалентная постоянная времени дифференциатора равна 10^{-3} сек., интегратора — 10^3 сек. Сумматор представляет собой трехкаскадный усилитель с лампой 6П3 на выходе. Входной каскад усилителя — балансный на лампе 6Н9, предварительный — на лампе 6Ж7. Усилитель имеет коэффициент усиления при разомкнутой цепи обратной связи около 2000 и работает на обмотку возбуждения электромашинного усилителя сопротивлением 2500 *ом*, обеспечивая выходные токи ± 26 *ма*. Приводится скелетная и принципиальная схема операционного усилителя и известные соотношения для коэффициентов передач операционных блоков и оценки вносимых ими ошибок при выполнении интегро-дифференциальных операций.

Указывается, что для того чтобы операционные каскады работали с малыми ошибками, постоянная времени дифференцирующей цепи должна быть много меньше, а интегрирующей цепи — много больше наи-

большей постоянной времени цепи автоматического регулирования. Г. М. Грязнов

2575. **Измерение коэффициента усиления операционных усилителей. Джонсон** (Gain measurements on computing amplifiers. Johnson A. B.), Electronic Engng, 1955, **27**, № 325, 127—129 (англ.)

Изложены методы измерения коэффициента усиления операционных усилителей моделирующих устройств. Описаны три прямых метода, основанных на измерении коэффициента усиления при разомкнутой обратной связи в усилителе, и четыре косвенных метода, основанных на измерении некоторых параметров усилителей, связанных с коэффициентом усиления (например, выходной импеданс, входной импеданс,ошибка вычислений, время заряда емкости обратной связи). При этом обратная связь замкнута. Приведены схемы для каждого метода. П. В. Тихонов

2576. **Прецизионный калибратор для моделирующих установок** (Super-regulated calibrator for analog computers), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 12, 36A (англ.)

Сообщение фирмы «Радиэйшен» (Radiation) о выпуске блока стандартных напряжений и токов M-DC-2. На выходе блока устанавливаются напряжения (или ток) от 0 до 109,99 *в* (или *ма*) с шагом 0,01 *в* (*ма*). Прибор обеспечивает точность 0,05% к определяемому выходу (или 0,005% от максимального выхода). Блок может быть использован в моделирующих устройствах, в телеизмерении, записывающих устройствах, а также является надежным источником напряжения и тока.

В другом блоке стандартных напряжений M-DC-3 напряжение устанавливается до 509,99 *в*.

П. В. Тихонов

2577. **Точные потенциометры для моделирующих устройств. Блатнер** (Precision potentiometer for analog computers. Blattner D. G.), Bell Labs Rec., 1954, **32**, № 5, 171—177 (англ.)

Фирмы «Белл» и «Уэстерн Электрик» производят потенциометры для систем управления артиллерийским огнем. Выпускаются потенциометры, вырабатывающие до 27 различных функций в зависимости от угла поворота оси потенциометра. Дается краткое описание технологии изготовления и несколько примеров применения потенциометров в системах управления артиллерийским огнем. Указывается на очень высокую степень точности. Один из типов потенциометров дает ошибку прицеливания примерно 5,5 *м* на 30 *км*. В. П. Разроев

2578. **Новая схема стабилизации нуля усилителя моделирующих устройств. Хеймер** (A stabilized driftless analog integrator. Hamer Howard), Trans. I. R. E., 1954, **EC-3**, № 4, 19—20 (англ.)

Отмечается два наиболее существенных источника ухода выходного напряжения усилителя моделирующего устройства: нестабильность усилителя и ток сетки входной лампы. Уход, вызванный нестабильностью усилителя, ослабляется добавлением стабилизирующего усилителя с прерывателем.

Существующие три метода уменьшения ухода выходного напряжения усилителя, обусловленного входным током: увеличение емкости обратной связи, емкостной вход усилителя и питание первой лампы усилителя током источника напряжения — имеют большие недостатки. В связи с этим предлагается новая мостовая схема стабилизации, легко получающаяся из схемы стандартного интегратора, состоящего из главного и стабилизирующего усилителей, добавлением двух пассивных элементов. Приведен простой расчет схемы. Указывается, что фирмой «Электроник Ассошиэйтс» (EAI) получены экспериментальные результаты исследования схем: для схемы стандартного интегратора уход напряжения равен 10 *мв* в течение 104 сек, для новой схемы компенсированного интегратора максимальный уход за то же время равен 0,4 *мв*, т. е. уменьшен в 25 раз, причем указывается, что более точный подбор пассивных элементов позволит еще сильнее уменьшить уход. А. М. Егоров.

2579. **Генератор для моделирующих устройств** (Analog stimulus generator), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 10, 1007 (англ.)

Сообщение фирмы «Филбрик» (George A. Philbrick Researches Inc.) о разработке генератора, который используется в быстродействующих моделирующих устройствах с периодической работой для запуска, а также как вспомогательное оборудование при калибровке таких устройств. Генератор работает на частоте 20 *гц*, что обеспечивает получение интервалов решения в 40 мсек. В качестве питающих напряжений используются постоянные напряжения ± 300 *в* с потреблением по 60 *ма* и переменное напряжение 115 *в* с потреблением 0,7 *а*. Б. Ш. Беркович

2580. **Импульсные трансформаторы фирмы «Спрейг» для вычислительных машин** (Sprague pulse transformers for digital computers), Computers and Automat., 1954, **3**, № 4 (англ.)

Сообщение фирмы «Спрейг» (Sprague Electric Co.) о выпуске миниатюрных импульсных трансформаторов нового типа для передачи импульсов длительностью от 0,05 до 0,5 *мксек*. С. Е. Жорно

2581. **Магнитные элементы цифровых машин** (Magnetic decision elements), Prod. Engng, 1953, **24**, № 9, 240 (англ.)

Фирма «Миннесота Электроникс» (Minnesota Electronics Corp.) выпускает магнитные элементы двух типов, из которых может быть построен любой узел цифровой вычислительной машины (РЖМат, 1954, 3887—3889). Элементы обоих типов (A и S) имеют одинаковое конструктивное оформление, залиты специальной массой «эпокси» и снабжены штекерными гнездами для соединения друг с другом. Синхронизация осуществляется от общего источника, работающего на частоте 200 *кгц*, что соответствует скорости движения информации 100 *кгц*. Приведены фотографии. См. также реф. 2582. О. В. Росницкий

2582. **Испытание магнитных элементов цифровых машин. Гуделл** (Testing magnetic decision elements. Goodell John D.), Electronics, 1954, **27**, № 1, 200, 202, 203 (англ.)

См. реф. 2581. Элемент A представляет собой смеситель на два входа, построенный на одном сердечнике; элемент S — клапан на два входа, выполняющий при совпадении операцию логического отрицания, построенный на двух сердечниках. Тороидальные сердечники изготовляются из металлической ленты толщиной 3 μ с прямоугольной петлей гистерезиса. Для взаимной развязки входных цепей и цепи гасящего импульса применены полупроводниковые диоды и активные сопротивления. Каждый элемент потребляет мощность около 0,5 *вт*. Приведено фото, где показан элемент, имеющий конструктивное оформление, отличающееся от приведенного ранее (см. реф. 2581). О. В. Росницкий

2583. **Четырехразрядный магнитный сдвигающий регистр** (Four-stage magnetic shift register), Computers and Automat., 1955, **4**, № 2, 38 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Райтеон» четырехразрядного магнитного регистра, оформленного в виде отдельного блока. Регистр содержит один магнитный сердечник и один диод на каждый разряд. Отношение сигналов «1» и «0» равно 10. О. В. Росницкий

2584. **Обсуждение вопросов стандартизации магнитной ленты. Шоуп** (Group discussion on magnetic-tape standards. Shoup Allen), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, Dec. 8—10, 121—122 (англ.)

Рекомендуется провести стандартизацию по следующим показателям: 1) отношение сигнала к шуму 60÷70 *дб*; 2) ширина ленты 12,5; 25,50; 75 *мм*; 3) ширина дорожки 2,5 *мм*; 4) максимальная плотность записи; 5) физические свойства ленты, вызывающие пульсации (толщина, ширина, изменение натяжения ленты и т. д.); 6) механические характеристики: разрывное усилие, число пропусканий ленты через лентопротяжный механизм, допуск на ширину ленты, допуск на ровные края ленты, толщина ленты и допуск на толщину, свойства поверхности ленты, температурные характеристики, натяжение ленты, характеристики эмульсии, характеристики поглощения влаги лентой, длина ленты в катушке 730 *м*. Принято время хранения информации — не менее года и не более двух лет. Обращается внимание на то, что для проверки вышеперечисленных факторов необходимо также разработать стандартные методы измерений. В. В. Карибский

2585. **Печатные схемы и автоматический завод.** Герхолд (Printed circuits and the automatic factory. Gerhold R. A.), Proc. Nat. Electronics Confer, Chicago, 1953, 8, 481—488 (англ.)

Описывается разработанный лабораториями войск связи США проект автоматической системы для сборки печатных схем (РЖМат, 1954, 5336; 1955, 496). И. С.

2586. **Графический метод расчета триггеров.** Джонстон, Рац (A graphical method for flip-flop design. Johnston R. F., Ratz A. G.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, **72**, part 1, 52—56 (англ.)

Приводится графический способ расчета простого триггера и триггера с ограничивающими диодами в сетках и анодах. Л. К.

2587. **Обеспечение кристаллическими триодами с поверхностным барьером** (S—B transistors available), Aviat. Week, 1954, **60**, № 25, 62 (англ.)

Сообщение фирмы «Филко» (Philco) о продаже по правительственным заказам высокочастотных полупроводниковых триодов с поверхностным барьером. М. П. Сычева

2588. **Новые полупроводниковые триоды с точечным контактом** (New point contact transistors), Wire and Radio Communs, 1954, **72**, № 2. 39—40 (англ.)

Сообщение фирмы «Амперекс Электроник» (Amperex Electronic Corp.) о разработке двух новых типов полупроводниковых триодов с точечным контактом. Тип OC50 сконструирован преимущественно для усиления; тип OC51 предназначен в основном для коммутационных целей. Оба типа используются в системах связи и в вычислительных машинах. Г. В. Шустарева

2589. **Полупроводниковые триоды с жидкостным охлаждением.** Тегер (Transistoren mit Flüssigkeitskühlung. Taeger), Nachrichtentechnik, 1954, **4**, № 2, 93 (нем.)

Краткое сообщение о результатах опытов по подбору наиболее подходящей жидкости для эффективного охлаждения полупроводниковых триодов с точечным контактом. Опыты с бензолом и ароматическими углеводородами в качестве охлаждающих жидкостей приводили к ухудшению свойств полупроводниковых триодов. Хорошие результаты были получены при использовании для этой цели керосина, омывающего непосредственно место контакта. Г. В. Шустарева

2590. **Фирма «Дженерал Электрик» намечает увеличить выпуск транзисторов** (GE aims to boost transistor output), Aviat. Week, 1954, **61**, № 8, 40 (англ.)

Сообщение о подготовке фирмой «Дженерал Электрик» массового производства недорогих плоскостных полупроводниковых триодов и тетродов, которые дают достаточное усиление до частот 15 и 150 *Мгц* соответственно. Указывается, что новый полупроводниковый триод типа *n-p-n* по сообщению фирмы успешно работает в течение сотен часов при 85°.

Процесс производства монокристаллического слитка германия автоматизирован, длится около двух часов и состоит в непрерывном окунании в расплав германия с необходимыми примесями небольшого кристаллика германия — центра кристаллизации, медленном поворачивании его в расплаве и извлечении с переменной скоростью. Слиток затем нарезается и делится на несколько тысяч прутиков размером 0,5×0,5×2,5 *мм*, к которым должны подсоединяться эмиттерный, коллекторный и базовый выводы. Ранее эта работа выполнялась вручную с 40-сильным микроскопом. Фирма конструирует машину, которая выбирает автоматически оптимальную точку для подсоединения базового вывода (толщиной в половину человеческого волоса), подсоединяет все выводы и герметически запечатывает готовый транзистор. В настоящее время фирма выпускает с линии сборки несколько сотен штук в неделю; в 1955 г. фирма намечала обеспечить массовое производство полупроводниковых триодов и в течение двух лет довести выпуск до «миллионов штук», так что они по стоимости будут конкурировать с лампами. В. К. Зейденберг

2591. **Кристаллические триоды как элементы цепей.** Бангерт (The transistor as a network element. Bangert J. T.), Bell System Techn. J., 1954, **33**, № 2, 329—352 (англ.)

Кристаллические триоды могут применяться в качестве элементов пассивных цепей для улучшения их характеристик. Рассмотрены теоретически, а также проверены экспериментально следующие четыре возможности использования кристаллических триодов в пассивных цепях: 1) для уменьшения влияния рассеяния реактивными элементами цепи; 2) для исключения катушек индуктивности в цепях, предназначенных для работы на заданной частоте; 3) в конструкциях элементов задержки, не обладающих потерями; 4) для обращения полного сопротивления реактивных ячеек цепей. Расчеты и экспериментальное исследование показывают, что использование триодов для указанных целей возможно и экономически оправдано. А. Р.

2592. **Самодельные полупроводниковые триоды.** Хелсдон (Home-made transistors. Helsdon P. B.), Wireless World, 1954, **60**, № 1, 20—23 (англ.)

Подробно излагается методика изготовления из германиевого диода триода с точечными контактами. Указаны необходимые для этого материалы, инструменты и приборы. Рассматриваются возможные случаи применения триодов. А. П.

2593. **Рекристаллизация германия из индиевого расплава.** Панков (Recrystallization of germanium from indium solution. Pankove Jacques I.), RCA Rev., 1954, **15**, № 1, 75—85 (англ.)

Описаны опыты по рекристаллизации германия на монокристаллических стержнях германия из пересыщенного индиевого расплава. Показано, что начальная область рекристаллизованного слоя представляет собой полупроводник *p*-типа с удельным сопротивлением около 0,003 *ом см* со структурой, продолжающей структуру затравки. Положение *p-n*-перехода практически совпадает с положением фронта вплавления.

Дальнейшая рекристаллизация происходит путем образования групп отдельных игл, состоящих из пластинок. Внешние части области рекристаллизации имеют значительно большее количество дефектов, чем внутренние. Наблюдались дефекты, связанные с плохим смачиванием участков поверхности растущего кристалла расплавом. А. Р.

2594. **Современное состояние работ в области полупроводниковых триодов.** Штаймель (Die augenblickliche Lage auf dem Transistorengebiet. Steimel Karl), Electron (Linz), 1954, № 1, 24—26 (нем.)

Изложение доклада, сделанного автором на пресс-конференции фирмы «Телефункен» (Telefunken-GmbH) 27 ноября 1953 г. Дается обзор состояния и путей развития производства полупроводниковых триодов в США. Г. В. Шустарева

2595. **Полупроводниковые триоды завтра** (Transistoren von Morgen), Electro-Technik, 1954, **36**, № 1, 5—6 (нем.)

Материалы о пресс-конференции фирмы «Телефункен» 27 ноября 1953 г.

2596. **Куда ведет развитие полупроводниковых триодов?** (Wohin führtdie Transistor-Entwicklung?), Funkschau, 1953, **25**, № 24, 481 (нем.)

Материалы о пресс-конференции фирмы «Телефункен» 27 ноября 1953 г.

2597. **Полупроводниковые триоды сегодня и завтра. Нентвиг** (Transistoren von heute und morgen. Nentwig K.), Feinwerktechnik, 1954, **58**, № 4, 135 (нем.)

Краткая статья обзорного характера по материалам пресс-конференции фирмы «Телефункен». См. реф. 2594, 2595, 2596.

2598. **Дискуссия по кристаллическим диодам. Слуц** (Group discussion on crystal diodes. Slutz Ralph J.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, Dec. 8—10, 120 (англ.)

Излагаются материалы дискуссии по кристаллическим диодам на восточной конференции по вычислительным машинам.

2599. **Кристаллический триод. Ч. I. Шульц** (De transistor. I. Schultz B. H.), Electrotechnik, 1954, **32**, № 10, 205—207 (голл.; резюме англ.)

Популярный очерк. Рассказывается об электронной и дырочной проводимости в германии и о влиянии на них температуры, света и инъекции заряженных частиц (в случае точечных контактов и в случае слоистого германия). Объясняется процесс рекомбинации электронов и дырок. Отмечается возможность замены германия кремнием. Г. Н. Поваров

2600. **Полупроводниковые триоды. Гуггенбюль** (Transistoren. Guggenbühl W.), Techn. Rundschau, 1954, **46**, № 25, 1—2 (нем.)

2601. **Основы действия полупроводниковых триодов** (Fundamentals of transistor action), Prod. Engng. Annual Handb. Prod. Design, 1954, 118—120 (англ.)

2602. **Полупроводниковые триоды. Диджси** (Transistors. Degen P. L.), Electr. Rev., 1954, **154**, № 14, 605—609 (англ.)

Дается краткий исторический обзор создания полупроводниковых триодов, приводится популярное изложение теории проводимости в германии и кремнии, а также принципов действия различных типов полупроводниковых диодов и триодов, а также фототриодов. Библ. 11 назв. В. С.

2603. **Переворот в электронике. Кинг** (Transition in electronics. King Cary J.), Yale Scient. Mag., 1954, **28**, № 5, 18—20, 22—23, 44 (англ.)

Приводится популярное изложение теории полупроводников в применении к элементам IV группы (Si, Ge), принципы очистки вещества, конструкции полупроводниковых триодов с точечным и поверхностным контактом. В. С.

2604. **Давайте познакомимся с полупроводниковыми триодами — новым направлением, имеющим великое будущее. Бетридж** (Get to know the transistor — a new line with a great future. Bettridge B. R.), Electr. and Radio Trad., 1954, **26**, № 295, 60—62 (англ.)

Популярное изложение принципов работы полупроводниковых диодов и триодов.

2605. **Точечные триоды или триоды с поверхностным контактом? Энгберт** (Spitzen- oder Flächentransistor? Engbert W.), Radio mentor, 1954, **20**, № 2, 079—084 (нем.)

Общие сведения по полупроводниковым триодам.

2606. **Принцип действия слоевых полупроводниковых триодов. Нейдтхарт** (Wirkungsweise der Flächentransistoren. Neidthart Herbert), Radiotechnik, 1954, **30**, № 4, 108—115 (нем.)

Подробное популярное описание физических процессов в *p-n*-переходах, устройства и работы слоевых полупроводниковых триодов типа *n-p-n* и его отличия от транзистора типа *p-n-p*. В. К. Зейденберг

2607. **Быстродействующая счетная машина** (High speed accounting machines), J. Franklin Inst., 1954, **258**, № 1, 81—82 (англ.)

Сообщение фирмы «Берроус» (Burroughs) о выпуске новой быстродействующей счетно-аналитической машины серии «G», которая в течение часа может составить и напечатать 27 000 платежных счетов, используя в процессе работы 108 000 перфокарт. Машина обрабатывает и печатает 43 000 знаков в 1 мин. и является первой машиной, где пунширование карт и печать результатов выполняются одновременно. Машина может применяться для составления счетов за коммунальные услуги, для подсчета страховых премий, для различных работ в почтовых и издательских фирмах. Для составления счета за электричество достаточно подать карту абонента на один читающий канал и карту с необходимой для расчета информацией на другой читающий канал. Машина отпечатает почтовую карточку с адресом и фамилией абонента на одной стороне и показаниями счетчика, тарифом, суммой к уплате и сроком уплаты на другой стороне. Машина также пуншрует корешки счета с суммой и номером счета для регистрации внесения платежа, а также отдельную карту с показаниями счетчика для расчета за следующий месяц. При желании можно подсчитать сумму, подлежащую к уплате всеми абонентами. В течение часа машина может приготовить 13 200 таких счетов. При использовании машины в страховых компаниях на ней в течение часа можно получить 13 500 извещений о страховых премиях. В машине одновременно работают два отдельных канала, каждый из которых обрабатывает 54 000 стандартных 80-колонных перфокарт в 1 час.

Высокая скорость печати достигается благодаря использованию электронно-механического печатающего устройства. Электронный дешифратор расшифровывает информацию, принятую с перфокарты, и возбуждает 35 проволок, образующих прямоугольник, по сторонам которого размещено 5 и 7 проволок. В зависимости от буквы придет в движение соответствующая комбинация проволок и отпечатает нужную букву. Благодаря малой массе проволок и небольшому их перемещению (0,5 *мм*) достигается высокая скорость печати. С устройством печати синхронно работает перфорирующее устройство, которое пуншрует информацию, взятую с перфокарт или накопителей. Электронные накапливающие регистры выполняют сложение и вычитание. Управление машиной осуществляется с помощью шнуров, коммутирующих различные цепи. Л. С. Легезо

2608. **Новые средства для воскрешения знаний** (New tools for the resurrection of knowledge), Chem. and Engng News, 1954, **32**, № 9, 866—869, 891 (англ.)

Созданная по инициативе Американского химического общества группа разрабатывает специальный (машинный) язык для механизированных поисков химической литературы. Для 30 000 терминов выписаны определения и произведено распределение по областям знания и типам (процессы, машины, материалы, качества, отвлеченные понятия). Для 7 000 терминов найдены также семантические разложения

(например, колориметр — машина, анализ, цвет), что существенно для повышения эффективности поисков — кодовое обозначение термина составлено из кодов семантических факторов, и информация может быть найдена даже при задании не всех факторов, описывающих термин.

Для экспериментальных поисков использовались, помимо обычных счетно-аналитических машин фирмы ИБМ, специальные выбирающие машины. На одной из этих машин перфокарты прогоняются узкой стороной вперед со скоростью 600—1 000 карт в 1 мин. мимо вопросной перфокарты и фотоэлемента. Пробивки на вопросной перфокарте наносятся в соответствии с принципом взаимодополняющих комбинаций, поэтому при прохождении карты с дополняющей комбинацией свет через обе карты не проходит, и фотоэлемент срабатывает.

Приведен пример кодировки химической статьи и соответствующая перфокарта. Кодовые обозначения терминов и так называемые индикаторы, описывающие их взаимосвязь и роль внутри элемента информации, состоят в последнем варианте кода из обычных букв, цифр и знаков (всего 47) стандартного кода ИБМ, изображаемых комбинациями 1—3 пробивок в колонке перфокарты. Записанные в определенной последовательности поколонно вдоль перфокарты эти символы образуют текст своеобразного машинного реферата. В. П. Черенин

2609. Использование быстродействующих вычисляющих устройств для фотометрических вычислений. Хортон (Use of high speed computing devices in photometric calculations. Horton G. A.), Illum. Engng, 1954, 49, № 8, 403—408 (англ.)

Описан метод вычисления кривых одинаковой освещенности для уличных светильников. В качестве исходных данных служат экспериментальные замеры. Вычисляется коэффициент использования светильников. Вычисления были проделаны на машинах фирмы ИБМ, использующих стандартные 80-колонные перфокарты.

Применены были следующие машины: 1) перфоратор типа 31; 2) копирующий перфоратор типа 514; в нем возможно осуществлять копирование информации с одной пачки перфокарт на другую (обе пачки подаются синхронно) и переносить информацию с одной «главной» перфокарты на любое количество других перфокарт. Оба вида копирования могут осуществляться одновременно; 3) сортировочная машина типа 82 со скоростью сортировки 650 карт в 1 мин.; 4) сличающая машина типа 77, имеющая два входных и четыре выходных кармана. Она позволяет осуществлять слияние двух пачек перфокарт в одну заданной последовательности; 5) электронная вычислительная машина ИБМ, состоящая из четырех устройств, связанных кабелями: а) читающая карты и печатающая машина типа 412, б) вычислительная машина типа 605, в) суммирующий перфоратор типа 521, г) устройство дополнительной памяти типа 941.

Ввод данных и программы в вычислительную машину осуществляется с перфокарт. Вычисление кривых изоосвещенности для уличных светильников занимает около 1 часа, в то время как при выполнении той же работы при помощи настольных счетных машин требуется 15—20 человеко-часов. В. Н. Лаут

2610. Вычисление потока сырой нефти в нефтепроводе по образцам при помощи электронных машин. Спиннинг (Calculation of crude-oil run tickets... by electronics. Spinning H. M.), Oil and Gas J., 1953, 51, № 9, 70—71, 79 (англ.)

Сообщается, что компания «Шелл Ойл» (Shell Oil Co.) имеет шесть вычислительных центров, которые оборудованы электронными вычислительными перфораторами ИБМ-604, производящими обработку образцов потока сырой нефти в нефтепроводах. На перфокарте, соответствующей образцу, пробивается уровень нефти, вес, температура и т. д. Результат, полученный в процессе обработки перфокарты, перфорируется на этой же карте. Затем массив перфокарт обрабатывается для получения общих результатов. Указывается, что в одном из центров обрабатывается ежемесячно 16 000 карт. Для обработки образцов машина занята еженедельно 16 час. Н. Н. Поснов

2611. Счетно-аналитические машины в качестве вспомогательного средства для расчета фильтров. Хейман (Lochkarten-Rechenmaschinen als Hilfsmittel bei der Filterberechnung. Heimann W.), Arch. Elektr. Übertrag., 1954, 8, № 4, 173—178 (нем.)

Указывается, что определение оптимальных значений параметров при проектировании сложных фильтров, требующее большой вычислительной работы, с успехом может быть проведено на счетно-аналитических машинах, существенно снижающих время вычислений и дающих значительное уменьшение ошибок в расчетах. Приводится краткий перечень существующих счетно-аналитических машин и даются их технические характеристики. В качестве примера разбирается схема решения алгебраического уравнения на счетно-аналитической машине фирмы ИБМ (IBM). Г. М. Грязнов

2612. Проектирование кулачков с помощью вычислительных машин. Гриффин (Designing cams with aid of computers. Griffin R. F.), Mach. Design, 1953, 25, № 12, 209—215 (англ.)

Рассматривается расчет кулачков с помощью перфорационных машин фирмы ИБМ и то упрощение и облегчение, которое вносит применение электрических вычислительных машин в проектирование и расчет кулачков.

Примечание референта. Для рассматриваемых в статье соотношений возможно применение номограмм, конечно, в ущерб точности вычислений по сравнению с применением машин. И. А. Вильнер

2613. Простой метод вычисления площади на машинах. Вейссенстейн (Simple machine method for area computation. Weissenstein Henry G.), Surveying and Mapping, 1954, 14, № 1, 75—79 (англ.)

Рассматривается детально техника вычисления на настольных вычислительных машинах площади многоугольника по формуле, учитывающей координаты углов многоугольника. Указывается, как путем прибавления или вычитания площадей секторов можно применить эту формулу, если граница измеряемой площади содержит, кроме отрезков прямых, дуги окружностей. К. А. Семендяев

2614. Печатающая вычислительная машина типа 303 (303-printing calculator), Business Manag., 1954, 22, № 1, 22 (англ.)

Приводится фотография настольной вычислительной машины, предназначенной для обслуживания коммерческой арифметики. Сумма, остаток, отрицательные числа печатаются красным. Вычислитель очищается автоматически в конце каждого вычисления. Имеется возможность сохранять множимое. Десять нумерованных клавишей расположены в пределах квадрата 80×80 *мм*. Ключ умножения расположен ниже главной доски ключей. Л. А. Любович

2615. Точное вычислительное устройство с шарнирным механизмом. Паккер (An exact computing linkage. Packer Leo S.), Mach. Design, 1953, 25, № 9, 171—175 (англ.)

Развернутое описание истории, устройства и применения шарнирного механизма усовершенствованного академиком И. И. Артоболевским, со ссылкой на его

статью «Механизм для возведения в куб» (Докл. АН СССР, 1951, **79**, № 6, 933—935). Этот механизм был известен и раньше как прибор для вычерчивания непрерывным движением диссоиды Диоклеса. И. И. Артоболевский добавил к нему еще один стержень с шарниром и ползуном и показал возможность его использования для возведения в куб и извлечения кубического корня. В реферируемой статье выяснена возможность получения с помощью этого механизма значений ряда других функций, в том числе функций $x^2/2$, $(1-x^2)/2$, $(1-x^2)/2(1+x^2)$, $1/(1+x^2)$, $\sqrt{1+x^6}/(1+x^2)$, $x^3/(1+x^2)$, $\sqrt{1+x^2}$, $(1-x^2)/(1+x^2)$, $(x^2-x^4)/2(1+x^2)$, $2x/(1+x^2)$, $(x^3-x^5)/2(1+x^2)$ и вычерчивания графиков этих функций. В. М. Брадис

2616. **Преобразование координат посредством вычислительной машины «Фалес Гео» (вычислительные схемы для преобразований подобия). Ф ё р с т н е р** (Koordinatenumformung mit der Rechenmaschine Thales Geo (Schaltschemen für Ähnlichkeitstransformationen). F ö r s t n e r R u d o l f), Z. Vermessungswesen, 1954, **79**, № 6, 180—183 (нем.)

Рекомендуется детально разработанный план работы на новой модели вычислительной машины «Фалес Гео» при вычислениях по формулам

$$m\cos\delta = (\Delta y'\Delta y + \Delta x'\Delta x)/(\Delta y'^2 + \Delta x'^2),$$
$$m\sin\delta = (\Delta x'\Delta y - \Delta y'\cdot\Delta x)/(\Delta y'^2 + \Delta x'^2),$$
$$y_{n+1} = y_n + (m\sin\delta)\Delta x' + (m\cos\delta)\cdot\Delta y',$$
$$x_{n+1} = x_n + (m\cos\delta)\cdot\Delta x' - (m\sin\delta)\cdot\Delta y',$$
$$\Delta y'' = o_1\cdot\Delta x' + a_1\cdot\Delta y',\ \Delta x'' = a_1\cdot\Delta x' - o_1\cdot\Delta y'$$

и др. Статья является продолжением статьи, опубликованной в том же журнале в 1950 г. (№ 12, 364—367). В. М. Брадис

2617. **Конструкторы конторских машин ориентируются на пластмассы. Ш а р п** (Un constructeur de machines de bureau s'oriente vers les plastiques. S h a r p T. A.), Ind. plast. mod., 1955, **7**, № 3, 17—18 (франц.)

Приведены примеры применения пластмасс в счетных и пишущих машинах американской фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington Rand). Использование пластмасс для производства деталей счетных машин, требующихся в большом количестве при жестких допусках, позволяет снизить их стоимость, сохраняя высокое качество. Из полиамидной пластмассы прессуются селекторные табло и читающие блоки счетных машин с перфокартами. Т. А. Ш.

2618. **Вычислитель-хронограф для авиации** (Computer-chronograph is all-in-one flight aid), Aviat. Week, 1954, **61**, № 26, 65, 68 (англ.)

Сообщение фирмы АОПА (АОРА, Швейцария) о вычислителе-хронографе, который является комбинацией хронографа и вычислительной шкалы. Хронограф может работать непрерывно, либо через заданные интервалы. Вычислительная шкала смонтирована на ободе часов. Она позволяет решать ряд задач, встречающихся в полете и относящихся к определению времени, скорости, расстояния и расхода горючего. Ею также можно пользоваться в качестве логарифмической линейки для математических вычислений. Прибор оформлен в виде ручных часов. Приводится фотография. Н. П. Трифонов

2619. **Универсальное наглядное пособие. К л а р к** (A multi-purpose visual aid. C l a r c G. R.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 326, 244—248 (англ.)

Описывается простое наглядное пособие, имеющее следующие применения: 1) в алгебре для иллюстрации нахождения графическим способом экстремальных значений функции: $y = ax^2 + bx + c$; 2) в аналитической геометрии для иллюстрации углового коэффициента и начальной ординаты прямой и иллюстрации того, как изменение начала координат влияет на уравнения прямой, параболы и круга; 3) в тригонометрии для иллюстрации изменения тригонометрических функций в зависимости от изменения угла и т. д. Отмечается, что пособие может быть использовано во многих графических работах. Е. К. Нечаев

2620. **Граф-аналог** (Graphanalogue), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 10, 1013 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5873.

2621. **Указатель чисел Маха на счетчике** (Mach figure on computer), Naval Aviation News, 1954, Febr., 39 (англ.)

Кратко описан принцип устройства диска для перевода истинной скорости в числа Маха и наоборот. Приведен пример перевода. И. А. Вильнер

2622. **Наутикатор. А л а б а с т е р** (The nauticator. A l a b a s t e r R. C.), J. Inst. Navig., 1954, **7**, № 3, 308—312 (англ.)

Описано устройство и употребление номографического прибора, построенного в Норвегии, предназначенного для решения некоторых задач сферической тригонометрии, встречающихся в аэронавигации и авиационной астрономии, в первую очередь для редукции астрономических наблюдений. Дана фотография прибора. Рассмотрены преимущества и недостатки прибора по сравнению с другими средствами решения тех же задач. В. М. Брадис

2623. **Старинное вычислительное устройство. Р а н с о н** (An old time computer. R a n s o n W i l l i a m R.), Math. Mag., 1954, **27**, № 4, 205—207 (англ.)

2624. **Применение больших вычислительных машин, Г р у н б е р г е р** (The use of large scale calculators. G r u e n b e r g e r F r e d), School Sci. and Math., 1954, **54**, № 2, 147—149 (англ.)

Указывается на неправильность представления о том, что быстродействующие машины решат все возможные задачи, так как объем решаемых задач растет одновременно с мощностью используемых машин и, кроме того, имеется огромное число простых по формулировке задач, которые остаются трудными для существующих больших машин. Приводятся примеры из математической статистики и теории чисел, в том числе задача о нахождении наиболее длинной повторяющейся группы разностей в последовательности простых чисел. К. А. Семендяев

2625. **Кванты информации и двоичные знаки. Г о л е** (Bits and binits. G o l a y M. J. E.), Proc. I. R. E., 1954, **42**, № 9, 1452 (англ.)

Предлагается наряду с уже имеющим хождение термином «binit» (сокращение термина «binary digit»— «двоичный знак») ввести термин «bit» для сокращения родственного понятия из теории информации «bit of information»— «порция, или квант, информации», введенного для обозначения двузначной информации. А. П. Ершов

2626. **Быстродействующие цифровые вычислительные устройства. Ш о в и ц** (High-speed digital computers. S h i o w i t z M a r c), Trans. I. R. E., 1954, **PGRTRG-1**, 12—16 (англ.)

Краткое популярное описание основных узлов современных быстродействующих цифровых вычислительных устройств, их назначения и взаимодействия при выполнении вычислительных операций. Приведен пример кода для простейших команд: сложения, вычитания, умножения, деления, сдвига налево или направо, сравнения величин или установление их равенства, команд по вводу и выводу данных, а также пуска и остановки машины. В. Б.

2627. **Подготовка решений вопросов управления посредством математики** (Making decisions by math), Business Week, 1954, № 1315, 104, 108 (англ.)

Сообщается, что большое число предприятий в США приобрело быстродействующие электронные вычислительные машины для постоянного использования. Указывается, что одна железнодорожная компания предполагает, что применение таких машин для решения вопроса о числе вагонов, необходимых для оптимальной эксплуатации железной дороги, позволит уменьшить затраты на оборудование на 20%. В качестве примера применения вычислительных машин для решения задач торговой политики приводится задача определения оптимума для вложения капитала в рынок с любой степенью насыщения.

В. И. Шестаков

2628 К. **Синтез электронных вычислительных и управляющих схем.** Пер. с англ. Под ред. Шестакова В. И., М., Изд-во иностр. лит-ры, 1954, 358 стр.

Книга предлагает оригинальный алгебраический метод исследования и синтеза по заданным логическим свойствам электронных схем, имея в виду в основном проектирование цепей управления и арифметических устройств электронных цифровых вычислительных машин. В рассмотрение вводятся лишь те процессы, при описании которых можно предположить, что напряжение или ток в любой точке схемы принимает одно из двух возможных значений (высокое или низкое). Этим значениям ставятся в соответствие символы 1 и 0, над которыми можно действовать по обычным арифметическим правилам. Переменная величина, которая может принимать одно из двух возможных значений, называется двоичной переменной. Двоичная функция от двоичных аргументов называется переключательной функцией.

В гл. II вводится понятие оператора электронно-ламповых схем: оператором электронно-ламповой схемы называется переключательная функция, описывающая выходное напряжение схемы в зависимости от входных напряжений. Например, если на управляющую и защитную сетки пентода подаются входные напряжения e_1 и e_2, а выходное напряжение снимается с нагрузочного сопротивления в аноде, то оператор пентода представляется в виде $P_2(e_1, e_2) = 1 - e_1 e_2$ (индекс 2 у оператора P указывает на количество используемых в схеме управляющих сеток). Аналогично вводятся операторы для триодного усилителя постоянного тока, катодного повторителя, нескольких триодов с общей нагрузкой в аноде и с общей нагрузкой в катоде. Переключательная функция, производимая триодом с нагрузкой в аноде, $T_1(e) = 1 - e$, называется инверсией входной переменной e и обозначается e'.

Гл. III посвящена переключательным функциям двух и трех переменных. Вводится каноническая форма представления переключательной функции n переменных, которую для данной переключательной функции легко получить на основании табличной записи функции. Доказывается, что количество различных переключательных функций от n переменных равно 2^{2^n}. В частности для случая двух переменных перечислены все 16 возможных переключательных функций и приведены операторы электронно-ламповых схем, которыми они могут производиться. Для случая трех переменных в таблицу внесены из 256 возможных переключательных функций лишь те 22 функции, которые нельзя получить одну из другой перестановкой или инвертированием входных переменных. Указывается метод составления этой таблицы. Приведены операторы электронно-ламповых схем, посредством которых можно произвести перечисленные переключательные функции. В приложениях имеется аналогичная таблица для случая 4 переменных.

В гл. IV («Переключательные функции n переменных») даются некоторые частные методы построения операторов электронно-ламповых схем по заданной функции. Рассмотрено большое количество примеров, иллюстрирующих применение этих методов.

Гл. V («Минимизирующие карты») рассматривает общие методы построения минимальных операторов электронно-ламповых схем (т. е. операторов, требующих для их осуществления минимального числа управляющих сеток) по заданной переключательной функции. Указывается, что в зависимости от вида переключательной функции для построения ее минимального оператора должны использоваться либо определенные методы гл. IV, либо излагаемый в гл. V графо-аналитический метод, называемый методом минимизирующих карт. Результат, полученный этим методом, дает наиболее экономное решение лишь при определенных ограничениях; в других случаях требуются еще дополнительные преобразования, общие методы проведения которых не разработаны. Для построения минимальных операторов переключательных функций, зависящих более чем от 6 переменных, метод минимизирующих карт очень громоздок и не может использоваться без применения технических средств расчета.

Гл. VI и VII посвящены рассмотрению схем с несколькими выходами. Если имеется n независимых переменных и требуется построить схему с 2^n выходами такими, что при любой комбинации значений входных переменных на одном и только на одном выходе получается высокое напряжение, то может быть применена либо «пирамидальная», либо «прямоугольная» схема. Приводится расчет количества управляющих сеток, необходимых для осуществления того или другого варианта; при $n \geqslant 4$ более экономной оказывается прямоугольная схема. Случаи, когда таких, как указано выше, выходов должно быть менее 2^n, рассмотрены на примерах схем, декодирующих двоичную запись десятичных цифр (для различных систем кодирования). Далее рассматриваются более сложные случаи многовыходных схем. Выведено выражение для верхней грани числа управляющих сеток, необходимого для осуществления любой многовыходной схемы. На разнообразных примерах показаны различные частные методы построения многовыходных схем; очерчены примерные области применения каждого из этих методов.

Гл. VIII иллюстрирует применение методов, изложенных в предыдущих главах, примерами построения триггерных схем, цифровых счетчиков и счетных колец.

В гл. IX («Временные переменные») проведено обобщение развитых ранее методов на случай, когда выходное напряжение схемы в разные интервалы времени описывается различными переключательными функциями входных переменных.

В гл. X те же методы обобщаются для проектирования схем, содержащих германиевые диоды, либо купроксные или селеновые выпрямители. Показано, как при применении алгебраических методов синтеза могут быть учтены определенные технические соображения, например требование, чтобы схема из выпрямителей не содержала более двух каскадов без промежуточного усиления. Доказано, что если на входах схемы наряду с входными напряжениями могут быть использованы их инверсии, то схемы из выпрямителей могут воспроизвести любую переключательную функцию. В отличие от глав, посвященных электронно-ламповым схемам, приводятся некоторые соображения

по конструкции кристаллических выпрямителей и схем, собираемых из них.

Гл. XI («Системы кодирования») является вводной для двух последующих глав. Материал ее, однако, представляет значительный самостоятельный интерес. Сравнивая различные системы счисления (двоичную, троичную, четверичную, восьмеричную, десятичную), авторы высказываются в пользу применения бинарно-кодированной десятичной системы во всех типах вычислительных машин, кроме машин, предназначенных для автоматического управления производственными процессами; в этих последних рекомендуется применение двоичной или, в редких случаях, троичной системы счисления. 10 десятичных цифр могут быть закодированы с помощью 4 двоичных цифр $2{,}9\times10^{10}$ различными способами; в том числе $7{,}6\times10^{7}$ систем кодирования не могут быть получены одна из другой перестановкой или инвертированием двоичных цифр. Из числа этих последних систем $2{,}2\times10^{5}$ систем кодирования позволяют получать дополнения десятичных цифр до 9 непосредственным инвертированием двоичных цифр. Если, однако, ограничиться условием постоянства и положительности весов двоичных цифр, то различных систем кодирования может быть всего 17; все они перечислены в таблице. Некоторые системы кодирования, обладающие теми или иными частными преимуществами, рассмотрены более подробно.

Гл. XII и XIII содержат описание логики работы ряда схем сумматоров и множительных устройств. На примерах построения этих устройств иллюстрируется применение алгебраических методов синтеза схем, изложенных в главах I—X.

Книга представляет несомненный интерес как для математиков, так и для инженеров, работающих над цифровыми вычислительными устройствами. Изложенные в ней методы исследования и синтеза электронных схем, не требующие привлечения специального математического аппарата, в ряде случаев упростят задачу создания сложных вычислительных и управляющих устройств и позволят избежать излишних затрат оборудования, получающихся иногда при эмпирическом подборе схем. Эти методы дают, кроме того, компактный и удобный способ описания логики работы сложных схем. М. А. Карцев

2629 К. Счетно-решающие устройства. Добротурский С. О., Титов В. К., Гос. изд-во оборонной пром-сти, 1953, 244 стр., 6 р. 50 коп.

Переработка учебника для высшей школы (Добротурский С. О., Счетно-решающие механизмы, Оборонгиз, 1950). Примерно две трети книги посвящены механическим счетно-решающим устройствам и лишь одна глава — электрическим счетно-решающим устройствам.

В гл. I и II излагаются общие сведения о счетно-решающих механизмах, выборе масштабов и точности механизмов. Рассматриваются систематические и случайные погрешности механизмов и даются примеры расчета погрешностей механизма.

В гл. III изучаются некоторые детали счетно-решающих механизмов, такие как гайки, муфты сцепления, шкалы, стопоры, коррекционные линейки и др.

Собственно механизмам для выполнения математических действий посвящена гл. IV. В ней описываются: а) суммирующие механизмы (дифференциалы, рычажные системы, винтовые механизмы), б) множительные механизмы (рычажные с постоянным и переменным масштабом), в) тригонометрические механизмы (координаторы), кулачковые механизмы, механизированные графики, коноиды двух и трех переменных, г) фрикционные механизмы (с роликом, грибовидные и др.) и применение их для дифференцирования, интегрирования и умножения функций.

Последняя гл. V посвящена описанию электрических счетно-решающих устройств. Кратко рассматриваются методы выполнения математических операций и структура электрических счетно-решающих устройств (методы суммирования, дифференцирования и интегрирования, тригонометрические операции). Из элементов схем рассматриваются только потенциометры, вращающиеся трансформаторы, тахогенераторы и блок схемы электрических усилителей. В качестве суммирующих и множительных схем описаны мостовые и потенциометрические схемы. Дана конструкция фигурных и ламельных потенциометров и их расчет. Отдельный параграф посвящен описанию вращающихся трансформаторов и применению их в каскадных схемах для сложения и умножения напряжений. В этом же параграфе дано описание схем тахогенераторов переменного и постоянного тока. Книга заканчивается описанием схем электрического интегрирования и дифференцирования с электронными усилителями.

Электрическим счетно-решающим устройствам уделено сравнительно мало внимания, хотя их роль и значение непрерывно возрастают. Некоторые схемы и конструкции, приведенные в книге, являются устаревшими, например конструкции ламельных и фигурных потенциометров в настоящее время почти не применяются. Потенциометры с переменным шагом намотки и электрическим профилированием, которые изготавляются промышленностью, не нашли отражения в книге. Недостаточное внимание уделено применению в счетно-решающих устройствах следящих систем, которые являются основой для электрических счетно-решающих устройств. Электронные элементы счетно-решающих устройств вовсе не рассматриваются, хотя они получили широкое применение и являются весьма перспективными. Раздел книги, посвященный механическим счетно-решающим устройствам, является вполне достаточным для техникумов. Ф. В. Майоров

2630 К. Диаграммы в вычислениях с помощью перфокарт. Грунбергер (Diagrams in punched card computing. Gruenberger F. J., Univ. of Wiss. Press., 1954, 3.75 doll.), Cumul. Book Index, 1954, **57**, № 8, 53 (библ.)

2631 П. Электронная цифровая вычислительная машина (Electronic digital computer) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 154469, кл. 05.5, 24.12.53

2632 П. Электронное цифровое вычислительное устройство (Electronic digital computing device) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 154448, кл. 05.5, 24.12.53

2633 П. Электронное цифровое вычислительное устройство (Electronic digital computing device) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 154449, кл. 05.5, 24.12.53

2634 П. Двоичные цифровые вычислительные машины (Binary digital computing machines) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 154323, кл. 05.5, 10.12.53

Арифметический узел последовательной двоичной цифровой вычислительной машины имеет запоминающее устройство на электроннолучевой трубке, на экране которой на двух линиях сохраняются два числа или инструкции. Машина имеет устройство, позволяющее производить вычисления с учетом порядков. В. Д. Князев

2635 П. Электронное множительное устройство. Хейвенс (Electronic multiplier. Havens Byron L.) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2672283, кл. 235—61, 16.03.54

Устройство для умножения чисел, представленных последовательным кодом в двоичной системе счисле-

ния. Устройство имеет систему вентилей и линий задержки, позволяющую подавать множимое в регистр частичных произведений параллельным кодом. Произведения выдаются в виде последовательности импульсов. Н. Ф. Семикова

2636 П. Электронная цифровая вычислительная машина (Electronic digital computing devices) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 154321, кл. 05.5, 10.12.53

Цифровая вычислительная машина содержит устройство, способное одновременно сохранять инструкцию, управляющую следующим циклом, и код, управляющий выбором очередной инструкции. В. Д. Князев

2637 П. Вычислительное устройство для работы в двух направлениях. Мак-Миллан (Bidirectional counter. McMillan Brockway) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2656460, кл. 250—27, 20.10.53

Устройство для счета в двух направлениях, состоящее из двух равноценных каналов, содержащих триггерные схемы и цепи блокировки. В. Б.

2638 П. Двоичный сумматор. Ньюман, Клейден (Binary adder. Newman Edward Arthur, Clayden David Oswald) [National Research Development Corp.]. Пат. США 2694521, кл. 235—61, 16.11.54

Описан полусумматор, построенный на трех двойных триодах. В. И. Шестаков

2639 П. Схема счетчика. Гринфилд (Counting circuit. Greenfield Alexander) [Bendix Aviation Corp.]. Пат. США 2647996, кл. 250—27, 4.08.53

2640 П. Устройство для счета и регистрации импульсов. Башле, Лоу (Pulse counting and registration system. Bachelet Albert E., Low Frank K.) [Western Electric Co. Inc.]. Канад. пат. 494943, 28.07.53

В устройстве содержатся узлы, генерирующие и производящие подсчет импульсов. Счетчик импульсов использует газонаполненные лампы, имеющие катод, два анода и вспомогательный поджигающий электрод. Зажигание ламп производится с помощью импульсов, поступающих как на поджигающие электроды, так и на аноды ламп. В одном из вариантов схемы для управления зажиганием применены твердые выпрямители. Подробно указывается место и полярность включения твердых выпрямителей. С целью предотвращения нежелательных обратных зажиганий в схемах цепей управления каждой лампы включаются конденсаторы, шунтирующие некоторые из твердых выпрямителей. В. Б.

2641 П. Приборы, запоминающие электрические сигналы. Вильямс, Килберн, Тутилл (Electrical information storage means. Williams Frederic C., Kilburn Tom, Tootill Geoffrey C.) [National Research Development Corp.]. Канад. пат. 498660, 22.12.53

Предлагается производить запись двоичных кодов на электроннолучевых трубках путем прочерчивания лучом на диэлектрике коротких линий (тире). Линия, изображающая один знак, наклонена к линии, изображающей другой знак, под углом от 30 до 90°. В. Н. Лаут

2642 П. Стабилизированная система с кристаллическим триодом. Ривс, Уайт (Stabilized crystal triode system. Reeves Alec Harley, White Charles de Boismaison) [International Standard Electric Corp.]. Пат. США 2663767, кл. 179—171, 22.12.53

Каскад с кристаллическим триодом, включенным по схеме с заземленной базой с раздельными источниками питания коллектора и эмиттера. Импульсы для стабилизации подаются между коллектором и эмиттером. А. Б. Залкинд

2643 П. Дважды модулированная импульсная передача. Потье (Double modulated pulse transmission. Potier Gaston Xavier-Noël). Пат. США 2662116, кл. 179—15, 8.12.53

Передающее устройство для многократной системы связи, позволяющее передавать по одной линии связи импульсы со многих каналов связи, сдвинутые по времени и модулированные по амплитуде. В. Д. Князев

2644 П. Вычислительная машина с программным управлением. Беннет, Янг, Хог (Automatic sequence-controlled computer. Bennett Harold F., Young Earle A., Hoag Eben) [Eastman Kodak Co.]. Пат. США 2651458, кл. 235—61, 8.09.53

Электрическая система управления, применяемая для клавишной вычислительной машины, выполняющей четыре арифметических действия. Во время деления счет вычитаний и управление сдвигом разрядов выполняется с помощью импульсов, образованных соответствующими цепями. Н. Ф. Семикова

2645 П. Статистические машины (Statistical machines) [Powers-Samas Accounting Machines Ltd]. Австрал. пат. 160605, кл. 54.4, 3.02.55

Аппарат для выдачи перфокарт из статистической машины. О. П.

2646 П. Накопительная каретка и управляющий вал объединены на миниатюрных вычислительных машинах. Марк (Accumulator-carriage and driveshaft interlock for miniaturetype calculating machines. Mark Franz) [Curt Herzstark, Feldkirch, Vorarlberg, Austria]. Пат. США 2661155, кл. 235—63, 1.12.53

См. РЖМат, 1953, 492.

2647 П. Накопитель, применяемый в машинах для статистических работ. Томас (Accumulator for use in statistical machines. Thomas Arthur) [Powers-Samas Accounting Machines Ltd]. Пат. США 2638275, кл. 235—136, 12.05.53

Накопитель с использованием системы шестерен для переноса десятков и ввода чисел. Б. М. Раков

2648 П. Вычислительная машина. Кёниг (Computing machine. Koenig Frederick A. G.) [Koenig Anna C.]. Канад. пат. 492342, 21.04.53

Четыре вычислительных устройства типа счетной линейки и счетного цилиндра, предназначенные для расчета кормового рациона коров. Приведена фотография. В. М. Брадис

2649 П. Устройство для вычисления среднего. Манделл (Average computing device. Mundell Clyde S.). Пат. США 2656100, кл. 235—61, 20.10.53

Описаны детали вычислительного устройства, состоящего из наборного диска, подобного наборному диску телефонного аппарата, и комбинации зубчатых колес и зубчатой рейки. Дан схематический чертеж. В. М. Брадис

2650 П. Счетная доска. Паркер (Computer board. Parker John W.). Пат. США 2666577, кл. 235—61, 19.01.54

Механическая номограмма.

2651 П. Вычислительное устройство. Бернштейн (Calculator. Bernstein Maurice H.). Пат. США 2674410, кл. 235—88, 6.04.54

Описание специальной номограммы.

2652 П. Счетный диск с указателем положения знака дробности. Алле (Dick slide rule with decimal point indicator. Allais Julien Marie André). Пат. США 2658671, кл. 235—61, 10.11.53

2653 П. Вычислительное устройство типа счетной линейки. Брикнер (Slide-type calculator. Brick-

ner Frank H.). Пат. США 2659535, кл. 235—89, 17.11.53

Прибор типа счетной линейки для вычисления процентов по займам. Приведена фотография. Е. К. Н.

2654 П. **Учебное устройство. Ван-Дейк** (Educational device. Van Dijck Charles Maria Guillaume). Пат. США 2654963, кл. 35—70, 13.10.53

Учебное пособие для изучения таблицы умножения в виде набора разноцветных брусков. Их сочетание позволяет получить все случаи умножения однозначных чисел. Е. К. Нечаев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

2655. **Буквопечатающее устройство «Линофильм»** (Linofilm preview impressive — two-unit typesetter due in 1955), Printing Mag., 1954, **78**, № 5, 72—73 (англ.)

Сообщение фирмы «Мерджентaлер Линотип» о фотонаборной машине «Линофильм». Машина состоит из трех блоков: блок для пробивки отверстий на бумажной ленте, имеющий клавиатуру пишущей машинки, фотографический блок и фотокорректор. При печатании текста на бумажной ленте выбиваются отверстия, соответствующие печатаемым буквам. По мере печатания лента передвигается в фотографический блок, который на светочувствительную ленту последовательно, по букве фотографирует весь текст. В машине «Линофильм» используются некоторые узлы из появившихся в последнее время фотонаборных машин «Фотон», «Фотозеттер», «Ротофото» и «Монофото». Приведены фотографии машины. В. Б.

2656. **Пресс с вычислительным устройством для печатных схем** (Punch press with electronic brain developed by General Electric), Signal (Wash.), 1954, **8**, № 4, 61 (англ.)

Сообщение о прессе с электронным управлением для изготовления печатных схем (РЖМат, 1955, 5489). Скорость работы 30 операций в 1 мин. В 1955 г. пресс будет включен в автоматическую линию сборки, которая может укреплять на схеме от 10 до 50 стандартных деталей таких, как сопротивления и сверхминиатюрные лампы. Н. Н. Поснов

2657. **Автоматический дыропробивной пресс, работающий с помощью электронной вычислительной машины** (Automatic punch press with electronic brain developed), Electr. Engng, 1954, **73**, № 3, 294 (англ.)

Сообщается, что фирма «Дженерал Электрик» по заказу отдела связи армии США разрабатывает систему автоматических машин для сборки и испытания различного электронного оборудования, применяемого для военных целей.

В настоящее время уже разработано электронное управляющее устройство для дыропробивного пресса (РЖМат, 1955, 5489; 1956, 2656).

Указывается, что проектируемая система автоматических машин для сборки электронного оборудования не предусмотрена для производства полностью законченных изделий, таких как радиолокационная или телевизионная аппаратура. Этой системой будет производиться лишь предварительная сборка узлов на печатных схемах.

Автоматизация сборочных работ с помощью вычислительных машин рассматривается главным образом как усовершенствование, наиболее ценное для мелкосерийного производства, типичного для многих отраслей военной промышленности. Указывается, что разрабатываемая фирмой «Дженерал Электрик» система автоматической сборки будет обладать большой гибкостью. Изменение технологического процесса сборки в случае изменения конструкции подлежащих автоматической сборке узлов может быть произведено простым перфорированием новых команд на новых перфокартах.

Окончание работ по созданию системы автоматической сборки электронного оборудования запланировано на 1955 г. А. В. Чернышев

2658. **Автоматическая контора** (Le calculatrice ideale de bureau), Rev. efficience, 1953, **31**, № 300, 583, 585, 589, 591 (франц.)

Рассматривается возможность применения электронных вычислительных машин для автоматизации всех видов учета и некоторых функций управления на предприятиях. Приводится подробный перечень сведений, которые «автоматическая контора» должна давать дирекции предприятия. Перечень содержит 30 пунктов, разбитых на 8 разделов: статистику продаж, контроль производства, контроль качества продукции и т. п. В общих чертах описывается, как электронная вычислительная машина могла бы собирать, обрабатывать и сообщать вовне эти сведения, а также использовать их для выполнения ряда простейших функций управления предприятием. Г. Н. Поваров

2659. **Стремление к автоматическому управлению производством для улучшения изделий и понижения стоимости производства. Бауэрс** (Trend is toward more automatic process control for improved products, lower operating costs. Bowers W. S.), Petrol. Engr, 1954, **26**, № 4, C53—C54, C56—C58, C60—C62 (англ.)

Имеются два основных метода автоматического управления процессом перегонки нефтепродуктов: метод «материального баланса» и метод «конечной точки». Методы различаются точками, в которых происходят измерения характеристик процесса. В первом случае производятся измерения компонент, вступающих в реакцию, во втором — готового продукта. Приводится описание измерительных приборов, применяемых для контроля процессов. Описываются панели управления.

Дальнейшим улучшением системы управления является объединение приборов в общую систему управления — вычислительное устройство, в котором главные приборы, в соответствии с поступающими на них данными, задают уставки на приборы управления, размещенные в других точках процесса. В. Д. Князев

2660. **Централизованное управление производственными процессами** (Centralized control), Canad. Chem. Process, 1954, **38**, № 2, 22, 24 (англ.)

Отмечается, что в последние годы в промышленности все большее применение находит автоматическое либо частично автоматизированное центральное управление. Применение электронных вычислительных машин для управления дает хороший результат, но все же не позволяет полностью автоматизировать такие сложные производственные процессы, как химические, металлургические и т. п. Единственной причиной, по которой вычислительная машина не может заменить человека, автор считает трудность постройки очень больших машин. Л. С. Легезо

2661. **Производство без ручного труда. Бек** (No hands! Beck Jem), Purdue Engr, 1953, **49**, № 3, 12—13, 22, 24 (англ.)

Указывается на тенденцию автоматизации поточных линий с неоднородной продукцией за счет использования цифровых машин, работающих от перфолент и вырабатывающих сигналы управления рабочими машинами и конвейером. Этим устраняется один из недостатков прежних методов полной автоматизации, требовавших узкой специализации и приводивших к потере гибкости производства. Б. Я. Коган

2662. Военно-воздушные силы демонстрируют тренажер для обучения сверхзвуковым полетам (Air force demonstrates supersonic flight simulator), Tele-Tech, 1955, **14**, № 5, 71 (англ.)

Сообщается об установке на базе ВВС США в Лас Вегас (Las Vegas N. M.) сверхзвукового тренажера МВ-3, который предназначен для обучения полетам на реактивном истребителе F-100A. Тренажер имеет двойное управление, одно из которых предназначено для инструктора. Последний ставит перед обучающимся всевозможные задачи, возникающие при полете со сверхзвуковой скоростью, с помощью переключателей на приборной панели.

Вычислительные блоки тренажера используют для представления математических количеств напряжение частотой в 60 и 400 *гц*. Площадь, занимаемая тренажером, 14,3×5,5 *м*. Г. К. Москатов

2663. Электронные самолетные тренажеры облегчают операции военно-воздушных сил. Форман (Electronic flight simulators streamline air force operations. Forman Albert J.), Tele-Tech, 1955, **14**, № 5, 68—70, 148—149 (англ.)

Сообщается, что ВВС США заказали промышленности около 200 тренажеров для различных самолетов, причем 115 из них уже получены. Несмотря на высокую стоимость (от 800 000 до 1 000 000 долл.), тренажеры полностью себя окупят, так как они сильно снижают затраты на обучение летчиков. Стоимость полета современного четырехмоторного пассажирского самолета 550 долл. в 1 час. Стоимость эксплуатации тренажера 30 долл. в 1 час. Время для обучения не теряется из-за неблагоприятных метеорологических условий. Сообщается, что тренажер фирмы «Кертисс-Райт Демел» (Curtiss-Wright Dehmel) для транспортного самолета С-97 содержит 700 электронных ламп, 66 мотор-генераторов, 250 трансформаторов, 500 потенциометров, 4000 сопротивлений, 400 реле, установку для кондиционирования воздуха.

Отмечается, что за 20 081 час. эксплуатации простои из-за неполадок составили только 138 час. 5 мин., т. е. меньше 0,7%. По словам автора, незначительные простои — следствие тщательно продуманной системы профилактики моделирующего устройства. Помимо ежедневного осмотра, рекомендуется проверка каждые 100, 500, 1000 и 5000 час. Наладка и испытание тренажера занимают около 3 лет. Для проектирования нового тренажера необходимо, чтобы документация о новом самолете поступала, по крайней мере, за три года до серийного выпуска машины. Приведены фотографии различных блоков тренажера. Г. К. Москатов

2664. Быстродействующее вычислительное устройство для управления скоростными самолетами (High-speed «Brains» for high-speed planes), Westinghouse Engr., 1953, **13**, № 1, 49 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Вестингауз» автопилота для скоростных самолетов. В этом устройстве используются, в основном, магнитные усилители, а электронные лампы употребляются в небольшом количестве. Автопилот использует уникальный быстровращающийся «скоростной» гироскоп. В отличие от обычных «позиционных» гироскопов, чувствительных только к изменениям положения самолета, «скоростной» гироскоп реагирует только на скорость, с которой самолет изменяет свое положение. В. П. Парамонов

2665. Имитатор для исследования динамики геликоптера до его конструирования (Avec le simulateur dorand on pilote et on essaye un hélicoptère avant de le construire), Aéro-France, 1953, № 11, 163—164 (франц.)

Сообщается о разработке имитатора полета геликоптера, предназначенного для исследования устойчивости процессов управления и влияния на устойчивость отдельных параметров геликоптера. Имитатор позволяет также проводить тренировку летного персонала.

Имитатор состоит из моделирующей установки, решающей уравнения движения геликоптера, кабины геликоптера с аппаратурой управления, подвешенной за центр тяжести на карданном подвесе, следящих систем, приводящих в движение кабину в соответствии с координатами, выработанными моделирующей установкой, специальной оптической системы, создающей с помощью наклонной доски впечатление полета на местности для летчика, сидящего в кабине. Моделирующая установка построена на электромеханических элементах. Исходные переменные задачи представляются в виде углового перемещения. Имитатор дополнен регистрирующим устройством, позволяющим непрерывно снимать данные. Б. Я. Коган

2666. Имитатор полета геликоптера (A helicopter test-flight simulator), Flight, 1954, **65**, № 2347, 66 (англ.)

См. реф. 2665.

2667. Новый программный регулятор (New «robot brain»), Rubber World, 1954, **131**, № 2, 211 (англ.)

Сообщение фирмы «Тейлор Инструмент» (Taylor Instrument Co.) о новом программном регуляторе, который ставится на прессах для вулканизации шин. Регулятор позволяет в любой последовательности, согласно программе, производить регулирование восьми величин: температуры, давления, механического движения, электрической энергии и различные комбинации этих величин. Коммутация программы производится с помощью штеккеров. Возможный цикл регулирования от 3 мин до 4 час. В. М. Тарасевич

2668. Электронный быстродействующий отметчик уменьшает время, необходимое для инвентарной проверки (Electronic speed tally reduces time needed for inventory control), Electr. Engng, 1955, **72**, № 12, 1134 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington Rand) о выпуске устройства «Спид Толли» (Speed Tally) (РЖМат, 1955, 1575). В. Б.

2669. Устройство с магнитным барабаном, запоминающее имеющиеся данные, использующееся на авиалиниях США. Данн (Airline reservations, stock quotations stored on magnetic drum. Dunn W. F.), Wire and Radio Communs, 1953, № 8, 9—10, 20 (англ.)

Сообщается о разработке фирмой «Телерегистр Корпорейшн» устройства «Резервайзер» для облегчения продажи билетов на авиалиниях США и сходного с ним устройства для хранения биржевой информации.

В первом устройстве данные о наличии билетов и цен на самолеты на десятидневный срок наносятся на магнитный барабан. Агент по предварительной продаже билетов при заказе билета выбирает из барабана необходимую информацию о наличии мест. После продажи он снимает проданное место от участия в других операциях по продаже.

В устройстве, используемом на фондовой бирже, оператор при выборке необходимых данных о ценах работает с диском номеронабирателя и получает ответ, отпечатанный на бумажной ленте.

Устройство на авиалиниях, установленное в июле 1952 г., обслуживает 50 агентов по предварительной продаже билетов и дает ответы на 20—33 тыс. запросов о местах в день. Устройство для фондовой биржи обслуживает 6 комиссионеров и выдает данные на 24 приемно-передающих пункта. Устройства находятся в действии свыше 90% времени.

Приведены данные о магнитных барабанах обоих устройств. В. Б.

2670. Автоматическая проверка релейных цепей. Хэнсон (Automatic testing of wired relay cir-

cuits. Hanson A. N.), Commun. and Electronics, 1954, № 10, 850—857 (англ.)

Описывается устройство для автоматической проверки правильности монтажных соединений и отсутствия повреждений в блоках оборудования АТС, имеющих до 64 выводов. Описываемый автоматический пробник состоит из механического считывающего устройства, 18 считывающих реле, 256 реле выбора проверочных операций, схемы нарушений и индикаторных ламп. Всего пробник содержит 384 реле. Программа проверки вводится с помощью перфоленты. Перфолента с особой программой позволяет делать самопроверку пробника. Приведены принципиальные схемы релейных комплектов пробника и фотографии.

Г. Н. Поваров

2671 П. **Аэронавигационное приспособление для вычисления поправок, компенсирующих ошибки выполнения маршрута. Джонс, Хейс** (Air navigak tional device for computing corrections for trac errors. Jones Alfred Ernest, Hayes Norman Charles). Пат. США 2667305, кл. 235—61, 26.01.54

Портативное аэронавигационное приспособление.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Александров А. Д. 2236
Александров П. С. 2070
Александрян Р. А. 2224
Альбрехт Ф. 2185
Аљанчић С. 2100
Андронов И. К. 2364
Андрунакиевич В. А. 2021
Аникина Т. С. 1874
Аржаных И. С. 2214, 2264
Артемов Г. А. 2478
Артмеладзе Н. К. 2485
Ахиезер Н. И. 2126 К, 2137

Б

Бачелис Р. Д. 2466
Беляков В. К. 2258
Бирман М. Ш. 2234
Бојанић Р. 2100
Болдинский В. И. 2177
Борисович Ю. Г. 2354 Д
Борсук К. 2049
Брадистилов Г. 2193
Брусенцов Н. П. 2320
Булганин Н. А. 1856
Бушнев А. А. 2385

В

Вайнберг М. М. 2274
Василаке С. 2244
Вахер Ф. С. 2349
Векуа И. Н. 2173
Вертгейм Б. А. 2324
Виноградов А. И. 1929
Волнина Н. В. 2029 Д
Воловельская С. Н. 2170
Вороновская Е. В. 2119, 2120, 2121, 2127 Д
Выдревич М. 2574

Г

Галонен Л. М. 2219, 2200
Гальперин И. М. 2146
Гельфанд И. М. 2190
Гельфонд А. О. 1950
Геронимус Я. Л. 2116, 2278
Герчинский Р. 2353 Д
Гнеденко Б. В. 1907
Гордон А. 2574
Гребенюк Д. Г. 2123
Гуревич Г. Б. 1990
Гусейнов М. Г. 2238
Гусев В. А. 2383 Д

Д

Давиденко Д. Ф. 2291
Дезин А. А. 2229
Деканосидзе Е. Н. 2316
Дешевой Г. М. 2386
Джрбашян М. М. 2124, 2305
Доброгурский С. О. 2629 К
Дорфман А. Г. 2457
Дроздова Н. А. 1882 Д
Дун Гуан-чан 1937

Е

Евграфов М. А. 2139
Ефремович В. А. 2449, 2450

Ж

Жак И. Е. 2113

З

Зерагия П. К. 2245
Зубов В. И. 2184, 2186

И

Ибрагимов А. Ю. 1883 Д

К

Каазик Ю. Я. 2338
Калашников М. Д. 2303
Кармазина Л. Н. 2315
Киркор А. 2045
Коган Я. М. 2461
Козырев И. И. 2175 К
Кондурарь В. Т. 2333
Коробов П. П. 2267
Королюк В. С. 2467
Костюков А. А. 2262
Кошляков Н. С. 1969
Красовский Н. Н. 2188
Крейн М. Г. 2137, 2189
Круликовский Н. Н. 1875
Кубилюс И. П. 1938

Л

Ланков А. В. 1867, 1868
Латышева К. Я. 2179
Левин В. И. 2297, 2321 РЕЦ
Левитан Б. М. 2207, 2225
Лейфман Л. Я. 2078
Ли Дя Гон 2093
Лидский В. Б. 2190
Линник Ю. В. 1944
Локуциевский О. В. 2040
Ломджариа 1903

М

Мамедов Р. Г. 2128 Д
Масленникова В. Н. 2222, 2223
Медведев Ю. Т. 1914
Меньшов Д. Е. 2111
Меркулов А. М. 2384
Мертвецова М. А. 2460
Микеладзе Ш. Е. 2247
Михлин С. Г. 2327

Н

Наймарк М. А. 2344
Нахимовская А. 2388
Немыцкий В. В. 2187
Нечай О. С. 2414
Несмеянов А. Н. 1857
Нилов Г. Н. 2092

О

Обрешков Н. 1948
Остроумов Г. А. 2324
Отрадных Ф. П. 1899

П

Панчишин В. И. 2544
Папова Н. В. 2144
Петров В. В. 2200
Плишкин Ю. М. 2199
Понтрягин Л. С. 2004 К
Попов К. 2251
Попова Н. В. 2144, 2145
Потоцкий М. В. 1869, 2362
Привалов И. И. 2379 К

Р

Репьев В. В. 1881 К
Романов Н. П. 1941, 1951
Роднянский А. М. 2086
Рожанская Ю. А. 2356
Розенберг В. М. 2481
Розенфельд Б. А. 2452
Рухадзе 1904

С

Салехов Г. С. 2460
Салтиков Н. 2176, 1902
Самарский А. А. 2213
Свирский И. В. 2285
Серпинский В. 1957
Симонов Р. А. 1896
Скалкина М. А. 2192
Скоробогатько В. Г. 2276
Слепенчук К. М. 2301
Слободецкий Л. Н. 2241
Смирнов Ю. М. 2036
Соколов Ю. Д. 2462
Старжинский В. М. 2191
Супруненко Д. А. 1992

Т

Тамме Э. Э. 2338
Титов В. К 2629 К
Титов Н. С. 2337
Тихонов А. Н. 2213
Токарчук М. Т. 2112
Томић М. 2085, 2100
Трошин Г. Д. 2140
Тузов А. П. 2194

У

У Вэнь-цзюнь 2060
Уланов Г. М. 2200
Ульянов П. Л. 2101
Усманов Н. К. 2232

Ф

Филиппов А. Ф. 2465
Фильчаков П. Ф. 2143, 2544
Фогелс Э. К. 1936
Фок В. А. 2270
Фрид Е. 2574

Х

Хахубия Г. П. 2259
Хрущев Н. С. 1855

Ч

Чакалов Л. 2287
Четаев Н. Г. 2330

Ш

Шанин Н. А. 1912
Шерман Д. И. 2246
Шинцель А. 1957
Шубников А. В. 2355
Шушара Г. Н. 2290

Щ

Щеглов М. П. 2304

Э

Эйдельман С. Д. 2240

Я

Яблоков В. А. 2284

A

Agostinelli C. 2250
Alabaster R. C. 2622
Albrecht F. 2185
Alexits G. 2118
Allais J. M. A. 2652 II
Alrich J. C. 2500
Andreian C. 2161
Aoki K. 2435
Archibald R. C. 1887
Arthurs E. 2326
Ascoli G. 2307
Aubert K. E. 2001
Austin D. G. 2071
Avadhani T. V. 2306
Avez A. 2436
Azpeitia A. G. 2152

B

Bäbler F. 2042
Bachelet A. E. 2640 II
Bagemihl F. 2074
Baines W. D., Jr 2549
Bănărescu V. 2381 K
Bangert J. T. 2591
Barrar R. B. 2266
Barsotti I. 2441
Bartoo G. C. 1928 K
Beck J. 2661
Becker H. W. 1952
Benedicty M. 2456
Benĕs V. E. 1919
Bennett H. F. 2644 II
Bergen A. R. 2180
Berger E. R. 2302
Berger M. 2442
Bergman S. 2237
Berkovitz L. D. 2114
Bernays P. 1924
Bernstein M. H. 2651 II
Berry F. J. 2256
Bers L. 2239
Besicovitch A. S. 2417
Best J. 2365
Bettridge B. R. 2604
Beurling A. 1940
Bilinski S. 2369
Blackburn J. F. 2235
Blanchard R. 2371
Blanuša D. 2440
Blattner D. G. 2577
Blench T. 2549
Blumenthal L. M. 2454
Böhm C. 2494
Bol G. 2420
Borsuk K. 2049
Borwein D. 2133
Boseck H. 2006
Boström L. 2567
Bouligand G. 2413
Bowers W. S. 2659
Brelot M. 2228
Bremermann H. J. 2167
Brickner F. H. 2653 II
Brillouët G. 2263
Brousse P. 2317
Brown K. E. 1870
Bruijn N. G. 1956
Burau W. 2411
Burgerhout Th. J. 2469
Bushby F. H. 2523

C

Cahen F. 2550
Calapso R. 2429
Caprioli L. 2205
Carleson L. 2289
Carlitz L. 1959
Cavallaro V. G. 2288, 2374
Čech E. 2300 K
Cell J. W. 1872
Cinquini S. 2215
Cinta Badillo de la 1897
Cherry T. M. 2309
Cherubino S. 1977
Childress N. A. 2404
Chow Wei-Liang 2448
Clagett M. 1886
Clark G. R. 2619
Clayden D. O. 2638 II
Clippinger R. F. 2530
Clunie J. 2154
Cohen H. 2046
Collingwood E. F. 2157, 2158
Comley W. 2557
Consiglio A. 2252
Conte S. D. 2329
Court N. A. 2387
Crandall S. H. 2474
Curry H. B. 1926

D

Danielsson O. 2368
Daum C. R. 2549
Davenport H. 1945, 1947
Davis C. 2357
Deaux R. 2376
De Castro A. 2202
Degen P. L. 2602
Deheuvels R. 2058
Dekker T. 1994
Denjoy A. 2090 K
De Socio M. 2268
Dinghas A. 1973, 2162, 2437
Di Palo R. 2298
Dolph C. L. 2266
Dowker C. H. 2037
Draim N. A. 1961
Dubreil P. 1972 K
Duffin R. J. 2490
Dunn W. F. 2669
Duschek A. 2382 K
Dyson F. J. 2151

E

Eachus J. J. 2517
Ehrling G. 2226
Eilenberg S. 2059
Elliott J. 2208
Engbert W. 2605
Engstrom H. T. 2531
Erdös P. 1931, 2097, 2131, 2155
Evans J. P. 2150

F

Fan Ky. 1983
Farjaud H. 2539
Federer H. 2087
Fenyö S. 2233
Fernández G. 2431
Ferrier R. 1880 K
Fialkow A. D. 2487
Fichera G. 2077
Fick E. 3214
Floyd E. E. 2035
Flugge-Lotz I. 2273 K
Focke J. 2299
Fodor G. 2098
Forbes G. F. 2505
Forman A. J. 2663
Förstner R. 2616
Forsythe G. E. 2536
Fowler C. M. 2473
Fox L. 2479
Fragner W. 2178
Frajese A. 1885
Franchetta A. 2396
Freud G. 2117
Freudenthal H. 1993
Friedlander F. G. 2249
Friedrichs K. O. 2217
Froda A. 2083
Froese C. 2323
Fromme Th. 2496
Fuchs L. 2028

G

Gagliardo E. 1963
Galbură Ch. 2062
Gambotto A. 2432
Gårding L. 2216
Gary M. 2332
Gauthier L. 2400
Ghermanescu M. 2141
Gehring F. W. 2080
Gerhold R. A. 2585
Germay R. H. 2277, 2280
Gerst I. 2487
Glover R. E. 2549
Goebel W. 2416
Golay M. J. E. 2625
Goldstine H. H. 2497
Goodell J. D. 2582
Goodstein R. L. 1913
Gosselin R. P. 2114
Gråberg 2524
Granas A. 2047, 2065
Grauert H. W. J. 2166
Green H. S. 2271
Greenfield A. 2639 II
Grenander U. 2293
Griffin R. F. 2612
Griffith J. L. 2231
Griffiths H. B. 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055
Groot J. de 1994
Gruenberger F. 2624, 2630 K
Grunsky H. 2138
Guggenbuhl L. 2367
Guggenbühl W. 2600
Guinand A. P. 1939, 2292

H

Hadwiger H. 2451, 2458, 2459 K
Hahn H. 2359
Hall M., Jr 2453
Hall R. 2405
Hamer H. 2578
Hammer P. C. 2378
Hanson A. N. 2670
Harish-Chandra 2345
Harp W. M. 2506
Harris J. N. 2553
Hartman Ph. 2204
Hashimoto H. 2003
Haupt O. 2072
Hauser G. 1909 K
Havens B. L. 2635 II
Hayes N. Ch. 2671 II
Hebert D. J. 2549
Heffter L. 2296
Heimann W. 2611
Heinhold J. 1862; 2142
Heins M. 2156
Helsdon P. B. 2592
Henkin L. 1925
Hénon M. 2547
Hermann H. 2066
Herzog F. 2131
Heywood Ph. 2209
Hida K. 2261
Hinds M. K. 2523
Hitotumatu S. 2227
Hoag E. 2644 II
Hochrainer A. 2382 K
Hofmann J. E. 1895
Hohn F. E. 2492
Hölder E. 2211
Holt M. 2256
Homma T. 2044
Horner W. W. 1968
Hornfeck B. 1970
Horninger H. 2377
Horton G. A. 2609
Hsu En-Yun 2476
Hsu L. C. 2286
Huang Su-Shu 2281
Huff G. B. 1982
Hukuhara M. 2019
Hull T. E. 2323
Hu Sze-Tsen 2018, 2056
Hutcherson W. R. 2404

I

Igusa J. 2410
Ikeda M. 2016
Inkeri K. 1971 K
Ionescu D. V. 2480
Itô N. 1995
Itô S. 2243

J

Jaeckel K. 2464
Jain S. C. 2257
Janković Z. 2311
Järnefelt G. 2360
Jaworowski J. W. 2065
Jenkins J. A. 2149
Jeżewski M. 2253
John F. 2218
Johnson A. B. 2575
Johnson S. J. 2564
Johnston R. F. 2586
Jones A. E. 2671 II
Jones B. W. 1976
Jones Ph. S. 1888, 1890, 1891, 1894

K

Kahane J.-P. 2105
Kalicki J. 1921
Kaloujnine L. 1996
Kandiah K. 2556
Kanold H. J 1960
Kantz G. 2129
Kazarinoff N. D. 2312
Kawada Y. 2015
Kemeny J. G. 1917
Kendall D. G. 2346
Kilburn T. 2641 II
Kilpi Y. 2341
King C. J. 2603
Kinohara A. 2011
Kinoshita S. 2044
Kinukawa M. 2106
Kirkor A. 2045
Klass Ph. 2534
Kleene S. C., 1910
Klingenberg W. 2427
Klöter H. 1935
Knaster B. 2082
Kneser H. 2412
Knight A. J. 2399
Koenig F. A. G. 2648 II
Koiter W. T. 2282
Kondo M. 2094, 2095
Kössler M. 2132
Köthe G. M. 1923, 2334
Kovach L. D. 2557
Krasner M. 2013, 2014
Krickeberg K. 2319
Krishnan K. S. 2257
Krull W. 2022
Kubálkova S. 2403
Kubo T. 2148
Kuniyoshi H. 2007
Kuessner H. G. 2255
Kunle H. 2421
Kunugi K. 2034
Künzi H. 2160
Kuratowski K. 2067

L

L'Abbé M. 1915
Lacombe D. 1911
Lakshmana Rao S. K. 2328, 2477
Lalaguë P. 2089
Lambe C. G. 2283
Laugwitz D. 2351
Lehman R. S. 2081
Lelong-Ferrand J. 2438
Leppert G. 2472
Leptin H. 1942
Levenstein H. 2573
Lippee B. 2519
Litzman O. 2203
Lorentz G. G. 1930
Lotkin M. 2279
Low F. K. 2640 II
Lueg H. 2489
Lyndon R. C. 1997

M

MacColl L. A. 2248
Macintyre A. J. 2155
MacLane S. 2059
McLaughlin J. E. 2130
McMillan B. 2637 II
McNamara F. L. 2553
McNown J. S. 2476
Magnus W. 2181, 2348
Mahler K. 2370
Mammana C. 2395
Mandelbrojt S. 2134, 2322
Mann W. R. 2235
Marchaud A. 2397
Marchionna E. 2406
Marczewski E. 2073
Marek J. 1966
Máříк J. 2335
Mark F. 2646 II
Marmion A. 2375
Marsh D. 1976
Martin L. H. 2326
Matsushima Y. 2063
Mattioli E. 1998
Mauchly J. W. 2498
Maxfield J. 1964
Maxfield M. 1964
Mayer J. 1884
Meixner J. 2321 РЕЦ
Menšik M. 2391 К
Meschkowski H. 2343
Metelka J. 2389
Metelka V. 2401
Mihăileanu N. 2392 К
Mikhail M. N. 2135
Mioduszewski J. 2082
Mishra R. S. 2433
Moisil G. C. 2023
Molnár J. 2358
Montefinale G. 2543
Morawetz C. S. 2221
Moriya M. 2012
Morse M. 1866
Moses H. E. 2272
Mostert P. S. 1991
Mostow G. D. 1978
Motzkin T. S. 2122
Mrówka S. 2031
Müller M. 2125
Müller R. 2318
Mundell C. S. 2649 II
Munier F. 2483
Munkres J. 2057
Muracchini L. 2390
Murgulescu E. 2381 К
Myhill J. 1916
Myrberg L. 2164

N

Nagao H. 2016
Nakai Y. 2409
Nakayama T. 2016
Nash J. 2439
Natucci A. 2363
Neidthart H. 2606
Nentwig K. 2597
Newman E. A. 2638 II
Newman J. R. 2069
Newns W. F. 2091
Nicolescu A. 2425
Nicolescu M. 2242
Nielsen J. 1999
Nikodym O. M. 2096
Nikodym S. 2006
Ninomiya N. 2172
Nitsche J. 2212
Nollet L. 2398
Novák J. 2030

O

Oakley C. O. 2380 К
Oderfeld J. 2253
Odlanicki-Poczobutt M. 1898
Ödman S. T. A. 2470
Okugawa K. 2020
Ono T. 2336
Ono Y. 2488
Oppenheim P. 1917
Orlicz W. 2347
Orloff C. 1974
Ornstein W. 2265
Osborn J. O. 1928 К
Osima M. 1986
Ostmann H.-H. 1955
Ōtsuki T. 2434

P

Packer L. S. 2615
Padmavally K. 2039
Page E. S. 2463
Pagni P. 1954
Paige L. J. 2002
Pais A. 2430
Pankove J. I. 2593
Papaioannou C. 2423
Paparisto K. 1859
Papič P. 2032, 2033
Papy G. L. 2444, 2445
Parker J. W. 2650 II
Pastides N. 2088
Patterson E. M. 2017
Pauc Ch. Y. 2072 2076
Pearson J. D. 2269
Pellegrino F. 2340
Petrie G. W. 2495
Piranian G. 2131
Pitcher T. 2342
Platzman G. W. 2475
Pollack L. W. 2486 К
Pösch H. 2496
Post E. L. 1910
Potier G. X.-N. 2643 II
Putnam C. R. 2198

R

Radojčić M. 2165
Ragab F. M. 2308
Ragazzini J. R. 2180
Ranson W. R. 2623
Ratib I. 2043
Ratz A. G. 2586
Ravetz J. R. 2084
Reeve W. D. 1871
Reeves A. H. 2642 II
Reiner I. 1979
Reissig R. 2195 2201
Rényi A. 2079
Ribeiro H. 1873
Riley J. D. 2468
Ringel G. 2068
Rinow W. 2428
Riordan J. 1985
Riss J. 2352 Д
Rivier W. 1965
Robinson G. de Beauregard 1987, 1988, 1989
Rogers C. A. 1949
Rogers T. F. 2564
Rohleder H. 2491
Rohrbach H. 1934
Rooney P. G. 2325
Roquette P. 2009
Rosculeț M. N. 2171
Rose A. 1920
Rosenblatt M. 2293
Roth K. F. 1943
Roy S. N. 1980
Rudin W. 2104
Rugini F. 2340
Rühs F. 2005 Д
Rund H. 2446
Rutovitz D. 2076

S

Sekellarioy N. 2415
Salem R. 2109, 2110
Santaló L. A. 2426
Sardi P. 2518
Satô M. 2103
Sauer R. 2418
Sawicki K. 1893
Schäfke F. W. 2313, 2321 РЕЦ
Schinzel A. 1957, 1958
Schlang A. 2515
Schüller J. 2372
Schultz B. H. 2599
Schützenberger M. P. 2027
Seibert P. 2153
Seki S. 2443
Serghiesco S. 2294
Serrin J. B. 2260
Shapiro V. L. 2115
Sharp T. A. 2617
Shimrat M. 2038
Shimura G. 2408
Shiowitz M. 2626
Shoup A. 2584
Sierpinski W. 1957
Sinden F. W. 1984
Skolem Th. 1927
Slutz R. J. 2598
Speath D. A. 2564
Spinning H. M. 2619
Sponsler G. C. 2310
Stanley R. 1918
Steimel K. 2594
Stein P. 1981
Steinfeld O. 2025
Stöhr A. 1932, 1933, 1935
Stoilow S. 2174 К
Stoll W. 2168, 2169
Stoller M. 2533
Stone D. E. 1953
Storlazzi R. 2254
Strubecker K. 2419
Struik D. J. 1908 К
Stuloff N. 2163
Sugiyama S. 2182
Sundara Raja Iyengar K. T. 2477
Szele T. 2000
Szendrei J. 2024
Sz.-Nagy B. 2339

T

Taeger 2589
Takahashi S. 2007
Takahashi T. 2099
Tallini G. 2447
Tandori K. 2107, 2108
Tatarkiewicz K. 2482

Terada F. 2008
Thébault V. 2373
Thomas A. 2647 II
Thomas E. L. 2541, 2542
Thurston H. A. 2026
Tino O. 2381 K
Tietze H. 1905, 1906
Tits J. 2455
Titus C. J. 2130
Tsuji M. 2159
Tootill G. C. 2641 II
Tornehave H. 2064
Tornheim L. 1946
Tricomi F. G. 2206
Turán P. 1900
Turrittin H. L. 2183

U

Urabe M. 2197
Urbanik K. 2082

V

Vaccarino G. 1922
Vaccaro G. 2394, 2424
Vaccaro M. 2393
Vaňatová L. 2402
Van Dijck Ch. M. G. 2654 II
Vandiver H. S. 1967
Vaona G. 2422
Varini B. 2361
Vasilache S. 2244, 2275
Veen J., van 2549
Vermes P. 2136
Volkmann B. 1934

W

Walsh J. L. 2122, 2147, 2150
Wang H.-Ch. 2061
Watson G. L. 1945
Weber 2295
Weier J. 2048
Weiss M. D. 2571
Weissenstein H. G. 2613
Wells F. B. 2366
Whaples G. 2010
White Ch. de B.2642 II
Wielandt H. 1975
Willers F.-A. 2514
Williams F. C. 2641 II
Williams R. F. 2041
Wilson N. Y. 1962
Wintner A. 2204
Witcher C. M. 1876
Witting H. 2471
Włodarski L. 2350
Wood F. 1889
Wood R. 2558
Wollstadt R. D. 2499
Wormald E. G. 2493
Wright R. R. 1892
Wu T. T. 2484

Y

Yasuura K. 2488
Yih Chia-Shun 2476
Yoshizawa T. 2196
Young E. A. 2644 II

Z

Zaidman S. 2230
Zariski O. 2407
Zeller K. 2102
Zeuli T. 2331
Zimbel N. 2552
Zink R. E. 2075
Zlámal M. 2210
Zweizig J. R. 2568

ლომჯარია ნ. 1903
ზუხაძე ა. 1904

吳文俊 2060
董光昌 1937
리재곤 2093

ПОПРАВКА

В РЖ «Математика» № 3 на стр. 134, в левой колонке третью строку сверху следует читать так:

уравнения $y'' - \partial f / \partial y + \partial f / \partial x = 0$, получаемого из (1)

Технический редактор *В. В. Гражданкина*